Kumpulan Soal dan Solusi Olimpiade Matematika Indonesia

9 Tahun Penyelenggaraan OSN

Pembukaan OSN 2007

Simposium Guru 2008 di Makassar, Sulawesi Selatan

EDDY HERMANTO, ST

SMA Negeri 5 Bengkulu

Jl. Cendana No. 20 Bengkulu Kode Pos 38228

Telp. (0736) 21433

Tahun 2010

Kumpulan Soal dan Solusi Olimpiade Matematika Indonesia

9 Tahun Penyelenggaraan OSN

2002 - 2010

Eddy Hermanto, ST

SMA Negeri 5 Bengkulu
Jl. Cendana No. 20 Bengkulu Kode Pos 38228
Telp. (0736) 21433

Tahun 2010

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Penulis ucapkan kepada Allah, SWT karena dengan karunia-Nya Penulis dapat menyelesaikan penulisan buku ini. Buku ini Penulis tulis sebagai salah satu jawaban akan masih kurangnya buku-buku Olimpiade Matematika yang ada di Indonesia. Buku ini berisi soal dan solusi Olimpiade Matematika Tingkat Kabupaten/Kota, Tingkat Provinsi dan Tingkat Nasional yang berlangsung di Indonesia dari tahun 2002-2010 dan dapat dipergunakan dalam menyiapkan siswa-siswa menuju Olimpiade Sains Nasional pada tahun-tahun berikutnya.

Ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian buku ini, khususnya buat rekan-rekan dalam forum www.olimpiade.org yang telah memberikan dorongan moril kepada Penulis, baik yang pernah bertemu secara langsung dengan Penulis maupun yang sampai saat ini belum pernah bertemu langsung dengan Penulis. Tak lupa terima kasih juga Penulis ucapkan kepada isteri tercinta Penulis, Rosya Hastaryta, S. Si, yang telah memberi dukungan yang besar kepada Penulis serta juga telah melahirkan puteri pertama kami, Kayyisah Hajidah, pada tanggal 2 Desember 2009.

Penulis merasa bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu Penulis mengharapkan saran dan kriitik dari Pembaca yang budiman sebagai bahan perbaikan buku ini. Untuk korespondensi, pembaca dapat mengirimkan email ke eddyhbkl@yahoo.com.

Akhir kata semoga buku ini dapat bermanfaat yang sebesar-besarnya bagi Pembaca sekalian.

Bengkulu,   Desember 2010

EDDY HERMANTO, ST
eddyhbkl@yahoo.com

DAFTAR ISI

Ebook ini gratis dan dapat di*print* maupun dikopi serta dapat disebarkan melalui *softcopy* atau *hardcopy*, namun dengan syarat :

1. tidak untuk dikomersilkan.
2. tidak mengubah sebagian baik sedikit maupun banyak dari isi buku sehingga hak cipta maupun identitas Penulis seolah-olah hilang.
3. tidak menghilangkan halaman ini.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2002

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2003

Bidang Matematika

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2002

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT KABUPATEN/KOTA
TAHUN 2002

1 Bagian Pertama

1. Bilangan $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ sama dengan

   A. ¼ B. ½ C. 1 D. 2 E. 8

2. Bando selalu berkata bohong. Suatu hari dia berkata kepada tetangganya, Andi : "Paling tidak salah satu diantara kita tidak pernah berbohong." Dari informasi ini kita merasa pasti bahwa

   A. Andi selalu berbohong
   B. Andi sesekali berbohong
   C. Andi selalu berkata benar
   D. Andi sesekali berkata benar
   E. Andi tidak pernah berkata apa pun

3. Bilangan n terbesar sehingga 8^n membagi 44^{44} adalah

   A. 8 B. 22 C. 29 D. 44 E. 88

4. Pernyataan manakah yang benar ?

   A. Jika $x < 0$ maka $x^2 > x$
   B. Jika $x^2 > 0$ maka $x > 0$
   C. Jika $x^2 > x$ maka $x > 0$
   D. Jika $x^2 > x$ maka $x < 0$
   E. Jika $x < 1$ maka $x^2 < x$

5. Misalkan x^{-n} sama dengan $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ untuk setiap bilangan real x. Maka $a^3 - a^{-3}$ sama dengan

   A. $\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)$
   B. $\left(\frac{1}{a}-a\right)\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)$
   C. $\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)$
   D. $\left(\frac{1}{a}-a\right)\left(\frac{1}{a^2}+1+a^2\right)$
   E. bukan diantara A, B, C dan D

6. Lima ekor kambing memakan rumput seluas 5 kali ukuran lapangan bola dalam 5 hari. Berapa hari yang diperlukan oleh 3 ekor kambing untuk menghabiskan rumput seluas 3 kali lapangan bola ?

   A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

7. Jika untuk setiap x, y bilangan real berlaku x\$y = xy − x + y maka (x + y)\$(x − y) sama dengan ⋅⋅

   A. $x^2 - y^2 + 2x$
   B. $x^2 - y^2 - 2x$
   C. $x^2 - y^2 + 2y$
   D. $x^2 - y^2 - 2y$
   E. $x^2 - y^2$

8. Berapa banyak pasang bilangan bulat positif (a,b) yang memenuhi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$?

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

9. Untuk nilai a yang manakah garis lurus $y = 6x$ memotong parabola $y = x^2 + a$ tepat di satu titik?·

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10 E. 11

10. Digit 1, 9, 9, 8 dalam 1998 mempunyai jumlah total 1 + 9 + 9 + 8 = 27. Bilangan berikutnya yang mempunyai jumlah digit 27 terjadi di antara tahun

A. 2500 dan 2700 C. 2901 dan 3100 E. 9901 dan 9999
B. 2701 dan 2900 D. 3101 dan 9900

2 Bagian Kedua

11. Pada suatu segitiga ABC, sudut C tiga kali besar sudut A dan sudut B dua kali besar sudut A. Berapakah perbandingan (rasio) antara panjang AB dengan BC ?

12. Bando dan Bandi ingin mengecat pagar, Bando dapat menyelesaikan pengecatan pagar oleh dirinya sendiri dalam waktu 3 jam, sedangkan Bandi dapat menyelesaikannya dalam 4 jam. Pada pukul 12:00 siang mereka mulai mengecat pagar bersama-sama. Akan tetapi pada suatu ketika mereka bertengkar. Mereka bertengkar selama 10 menit dan dalam masa itu tidak satupun yang melakukan pengecatan. Setelah pertengkaran tersebut Bandi pergi dan Bando meyelesaikan pengecatan pagar sendirian. Jika Bando menyelesaikan pengecatan pada pukul 14:25, pada pukul berapakah pertengkaran dimulai ?

13. Berapakah jumlah digit-digit bilangan $2^{2002} \cdot 5^{2003}$?

14. Berapa banyak bilangan positif yang kurang dari 10.000 yang berbentuk $x^8 + y^8$ untuk suatu bilangan bulat $x > 0$ dan $y > 0$?

15. Tentukan bilangan n terkecil sehingga setiap subhimpunan dari $\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$ yang beranggotakan n unsur pasti mengandung dua anggota yang selisihnya 8.

16. Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P diantara kedua garis. Jika AB = 4 dan CD = 12, berapa jauh P dari garis CD ?

17. Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga

$$\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$$

Tentukan nilai $\frac{a}{b}$.

18. Bilangan bulat positif $p \geq 2$ disebut bilangan prima jika ia hanya mempunyai faktor 1 dan p. Tentukan nilai penjumlahan semua bilangan prima diantara 1 dan 100 yang sekaligus bersifat : satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 5 dan satu kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 6.

19. Misalkan

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1001^2}{2001}$$

dan

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1001^2}{2003}$$

Tentukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat ke a – b.

20. Suatu persegi panjang berukuran 8 kali $2\sqrt{2}$ mempunyai titik pusat yang sama dengan suatu lingkaran berjari-jari 2. Berapakah luas daerah irisan antara persegi panjang dan lingkaran tersebut ?

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2002

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)

$\therefore \quad \dfrac{(2^4)^8}{(4^8)^2} = \dfrac{2^{32}}{4^{16}} = \dfrac{2^{32}}{2^{32}} = 1$

2. (Jawaban : B)

Ingkaran dari : paling tidak salah satu di antara kita tidak pernah berbohong adalah :

$\therefore$ **Kedua-duanya pernah berbohong**

3. (Jawaban : C)

$44^{44} = 4^{44} \cdot 11^{44} = 16^{22} \cdot 11^{44} = 8^{22} \cdot 2^{22} \cdot 11^{44} = 8^{22} \cdot (2^3)^7 \cdot 2 \cdot 11^{44} = 8^{29} \cdot 2 \cdot 11^{44}$

Karena 8 tidak membagi $(2 \cdot 11^{44})$, maka :

$\therefore$ $\mathbf{n_{maks} = 29}$

4. (Jawaban : A)

Dasar teori :

Jika	$x < 0$	maka	$x^2 > x$
Jika	$0 < x < 1$	maka	$x^2 < x$
Jika	$x > 1$	maka	$x^2 > x$

A. Benar
B. Salah karena jika $x^2 > 0$ dimungkinkan $x < 0$ atau $x > 0$
C. Salah. Karena $x^2 > x$ maka $x(x-1) > 0$ sehingga $x < 0$ atau $x > 1$
D. Salah karena jika $x^2 > x$ dimungkinkan $x < 0$ atau $x > 1$
E. Salah karena untuk $x < 0$ maka $x^2 > x$

$\therefore$ Pernyataan yang benar adalah : **jika $x < 0$ maka $x^2 > x$**

5. (Jawaban : A)

$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$a^3 - a^{-3} = a^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^3$$

$$a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right)$$

$$\therefore \quad a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$$

6. (Jawaban : D)

Kecepatan makan untuk 1 ekor kambing, v_k = 1 lap. bola/ 5 hari / 5 kambing.

V_k = 1/5 lap bola/hari/kambing

Banyaknya rumput yang dimakan, n_r dirumuskan dengan :

$N_r = v_k \cdot n_{hari} \cdot n_{kambing}$

$3 = 1/5 \cdot n_{hari} \cdot 3$

$\therefore$ **n_{hari} = 5 hari**

7. (Jawaban : D)

(x + y) \$ (x – y) = (x + y) (x – y) – (x + y) + (x– y)

$\therefore$ (x + y) \$ (x – y) = $\mathbf{x^2 - y^2 - 2y}$

8. (Jawaban : ?)

Karena b > 0 maka $\frac{1}{a} < \frac{1}{6}$ sehingga a > 6 .... (1)

Karena $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ maka $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{6}$

$a = \frac{6(b-6)+36}{b-6}$

$a = 6 + \frac{36}{b-6}$ .... (2)

Karena a > 6 maka (b – 6) > 0 .... (3)

Karena a bilangan bulat maka (b –6) adalah faktor dari 36 dan karena (b – 6) > 0 maka nilai (b – 6) yang memenuhi adalah 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 atau 36.

Untuk	b – 6 = 1	b – 6 = 2	b – 6 = 3	b – 6 = 4	b – 6 = 6
	b = 7	b = 8	b = 9	b = 10	b = 12
	a = 42	a = 24	a = 18	a = 15	a = 12
		b – 6 = 9	b – 6 = 12	b – 6 = 18	b – 6 = 36
		b = 15	b = 18	b = 24	b = 42
		a = 10	a = 9	a = 8	a = 7

Pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi adalah :

{ (7,42) ; (8,24) ; (9,18) ; (10,15) ; (12,12) ; (15,10) ; (18,9) ; (24,8) ; (42,7) }

$\therefore$ Maka banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi adalah **9**

9. (Jawaban : C)

Karena 6x = x^2 + a maka x^2 –6x + a = 0

Disk = 6^2 – 4(1)(a) = 36 – 4a

Syarat agar y = 6x memotong parabola y = x^2 + a di satu titik adalah Disk = 0

36 – 4a = 0

$\therefore$ **a = 9**

10. (Jawaban : B)

Misal bilangan selanjutnya adalah ABCD, maka A = 2 karena 1 + 9 + 9 + 9 $\neq$ 27.

B + C + D = 25

Karena diinginkan B sekecil-kecilnya, maka (C + D) harus sebesar-besarnya dan karena B $\leq$ 9; C $\leq$ 9 dan D $\leq$ 9 maka $(C + D)_{maks}$ = 18 sehingga B_{min} = 25 – 18 = 7.

Maka tahun berikutnya yang digitnya berjumlah 27 adalah 2799

$\therefore$ Maka tahun berikutnya yang digitnya berjumlah 27 terjadi di antara tahun **2701 dan 2900**

BAGIAN KEDUA

11. $\angle C = 3\angle A$ dan $\angle B = 2\angle A$
    Karena $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ maka $\angle A + 2\angle A + 3\angle A = 180^o$ sehingga $\angle A = 30^o$
    $\angle C = 3\angle A = 90^o$
    $$\frac{AB}{\sin\ \angle C} = \frac{BC}{\sin\ \angle A}$$
    $$\therefore\ \frac{AB}{BC} = \frac{\sin\ 90^\circ}{\sin\ 30^\circ} = 2$$

12. Misal kecepatan Bando mengecat v_o = 1 pagar / 3 jam = 1/3 pagar/jam
    Kecepatan Bandi mengecat v_i = 1 pagar / 4 jam = 1/4 pagar/jam
    t_1 adalah lamanya waktu Bando dan Bandi mengecat bersama (dalam jam)
    Maka banyaknya pagar yang dicat oleh mereka n_{p1} adalah :
    $n_{p1} = v_o \cdot t_1 + v_1 \cdot t_1$
    $$n_{p1} = \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{4}t_1 = \frac{7}{12}t_1$$
    t_2 adalah lamanya waktu Bando mengecat pagar sendirian setelah pertengkaran (dalam jam)
    $n_{p2} = v_o \cdot t_2$
    $$n_{p2} = \frac{1}{3}t_2$$
    Karena t_{total} adalah waktu dari 12.00 sampai 14.25 maka $t_{total} = \frac{29}{12}$ jam

    Lama pertengkaran 10 menit atau $\frac{1}{6}$ jam
    $t_{total} = t_1$ + lama pertengkaran + t_2
    $$\frac{29}{12} = t_1 + \frac{1}{6} + t_2$$
    $t_1 + t_2 = \frac{9}{4}$. Maka $t_2 = \frac{9}{4} - t_1$
    $$n_{p1} + n_{p2} = 1 = \frac{7}{12}t_1 + \frac{1}{3}t_2$$
    $$1 = \frac{7}{12}t_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4} - t_1\right)$$
    $12 = 7t_1 + 9 - 4t_1$ sehingga $t_1 = 1$ jam
    Maka pertengkaran dimulai 1 jam setelah pukul 12.00
    $\therefore$ Pertengkaran dimulai pukul **13.00**

13. $N = 2^{2002} \cdot 5^{2003} = 5 \cdot (2 \cdot 5)^{2002} = 5 \cdot 10^{2002}$
    N = 500000····· (Sebuah bilangan yang terdiri dari 2003 digit dengan digit pertama 5 diikuti digit 0 sebanyak 2002 kali)
    $\therefore$ Jumlah digit N = 5 + 0 + 0 + 0 + ··· = **5**

14. Misal $P = x^8 + y^8$; maka $P < 10^4$

Karena $x^8 > 0$ dan $y^8 > 0$ maka $x^8 < 10^4$ dan $y^8 < 10^4$

$x^2 < 10$ dan $y^2 < 10$

Maka x = 1; 2; atau 3 dan y = 1; 2; atau 3

Untuk x = 1 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 1^8 = 2 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 1 dan y = 2 atau x = 2 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 2^8 = 257 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 1 dan y = 3 atau x = 3 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 3^8 = 6562 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 2 dan y = 2 maka $P = 2^8 + 2^8 = 512 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 2 dan y = 3 atau x = 3 dan y = 2 maka $P = 2^8 + 3^8 = 6817 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 3 dan y = 3 maka $P = 3^8 + 3^8 = 13122 > 10000$ (tidak memenuhi)

Maka nilai P yang memenuhi adalah 2; 257; 6562; 512; 6817

$\therefore$ Banyaknya nilai yang berbentuk $x^8 + y^8$ dengan x, y bilangan bulat adalah **5**

15. Misal a − b = 8. Kemungkinan 2 nilai yang berselisih 8 adalah :

20 − 12	18 − 10	16 − 8	14 − 6	12 − 4	10 − 2
19 − 11	17 − 9	15 − 7	13 − 5	11 − 3	9 − 1

Bilangan 9; 10; 11; 12 berperan 2 baik sebagai a maupun b.

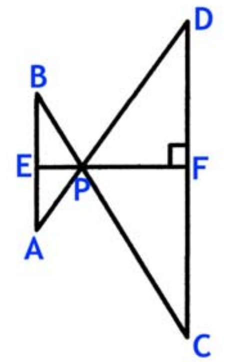
Jika kedelapan bilangan berikut :

a. 9	c. 11	e. 5 atau 13	g. 7 atau 15
b. 10	d. 12	f. 6 atau 14	h. 8 atau 16

tidak termasuk dalam n_{unsur}, maka tidak akan ada 2 unsur dari n_{unsur} yang berselisih 8. Maka untuk n = 20 − 8, masih dimungkinkan tidak ada 2 unsur dari n_{unsur} yang berselisih 8.

$\therefore$ $\mathbf{n_{minimal} = 13}$

16. Dibuat garis EF tegak lurus AB maupun CD serta melalui titik P.



Karena ∠CPD = ∠APB dan AB sejajar dengan CD, maka ΔAPB sebangun dengan ΔCPD.

$$\frac{EP}{PF} = \frac{CD}{AB} = \frac{12}{4} = 3$$

$$PF = \frac{1}{3} \cdot EP \quad \cdots\cdots\cdots\cdot (1)$$

EP + PF = 4

$$EP + \frac{1}{3} \cdot EP = 4$$

$\therefore$ EP = **3** satuan

17. Karena $\frac{a}{b}+\frac{a+10b}{b+10a}=2$ maka $\frac{a}{b}+\frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}}=2$

Misal $\frac{a}{b}=x$, maka $\frac{x+10}{1+10x}=2-x$

x + 10 = 2 – 10x^2 + 19x

(5x – 4) (x – 1) = 0

x = 1 atau $x=\frac{4}{5}$

∴ Karena a ≠ b, maka x ≠ 1 maka $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$

18. 1 < p < 100

Dari pernyataan selanjutnya, maka :

p = 1 + 5x dengan x adalah bilangan bulat.

Karena 1 < 1 + 5x < 100 maka 0 < 5x < 99

0 < x < 20 ············ (1)

p = 6y – 1 dengan y adalah bilangan bulat.

Karena 1 < 6y – 1 < 100 maka 2 < 6y < 101

0 < y < 17 ············· (2)

1 + 5x = 6y – 1

5x = 2(3y – 1) ············ (3)

3y – 1 = 5t dan x = 2t dengan t adalah bilangan bulat

$t=\frac{3y-1}{5}$ ··············· (4)

Karena t adalah bilangan bulat, maka 5 membagi (3y – 1) sehingga (3y – 1) adalah bilangan dengan angka satuan 0 atau 5. Maka y harus suatu bilangan dengan angka satuan 2 atau 7.

Karena 0 < y < 17, maka y = 2 atau 7 atau 12.

Jika y = 2 maka p = 6(2) – 1 = 11 (bilangan pima)

Jika y = 7 maka p = 6(7) – 1 = 41 (bilangan pima)

Jika y = 12 maka p = 6(12) – 1 = 71 (bilangan pima)

∴ Maka jumlah seluruh bilangan prima = 11 + 41 + 71 = **123**

19. $a-b=\frac{1^2}{1}+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{1^2}{3}\right)+\left(\frac{3^2}{5}-\frac{2^2}{5}\right)+\left(\frac{4^2}{7}-\frac{3^2}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1001^2}{2001}-\frac{1000^2}{2001}\right)-\frac{1001^2}{2003}$

Mengingat (x^2 – y^2) = (x + y) (x – y), maka persamaan di atas menjadi :

$$a-b=1+(1)+(1)+(1)+\cdots+(1)-\frac{1001^2}{2003}$$

$$a-b=1001\cdot 1-\frac{1001^2}{2003}$$

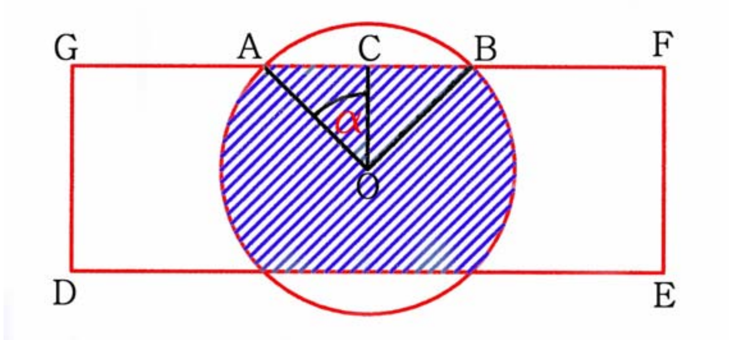
$$a - b = \frac{1001 \cdot (2003 - 1001)}{2003}$$

$$a - b = \frac{1001 \cdot 1002}{2003}$$

$$a - b \approx \frac{1002}{2} \quad \text{dengan mengingat } 2003 \approx 2 \cdot 1001$$

$\therefore$ **a – b ≈ 501**

20.



Dari soal diketahui bahwa DE = 8 dan EF = $2\sqrt{2}$

OA = OB = 2

$$OC = \frac{1}{2} \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$ Maka $\alpha = 45^o$

$\angle$AOB = 90^o

Luas juring OAB $= \frac{90^\circ}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi (2^2) = \pi$

Luas ΔOAB $= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 90^\circ = 2$

Luas tembereng AB = Luas juring OAB – Luas ΔOAB = $\pi - 2$

Luas arsir = Luas lingkaran – 2 · Luas tembereng AB

Luas arsir = π (r)^2 – 2 · (π – 2)

Luas arsir = $4\pi - 2\pi + 4$

$\therefore$ Luas arsir = **2π + 4**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2002

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan $A = (-1)^{-1}$, $B = (-1)^1$ dan $C = 1^{-1}$. Berapakah A + B + C ?

2. Jika $y = \frac{x-1}{2x+3}$, tuliskan x sebagai fungsi dari y.

3. Misalkan $S = (x - 2)^4 + 8(x - 2)^3 + 24(x - 2)^2 + 32(x - 2) + 16$. Apakah S jika dituliskan dalam sesedikit mungkin suku penjumlahan ?

4. Bilangan real 2,525252··· adalah bilangan rasional, sehingga dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dimana m, n bilangan-bilangan bulat, $n \neq 0$. Jika dipilih m dan n yang relatif prima, berapakah m + n ?

5. Misalkan M dan m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil di antara semua bilangan 4-angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari M – m ?

6. Tinjau persamaan yang berbentuk $x^2 + bx + c = 0$. Berapa banyakkah persamaan demikian yang memiliki akar-akar real jika koefisien b dan c hanya boleh dipilih dari himpunan {1,2,3,4,5,6} ?

7. Diketahui tiga bilangan k, m dan n. Pernyataan "Jika $k \geq m$, maka $k > n$" adalah tidak benar. Apakah pernyataan yang benar dalam hal ini ?

8. Sebuah saluran air seharusnya dibuat dengan menggunakan pipa berdiameter 10 cm. Akan tetapi yang tersedia hanyalah pip-pipa kecil yang berdiameter 3 cm. Supaya kapasitas saluran tidak lebih kecil daripada yang diinginkan, berapakah banyaknya pipa 3 cm yang perlu dipakai sebagai pengganti satu pipa 10 cm ?

9. Sebuah segitiga samasisi, sebuah lingkaran dan sebuah persegi memiliki keliling yang sama. Di antara ketiga bangun tersebut, manakah yang memiliki luas terbesar ?

10. Segitiga ABC memiliki panjang sisi AB = 10, BC = 7, dan CA = 12. Jika setiap sisi diperpanjang menjadi tiga kali panjang semula, maka segitiga yang terbentuk memiliki luas berapa kali luas ΔABC ?

11. Sebanyak n orang pengurus sebuah organisasi akan dibagi ke dalam empat komisi mengikuti ketentuan berikut : (i) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi, dan (ii) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama. Berapakah n ?

12. Didefinisikan $a * b = a + b + ab$ untuk semua bilangan real a,b. Jika $S = \{a \text{ bilangan real } a*(-a) > a\}$ tuliskan S sebagai sebuah selang (interval).

13. Garis tengah sebuah setengah lingkaran berimpit dengan alas AB dari ΔABC. Titik sudut C bergerak sedemikian rupa, sehingga titik tengah sisi AC selalu terletak pada setengah lingkaran. Berupa apakah lengkungan tempat kedudukan titik C ?

14. Berapakah bilangan bulat positif terbesar yang membagi semua bilangan $1^5 - 1,\ 2^5 - 2,\ \cdots,\ n^5 - n$?

15. Jika $2002 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$, dimana a_k adalah bilangan bulat, $0 \le a_k \le k$, $k = 1, 2, \cdots, n$, dan $a_n \ne 0$, tentukan pasangan terurut (n, a_n).

16. Berapakah sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100 ?

17. Empat pasang suami-isteri membeli karcis untuk 8 kursi sebaris pada suatu pertunjukan. Dua orang akan duduk bersebelahan hanya kalau keduanya pasangan suami isteri atau berjenis kelamin sama. Berapa banyakkah cara menempatkan keempat pasang suami-isteri ke 8 kursi tersebut ?

18. Ada berapa banyakkah bilangan 4-angka berbentuk $\overline{abcd}$ dengan $a \le b \le c \le d$?

19. Kita gambarkan segibanyak beraturan (reguler) R dengan 2002 titik sudut beserta semua diagonalnya. Berapakah banyaknya segitiga yang terbentuk yang semua titik sudutnya adalah titik sudut R, tetapi tidak ada sisinya yang merupakan sisi R ?

20. Suatu lomba maraton diikuti oleh empat SMU : Merak, Merpati, Pipit dan Walet. Setiap SMU mengirimkan lima pelari. Pelari yang masuk finish ke-1, 2, 3, 4, 5, 6 memperoleh nilai berturut-turut 7, 5, 4, 3, 2, 1. Nilai setiap SMU adalah jumlah nilai kelima pelarinya. SMU dengan nilai terbesar adalah juara lomba. Di akhir lomba ternyata SMU Pipit menjadi juara dan tidak ada dua pelari yang masuk finish bersamaan. Ada berapa banyakkah kemungkinan nilai SMU pemenang ?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2002

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

BAGIAN KEDUA

1. Lima buah bilangan asli berbeda, k, ℓ, m, n dan p, akan dipilih. Kelima informasi berikut ternyata cukup untuk mengurutkan kelima bilangan tersebut :
   (a) diantara setiap dua bilangan, salah satu bilangan mesti membagi bilangan yang lainnya,
   (b) m adalah bilangan yang terbesar atau yang terkecil,
   (c) p tidak boleh membagi sekaligus m dan k,
   (d) $n \le \ell - p$, dan
   (e) k membagi n atau p membagi n, tetapi tidak sekaligus kedaunya.

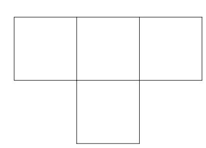
   Tentukan urutan yang mungkin bagi k, ℓ, m, n dan p

2. Tentukan semua bilangan bulat positif p sehingga $\dfrac{3p+25}{2p-5}$ juga bulat positif.

3. Diberikan sebuah bilangan 6-angka.
   Buktikan bahwa keenam angka bilangan tersebut dapat disusun ulang sedemikian rupa, sehinggga jumlah tiga angka pertama dan jumlah tiga angka terakhir berselisih tidak lebih dari 9.

4. Diberikan segitiga sama sisi ABC dan sebuah titik P sehingga jarak P ke A dan ke C tidak lebih jauh dari jarak P ke B.
   Buktikan bahwa PB = PA + PC jika dan hanya jika P terletak pada lingkaran luar ΔABC.

5. Bangun datar pada gambar disebut *tetromino-T*. Misalkan setiap petak tetromino menutupi tepat satu petak pada papan catur. Kita ingin menutup papan catur dengan tetromino-tetromino sehingga setiap petak tetromino menutup satu petak catur tanpa tumpang tindih.



tetromino-T

   (a) Tunjukkan bahwa kita dapat menutup papan catur biasa, yaitu papan catur dengan 8 X 8 petak, dengan menggunakan 16 tetromino-T.
   (b) Tunjukkan bahwa kita tidak dapat menutup papan 'catur' 10 X 10 petak dengan 25 tetromino-T.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $A + B + C = \frac{1}{(-1)^1} + (-1)^1 + \frac{1}{(1)^1} = -1 - 1 + 1$

   $\therefore\ A + B + C = -1$

2. $y = \frac{x - 1}{2x + 3}$

   2yx + 3y = x – 1

   x – 2yx = 3y + 1

   x (1 – 2y) = 3y + 1

   $\therefore\ x = \frac{3y + 1}{1 - 2y}$

3. $(a + b)^4 = a^0b^4 + 4a^1b^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + a^4b^0$

   $S = 2^0 \cdot (x - 2)^4 + 4 \cdot 2^1 \cdot (x - 2)^3 + 6 \cdot 2^2 \cdot (x - 2)^2 + 4 \cdot 2^3 \cdot (x - 2)^1 + 2^4 \cdot (x - 2)^0$

   Mengingat teori di atas, maka : $S = (2 + (x - 2))^4$

   $\therefore$ S = $\mathbf{x^4}$

4. Misal X = 2,525252··· maka 100X = 252,525252···

   100X – X = 252,525252··· – 2,525252···

   99X = 250

   $X = \frac{250}{99}$

   Karena 250 dan 99 relatif prima, maka m = 250 dan n = 99

   $\therefore$ m + n = 250 + 99 = **349**

5. Misal bilangan itu adalah : abcd

   Agar abcd sebesar-besarnya maka a harus sebesar-besarnya. Maka a = 9.

   Karena a = 9, agar a + b + c + d = 9, maka b = 0 ; c = 0; d = 0. Maka M = 9000

   Agar abcd sekecil-kecilnya maka a harus sekecil-kecilnya dan karena a $\neq$ 0, maka a = 1.

   b juga harus sekecil-kecilnya, maka b = 0.

   c juga harus sekecil-kecilnya, maka c = 0.

   Karena a + b + c + d = 9, maka d = 8. Akibatnya m = 1008

   M – m = 9000 – 1008 = 7992 = 8 · 999 = 8 · 27 · 37

   M – m = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 37$

   $\therefore$ Maka faktor prima tebesar dari M – m adalah **37**

6. Agar akar-akar persamaan tersebut real maka Diskriminan = $b^2 - 4\cdot(1)\cdot c \geq 0$. Maka $4c \leq b^2$
   Karena $1 \leq c \leq 6$, maka $4 \leq 4c \leq 24$
   Untuk b = 1 maka $4c \leq 1$. Akibatnya tidak ada nilai c yang memenuhi
   Untuk b = 2 maka $4c \leq 4$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada satu, yaitu c = 1
   Untuk b = 3 maka $4c \leq 9$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada dua, yaitu c = 1 ; 2
   Untuk b = 4 maka $4c \leq 16$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada empat, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4
   Untuk b = 5 maka $4c \leq 25$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada enam, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4; 5; 6
   Untuk b = 6 maka $4c \leq 36$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada enam, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4; 5; 6
   ∴ Maka banyaknya pasangan yang memenuhi ada : 0 + 1 + 2 + 4 + 6 + 6 = **19**

7. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$
   $\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$
   $p : k \geq m$ $\quad$ $q : k > n$
   Karena $q : k > n$, maka ingkaran dari q adalah $\sim q \equiv k \leq n$
   ∴ Pernyataan yang benar adalah : **$k \geq m$ dan $k \leq n$.** Penulisan lain adalah **$m \leq k \leq n$.**

8. Kapasitas pipa tergantung dari luas penampangnya.
   $L_{pakai} \geq L_{seharusnya}$
   $n \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi\,(3)^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (10)^2$
   $9n \geq 100$
   $n \geq 11{,}111\cdots$
   ∴ n_{min} = **12**

9. Misal masing-masing keliling bangun = K
   Untuk segitiga jelas 3s = K. Karena s = K/3 maka Luas = ½ $s^2 \sin 60^o = \frac{1}{36}\sqrt{3}K^2$
   Untuk lingkaran, $2\pi R = K$. Karena $R = \frac{K}{2\pi}$ maka Luas = $\pi R^2 = \frac{K^2}{4\pi}$
   Untuk persegi, 4s = K. Karena $s = \frac{K}{4}$ maka Luas = $s^2 = \frac{K^2}{16}$
   Karena $\pi = 3{,}142\cdots < 4$ dan $\sqrt{3} < 2$, maka
   $\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16} > \frac{1}{18} = \frac{2}{36} > \frac{\sqrt{3}}{36}$
   ∴ Karena $\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16} > \frac{\sqrt{3}}{36}$, maka bangun yang memiliki luas terbesar adalah : **lingkaran**

10. Luas segitiga semula = ½ ab sin C
    Luas segitiga akhir = ½ (3a)(3b)sin C = 9 · ½ ab sin C
    Luas segitiga akhir = 9 · Luas segitiga semula
    ∴ Perbandingan luas segitiga akhir dengan luas segitiga semula adalah = **9**

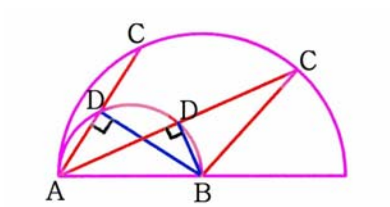
11. (a) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi
    (b) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama
    Karena ada 4 komisi maka banyaknya pasangan komisi yang bisa dibuat adalah ${}_4C_2 = 6$.
    Karena banyaknya pasangan komisi ada 6 maka banyaknya anggota minimal adalah 6 sebab jika kurang dari 6 maka akan ada seorang anggota yang tergabung dalam lebih dari 2 komisi.
    Jika terdapat lebih dari 6 anggota maka akan ada seorang anggota yang masuk dalam sebuah komisi tetapi tidak masuk ke dalam tiga komisi lain. Hal ini bertentangan dengan (a) bahwa seorang anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi. Akibatnya banyaknya anggota ada 6 orang.
    Contoh pembagian keenam anggota ke dalam empat komisi yang memenuhi (a) dan (b) adalah :
    Misalkan komisi tersebut adalah A, B, C, D dengan a_i menyatakan anggota ke-i dengan $1 \le i \le 6$.

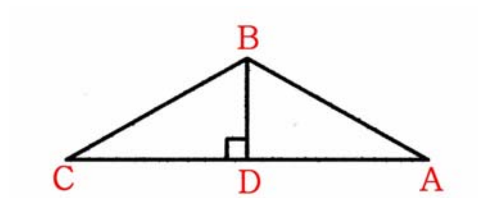
Komisi A	Komisi B	Komisi C	Komisi D
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_4	a_4	a_5
a_3	a_5	a_6	a_6

$\therefore$ Jadi, banyaknya pengurus agar memenuhi syarat tersebut adalah **6**

12. $a * (-a) = a + (-a) + a \cdot (-a) = -a^2$
    $S = \{$ a bilangan real $\mid -a^2 > a \} = \{$ a bilangan real $\mid a(a + 1) < 0 \}$
    $\therefore$ **S = { a bilangan real | $-1 < a < 0$ }**

13.





AB adalah diameter dan D terletak pada lingkaran. Maka $\angle ADB = 90^o$
Karena AD = CD dan $BD \perp AC$ maka ΔABC adalah segitiga sama kaki dengan AB = BC.
Karena BC = AB = diameter lingkaran yang berarti bernilai tetap dan B adalah titik yang tetap maka lengkung yang terjadi adalah berupa setengah lingkaran dengan pusat titik B.
$\therefore$ Lengkung yang terjadi adalah berupa **setengah lingkaran**

14. $1^5 - 1 = 0$; $2^5 - 2 = 30$. Untuk $n > 2$ maka $n^5 - n > 30$.
    Semua bilangan membagi 0. Karena salah satu bilangan tersebut adalah 30 maka nilai maksimum bilangan yang membagi $1^5 - 1$, $2^5 - 2$, $\cdots$, $n^5 - n$ adalah 30. Akan dibuktikan bahwa 30 membagi $n^5 - n$ untuk setiap n bilangan asli.
    Alternatif 1 :
    Misal : $N = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)\,n\,(n + 1)(n^2 + 1)$
    Karena $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah tiga bilangan berurutan maka N pasti habis dibagi 3! = 6.

- Untuk $n = 5k$
  Karena n adalah faktor dari N dan n habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk $n = 5k + 1$
  $n - 1 = 5k$
  Karena $(n - 1)$ adalah faktor dari N dan $(n - 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk $n = 5k + 2$

$n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$
Karena $(n^2 + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n^2 + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5

- Untuk n = 5k + 3
  $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$
  Karena $(n^2 + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n^2 + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk n = 5k + 4
  n + 1 = 5k + 5 = 5 (k + 1)
  Karena (n + 1) adalah faktor dari N dan (n + 1) habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5

Karena untuk n = 5k ; n = 5k + 1 ; n = 5k + 2 ; n = 5k + 3 dan n = 5k + 4 semuanya menghasilkan N habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.
Karena N habis dibagi 6 dan 5 serta 6 dan 5 relatif prima maka N pasti habis dibagi 6·5 = 30

Alternatif 2 :
$n^5 - n = (n - 1)\, n\, (n + 1)\, (n^2 + 1) = (n - 1)\, n\, (n + 1)\, (n^2 - 4 + 5)$
$n^5 - n = (n - 1)\, n\, (n + 1)\, (n^2 - 4) + 5\, (n - 1)\, n\, (n + 1)$
$n^5 - n = (n - 2)\, (n - 1)\, n\, (n + 1)\, (n + 2) + 5\, (n - 1)\, n\, (n + 1)$
Karena (n − 2), (n − 1) , n, (n + 1) dan (n + 2) adalah lima bilangan bulat berurutan maka perkalian (n − 2) (n − 1) n (n + 1) (n + 2) habis dibagi 5! = 120 atau juga habis dibagi 30 sebab 30 membagi 120.
Karena (n − 1) , n dan (n + 1) adalah 3 bilangan berurutan maka (n − 1) n (n + 1) pasti habis dibagi 3! = 6. Maka 5 (n − 1) n (n + 1) habis dibagi 5 · 6 = 30.
∴ Bilangan nilai maksimum bilangan yang membagi $1^5 - 1$, $2^5 - 2$, ⋯ , $n^5 - n$ adalah **30.**

15. Misal $T = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$
Karena 7! = 5040 dan 6! = 720 maka $n_{maksimum} = 6$.
Jika n = 5 maka $T_{maks} = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + 5 \cdot 5! = 1 + 4 + 18 + 96 + 600 = 719 < 2002$
T = 2002 hanya jika n = 6
Karena untuk n = 5 makaT_{maks} = 719 maka $2002 - 719 = 1283 \le a_6 \cdot 6! \le 2002$ yang dipenuhi hanya jika $a_6 = 2$

Maka $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + a_4 \cdot 4! + a_5 \cdot 5! = 2002 - 2 \cdot 6! = 562$
Jika n = 4 maka $T_{maks} = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$
$562 - 119 = 443 \le a_5 \cdot 5! \le 562$ yang dipenuhi hanya jika $a_5 = 4$

Maka $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + a_4 \cdot 4! = 562 - 4 \cdot 5! = 562 - 480 = 82$
Jika n = 3 maka $T_{maks} = 1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$
$82 - 23 = 59 \le a_4 \cdot 4! \le 82$ yang dipenuhi hanya jika $a_4 = 3$

Maka $a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! = 82 - 3 \cdot 4! = 82 - 72 = 10$
Jika n = 2 maka $T_{maks} = 1 + 2 \cdot 2! = 9$
$10 - 9 = 1 \le a_3 \cdot 3! \le 10$ yang dipenuhi hanya jika $a_3 = 1$

Maka $a_1 + a_2 \cdot 2! = 10 - 1 \cdot 3! = 10 - 6 = 4$
Jika n = 1 maka $T_{maks} = 1 = 1$
$4 - 1 = 3 \le a_2 \cdot 2! \le 4$ yang dipenuhi hanya jika $a_2 = 2$

Maka $a_1 = 4 - 2 \cdot 2! = 4 - 4 = 0$
∴ Pasangan terurut (n, a_n) adalah **{ (1,0) ; (2,2) ; (3,1) ; (4,3) ; (5,4) ; (6,2) }**

16. Alternatif 1 :

Dua digit terakhir dari 43^1 adalah 43

Dua digit terakhir dari 43^2 adalah 49

Dua digit terakhir dari 43^3 adalah 07

Dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01

Dua digit terakhir dari 43^5 adalah 43 ⋯⋯ dst.

Karena $43 = 4 \cdot 10 + 3$ maka 2 digit terakhir dari 43^{43} sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07. Sehingga 43^{43} = ⋯⋯07 = 100t + 7 = 4k + 7 dengan t dan k adalah bilangan bulat.

$$43^{43^{43}} = 43^{4k+7} = 43^{4k} \cdot 43^7 = \left(43^4\right)^k \cdot 43^7$$

Karena dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01 maka dua digit terakhir dari $(43^4)^k$ adalah juga 01. Dua digit terakhir dari 43^7 sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07.

Maka dua digit terakhir dari $43^{43^{43}}$ sama dengan dua digit terakhir dari perkalian dua digit terakhir $(43^4)^k$ dengan dua digit terakhir dari 43^7.

Karena 01 x 07 = 07. Maka 2 digit terakhir dari $43^{43^{43}}$ adalah 07.

Alternatif 2 :

Karena $43^{43} = (4 \cdot 11 - 1)^{43}$ maka $43^{43} \equiv (-1)^{43} \pmod 4$

$43^{43} \equiv -1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$

Berarti $43^{43} = 4k + 3$ dengan k adalah bilangan asli.

$43^{43^{43}} = 43^{4k+3} = (1849)^{2k} \cdot 43^3$

$43^{43^{43}} \equiv (49)^{2k} \cdot 43^{43} \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv (2401)^k \cdot 7 \pmod{100}$ sebab $43^{43} \equiv 7 \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv 1^k \cdot 7 \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv 7 \pmod{100}$

Karena $43^{43^{43}} \equiv 7 \pmod{100}$ berarti $43^{43^{43}} = 100p + 7$ dengan p adalah bilangan asli.

$\therefore$ $43^{43^{43}}$ jika dibagi 100 akan bersisa **7**

17. Misal S = suami dan I = isteri

Kemungkinan susunannya adalah :

a. SIISSIIS atau ISSIISSI

Karena yang berdekatan haruslah pasangan suami isteri maka kasus ini seolah-olah menempatkan 4 pasangan suami isteri dalam 4 tempat. Banyaknya cara = $2 \cdot {}_4P_4$ = 48.

b. SIISSSII atau ISSIIISS

Karena ada 3 pasang kursi yang harus diisi 3 pasang suami isteri maka banyaknya cara menyusun = $2 \cdot {}_4C_3 \cdot 3!$ = 48

c. SSIISSII atau IISSIISS

Kasus ini sama dengan (a). Banyaknya cara adalah 48.

d. SIIISSSI atau ISSSIIIS

Karena ada 3 pasang kursi yang harus diisi 3 pasang suami isteri maka banyaknya cara adalah $2 \cdot 4 \cdot 3!$ = 48

e. SSIIISSI atau IISSSIIS

Kasus ini sama dengan (c). Banyaknya cara ada 48 cara.

f. SIIIISSS atau ISSSSIII

Ada 2 pasang kursi yang harus diisi oleh 2 pasang suami isteri. Banyaknya cara = ${}_4C_2 \cdot 2!$. Empat kursi lain terdiri dari 2 kursi diisi oleh 2 perempuan dan 2 kursi lainnya diisi 2 lelaki.

Maka banyaknya cara = $2 \cdot ({}_4C_2 \cdot 2!) \cdot 2! \cdot 2! = 96$

g. SSIIIISS atau IISSSSII
Soal ini mirip dengan bagian (f). Banyaknya cara ada 96.

h. SSSIIIIS atau IIISSSSI
Soal ini juga mirip dengan bagian (f). Banyaknya cara ada 96.

i. SSSSIIII atau IIIISSSS
Pasangan yang di tengah dipilih dari 4 pasangan yang lain.
Maka banyaknya cara = $2 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 3! = 288$

Maka banyaknya cara = 48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 96 + 96 + 96 + 288 = 816 cara

∴ Jadi, banyaknya cara menempatkan keempat pasang suami isteri ke-8 kursi adalah **816.**

18. a. Untuk a = 1

- Untuk a = 1 dan b = 1.
  Untuk c = 1 maka nilai d ada 9 kemungkinan. Untuk c = 2 ada 8 kemungkinan. ···· dst.
  Maka untuk a = 1 dan b = 1 ada 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 kemungkinan.
- Untuk a = 1 dan b = 2
  Sama dengan untuk a = 1 dan b = 1 dikurangi dengan untuk c = 1.
  Maka untuk a = a dan b = 2 ada 45 − 9 = 36 kemungkinan.
- Untuk a = 1 dan b = 3
  Ada 36 − 8 = 28 kemungkinan

⋮

dst

Untuk a = 1 ada 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1

b. Untuk a = 2
Sama dengan untuk a = 1 dikurangi untuk b = 1
Untuk a = 2 ada 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1

⋮

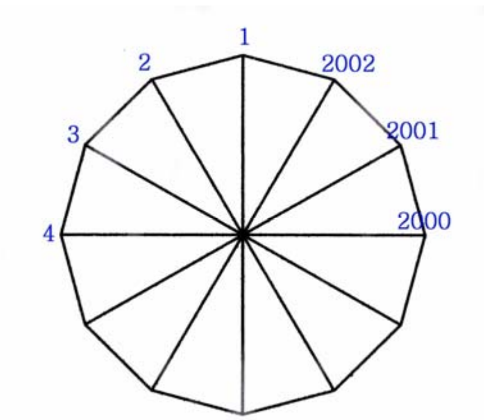
dst

Misalkan banyaknya bilangan = N.

N = $1 \cdot 45 + 2 \cdot 36 + 3 \cdot 28 + 4 \cdot 21 + 5 \cdot 15 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 495$

∴ Banyaknya bilangan yang memenuhi $a \le b \le c \le d$ adalah **495**

19.



Misal :
A = Banyaknya segitiga seluruhnya yang dapat dibentuk termasuk yang sisinya merupakan sisi R.
B = Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan hanya 1 sisinya yang merupakan sisi R.
C = Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan 2 sisinya merupakan sisi R.

- Banyaknya segitiga seluruhnya yang dapat dibentuk termasuk yang sisinya merupakan sisi R
  Segitiga dibentuk dari 3 titik yang tidak segaris, maka banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah ${}_{2002}C_3 = \frac{2002 \cdot 2001 \cdot 2000}{6}$ = 2002 · 667· 1000
- Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan hanya 1 sisinya yang merupakan sisi R.
  Untuk membentuk segitiga ini maka 2 dari 3 titiknya harus berurutan, namun ketiga titiknya tidak berurutan. Misal kedua titik tersebut adalah n dan n+1, maka titik ketiga tidak boleh n−1 atau n+2. Banyaknya 2 titik yang berurutan ada 2002 kemungkinan, yaitu 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, ···, 2001-2002, 2002-1. Misalkan titik yang kita pilih adalah 2-3, maka titik ketiga tidak boleh titik 1 atau 4, maka banyaknya kemungkinan 1 titik ketiga adalah 1998 cara.
  Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah 1998 x 2002
- Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan 2 sisinya merupakan sisi R
  Untuk membentuk segitiga ini maka ke-3 titiknya harus berurutan. Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah 2002, yaitu 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, ···, 2001-2002-1, 2002-1-2.

Banyaknya segitiga dimaksud adalah = A − B − C
= 2002 · 667 · 1000 − 1998 · 2002 − 2002
= 2002 (667 · 1000 − 1999)
= 1331332002

∴ Banyaknya segitiga yang semua titik sudutnya adalah titik sudut R, tetapi tidak ada sisinya yang merupakan sisi R adalah **1.331.332.002**

20. Nilai total = 7 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 22
Nilai maksimum yang dapat diperoleh SMU Pipit adalah 7 + 5 + 4 + 3 + 2 = 21
Misal nilai minimum SMU Pipit adalah x maka nilai sisa adalah 22 − x.
Nilai minimum yang dapat diperoleh adalah jika nilai sisa yang ada terdistribusi merata kepada ketiga
SMU yang lain. Misal nilai masing-masing ketiga SMU yang lain adalah k, maka :
x + 3k = 22 dan x > k
3x > 22 − x. Maka x > 22/4.
Jika x = 6 maka nilai sisa = 22 − 6 = 16. Ada 2 SMU mendapat nilai 5 dan satu SMU mendapat nilai 6. Hal yang tidak boleh karena berarti tidak ada pemenang.
Jika x = 7 maka nilai sisa = 22 − 7 = 15. Yang berarti ketiga SMU yang lain masing-masing mendapat nilai 5.
Nilai 5 dapat diperoleh dari 5 ; 3 + 2 dan 4 + 1 yang berarti memenuhi syarat.
Maka nilai maksimum SMU Pipit = 21 sedangkan nilai minimunmnya = 7. Semua nilai dari 7 sampai 21 semua dapat diperoleh dari kombinasi : 7, 5, 4, 3, 2, 1. Nilai dari 7 sampai dengan 21 ada 15.
∴ Banyaknya kemungkinan nilai SMU pemenang adalah **15**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2002

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1.
- Jika m adalah bilangan yang terbesar
  Berdasarkan (c) dan (a), maka p membagi m sedangkan k membagi p sehingga m > p > k
  Berdasarkan (d), $\ell \geq$ n + p, maka ℓ > n dan ℓ > p sehingga m > ℓ > p > k
  Berdasarkan (e) :
  - Jika k membagi n maka n membagi p sehingga p > n > k. Urutan yang mungkin adalah m > ℓ > p > n > k
  - Jika p membagi n maka n membagi k sehingga k > n > p. Karena p > k maka hal ini merupakan sebuah kontradiksi.
- Jika m adalah bilangan terkecil
  Berdasarkan (c) dan (a), maka m membagi p dan p membagi k sehingga k > p > m
  Berdasarkan (e) :
  - Jika k membagi n maka n membagi p sehingga p > n > k. Karena k > p maka hal ini merupakan sebuah kontradiksi.
  - Jika p membagi n maka n membagi k sehingga k > n > p. Akibatnya k > n > p > m.

  Berdasarkan (d) :
  - Karena n = ℓ − p maka ℓ = n + p dan karena p < n maka n < ℓ < 2n. Karena n harus membagi ℓ maka hal tersebut tidak mungkin.
  - Karena n < ℓ − p maka ℓ > p+ n. Sehingga tidak dapat ditentukan yang lebih besar antara ℓ dan k, maka urutan yang mungkin adalah : k > ℓ > n > p > m atau ℓ > k > n > p > m.

∴ Semua urutan yang mungkin bagi k, ℓ, m, n dan p adalah :

1. m > ℓ > p > n > k atau
2. k > ℓ > n > p > m atau
3. ℓ > k > n > p > m

2. Alternatif 1 :

Misal $m = \frac{3p+25}{2p-5} = \frac{2p-5+p+30}{2p-5} = 1 + \frac{p+30}{2p-5}$ .... (1)

Ambil p + 30 = 2p − 5 maka p = 35.

- Untuk p > 35, maka p + 30 < 2p − 5 sehingga $\frac{p+30}{2p-5} < 1$ sehingga tidak mungkin m bilangan bulat.
- Untuk 0 < p < 35
  Semakin besar nilai p, maka perbandingan p + 30 dan 2p − 5 akan semakin kecil sehingga nilai m semakin kecil mendekati satu.

Karena m > 0 maka 2p − 5 > 0. Akibatnya p ≥ 3

Bentuk di atas dapat juga diubah menjadi :

2pm − 5m = 3p + 25
p(2m−3) = 5m + 25

$p = \frac{5m+25}{2m-3}$ .... (2)

dengan 2m − 3 > 0 atau m > 1.

Berdasarkan persamaan (1)

Jika p = 3 maka m = 1 + 33/1 = 34 (bilangan bulat)
Jika p = 4 maka m = 37/3 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 5 maka m = 40/5 = 8 (bilangan bulat)
Jika p = 6 maka m = 43/7 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 7 maka m = 36/9 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 8 maka m = 49/11 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 9 maka m = 52/13 = 4 (bilangan bulat)

Karena semakin besar nilai p maka nilai m semakin kecil, maka sesuai persamaan (1) dicoba :

Jika m = 3 maka p = 40/3 (bukan bilangan bulat)
Jika m = 2 maka p = 35 (bilangan bulat)

Alternatif 2 :

Karena $m = \frac{3p+25}{2p-5}$ maka 2mp − 5m = 3p + 25.

4mp − 10m = 6p + 50

(2m − 3)(2p − 5) = 50 + 15

(2m − 3)(2p − 5) = 65

2m − 3 dan 2p − 5 masing-masing adalah faktor dari 65. Faktor dari 65 adalah ±1, ±5, ±13, ±65.

Jika 2p − 5 = −1 dan 2m − 3 = −65 maka p = 2 dan m = −31 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 1 dan 2m − 3 = 65 maka p = 3 dan m = 34 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −5 dan 2m − 3 = −13 maka p = 0 dan m = −5 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 5 dan 2m − 3 = 13 maka p = 5 dan m = 8 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −13 dan 2m − 3 = −5 maka p = −4 dan m = −1 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 13 dan 2m − 3 = 5 maka p = 9 dan m = 4 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −65 dan 2m − 3 = −1 maka p = −30 dan m = 1 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 65 dan 2m − 3 = 1 maka p = 35 dan m = 2 (memenuhi p dan m asli)

∴ Bilangan bulat positif p sehingga $\frac{3p+25}{2p-5}$ juga bulat positif adalah **3 ; 5 ; 9 atau 35**

3. Misal ke-6 angka itu A, B, C, D, E, F dengan A ≥ B ≥ C ≥ D ≥ E ≥ F dengan 0 ≤ A, B, C, D, E, F ≤ 9. Penyusunan bilangan yang benar sehingga didapat selisih tiga bilangan pertama dengan tiga bilangan terakhir seminimal mungkin adalah ACEBDF.

Misal T = A + C + E − B − D − F

T = (A − F) + (C − B) + (E − D)

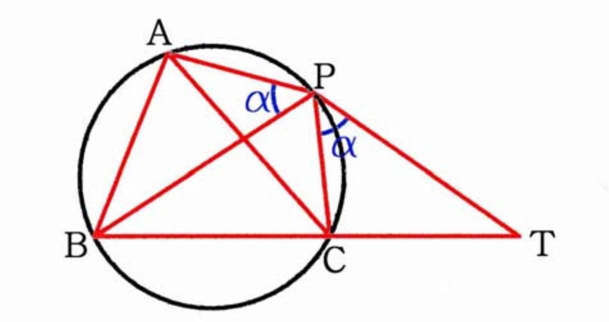
Jelas bahwa A − F ≤ 9. Tanda kesamaan akan terpenuhi hanya apabila A = 9 dan F = 0.

Karena C ≤ B dan E ≤ D maka C − B ≤ 0 dan E − D ≤ 0. Tanda kesamaan terjadi hanya jika C = B dan E = D.

Maka T = (A − F) + (C − B) + (E − D) ≤ 9 + 0 + 0 = 9

∴ **Terbukti bahwa jumlah tiga angka pertama dan jumlah tiga angka terakhir suatu bilangan enam angka dapat disusun sedemikian rupa sehingga berselisih tidak lebih dari 9**

4. Pembuktian *Teorema Ptolemy*



ABCP adalah segiempat talibusur atau dengan kata lain titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC dengan titik P terletak pada busur AC. Misal $\angle APB = \alpha$. Dibuat segitiga PCT dengan CT adalah perpanjangan BC dan $\angle CPT = \alpha$. Karena ABCP adalah segi empat tali busur maka $\angle BAP + \angle BCP = 180^o$ sehingga $\angle BAP = \angle PCT$. Karena $\angle APB = \angle CPT$ dan $\angle BAP = \angle PCT$ maka ΔBAP sebangun dengan ΔPCT.

Akibatnya $\frac{PA}{PC} = \frac{AB}{CT} = \frac{PB}{PT}$ ········ (1)

$CT = \frac{AB}{PA} \cdot PC$ ············ (2)

Dari persamaan (1) juga didapat : $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{CT}$.

Karena $\angle APC = \angle BPT = \alpha + \angle BPC$ dan $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PT}$ maka ΔAPC sebangun dengan ΔBPT

Akibatnya $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PT} = \frac{AC}{BT}$ ······· (3)

$BT = \frac{PB}{PA} \cdot AC$ ············(4)

BT = BC + CT

Subtitusikan pers. (2) dan (4)

$$\frac{PB}{PA} \cdot AC = BC + \frac{AB}{PA} \cdot PC$$

PB · AC = PA · BC + PC · AB (*Teorema Ptolemy*)

Jika ΔABC adalah segitiga sama sisi, maka AC = BC = AB, maka :

PB = PA + PC (Terbukti)

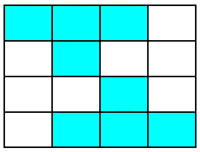
atau

Jika PB = PA + PC dan karena AB = BC = AC, maka

PB · AC = PA · BC + PC · AB

$\therefore$ Sesuai dengan *Teorema Ptolemy*, maka ABCP adalah segi empat tali busur atau dengan kata lain **titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.**

5. a.



Karena petak 4 x 4 dapat ditutupi oleh 4 buah *Tetromino-T*, maka tentunya **kita dapat menutup petak catur 8 x 8 dengan 16 buah *Tetromino-T*.**

b. Andaikan 25 tetronimo tersebut dapat menutup papan ‘catur’ 10 x 10 petak.
Sebuah *tetromino-T* akan menutupi 1 buah petak hitam dan 3 buah petak putih atau 1 buah petak putih dan 3 buah petak hitam pada papan catur.

Karena 1 dan 3 bilangan ganjil serta banyaknya *Tetromino-T* ada 25 yang juga merupakan bilangan ganjil maka ke-25 *Tetromino-T* tersebut akan menutupi sejumlah ganjil petak hitam dan sejumlah ganjil petak putih pada papan catur. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa pada papan catur 10 x 10 terdapat 50 petak hitam dan 50 petak putih.
Terbukti bahwa kita tidak dapat menutup papan ‘catur’ 10 X 10 petak dengan 25 *tetromino-T*.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2002

YOGYAKARTA, 10 SEPTEMBER 2002

Bidang Matematika

Waktu : 4 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2002

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2002
YOGYAKARTA, 10 SEPTEMBER 2002

BIDANG : MATEMATIKA

WAKTU : 4 JAM

1. Buktikan bahwa $n^4 - n^2$ habis dibagi oleh 12 untuk sebarang bilangan bulat $n > 1$

2. Lima buah dadu (enam-muka) akan dilempar satu demi satu, lalu hasil kelima angka yang muncul akan dihitung. Manakah yang lebih besar peluang terjadinya hasil kali 180 atau hasil kali 144 ?

3. Tentukan semua solusi dari sistem persamaan
$$x + y + z = 6$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 12$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 24$$

4. Diberikan segitiga ABC dengan AC > BC. Pada lingkaran luar segitiga ABC terletak titik D yang merupakan titik tengah busur AB yang memuat titik C. Misalkan E adalah titik pada AC sehingga DE tegak lurus pada AC.
Buktikan bahwa AE = EC + CB

5. Sembilan dari sepuluh bilangan berikut : 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 16, 18, 19 akan diisikan ke dalam petakkosong pada tabel 3 x 5 di samping. Sesudah semua petak terisi, jumlah bilangan pada setiap baris akan sama. Demikian pula halnya jumlah bilangan pada setiap kolom akan sama. Tentukan semua pengisian petak yang mungkin.

10		
		9
	3	
11		17
	20	

6. Tentukan semua bilangan prima p yang membuat $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ keduanya bilangan prima.

7. Misalkan ABCD sebuah belah ketupat dengan $\angle A = 60^o$ dan P adalah titik potong kedua diagonal AC dan BD. Misalkan Q, R dan S tiga titik pada (keliling) belah ketupat. Jika PQRS juga membentuk belah ketupat, tunjukkan bahwa tepat satu di antara Q, R, S berimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2003

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2002

YOGYAKARTA, 10 SEPTEMBER 2002

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Alternatif 1 :
   $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n - 1)(n + 1)$
   $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah 3 bilangan bulat berurutan maka 3! = 6 membagi $(n - 1)n(n + 1)$.
   Maka $3 \mid n^4 - n^2$.
   Jika n genap maka $4 \mid n^2$ sedangkan jika n ganjil maka $4 \mid n^2 - 1$. Maka $4 \mid n^2(n^2 - 1) = n^4 - n^2$
   Karena 3 dan 4 relatif prima maka $n^4 - n^2$ habis dibagi $3 \cdot 4 = 12$.
   Alternatif 2 :
   $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2 - 2)$
   $n^4 - n^2 = (n - 1)n(n + 1)(n + 2) - 2(n - 1)n(n + 1)$
   $n - 1$, n, $n + 1$ dan $n + 2$ adalah 4 bilangan bulat berurutan maka $4! = 24 \mid (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$.
   $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah 3 bilangan bulat berurutan maka 3! = 6 membagi $(n - 1)n(n + 1)$.
   Maka $12 \mid 2(n - 1)n(n + 1)$.
   Maka $12 \mid n^4 - n^2$
   $\therefore$ **Terbukti bahwa $n^4 - n$ habis dibagi 12 untuk sebarang bilangan bulat n > 1.**

2. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
   Maka kemungkinan lima mata dadu yang memenuhi perkaliannya = 180 adalah (1, 3, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 5, 6), (1, 1, 5, 6, 6), (2, 2, 3, 3, 5) dan permutasinya yang secara berurutan banyaknya kemungkinan tersebut adalah $\frac{5!}{2!}$, $5!$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$
   Peluang hasil kali mata dadu sama dengan 180 adalah = $\frac{1}{6^5}\left(\frac{5!}{2!} + 5! + 2\cdot\frac{5!}{2!\cdot 2!}\right) = \frac{240}{6^5}$
   $144 = 2^4 \cdot 3^2$
   Maka kemungkinan lima mata dadu yang memenuhi perkaliannya = 144 adalah (1, 1, 4, 6, 6), (1, 2, 2, 6, 6), (1, 2, 3, 4, 6), (1, 3, 3, 4, 4), (2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 2, 3, 6) dan permutasinya yang secara berurutan banyaknya kemungkinan tersebut adalah $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $5!$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$, $\frac{5!}{3!}$.
   Peluang hasil kali mata dadu sama dengan 144 adalah = $\frac{1}{6^5}\left(4\cdot\frac{5!}{2!\cdot 2!} + 5! + \frac{5!}{3!}\right) = \frac{260}{6^5}$
   $\therefore$ **Maka peluang yang lebih besar adalah terjadinya hasil kali 144.**

3. Alternatif 1 :
   $x + y + z = 6$ .... (1)
   $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ .... (2)
   $x^3 + y^3 + z^3 = 24$ .... (3)
   $(x + y + z)^2 = 6^2$
   $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 36$
   $xy + xz + yz = 12$ .... (4)
   Alternatif 1.a :
   $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 6 \cdot 12 = 72$
   $x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z = 72$
   $xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z = 48$ .... (5)

$(x + y + z)(xy + xz + yz) = 6 \cdot 12 = 72$
$xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z + 3xyz = 72$. Maka $48 + 3xyz = 72$
$xyz = 8$ .... (6)
Dari persamaan (1), (4) dan (6) dapat disimpulkan bahwa x, y dan z adalah akar-akar persamaan $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$ sehingga $(t - 2)^3 = 0$
Maka x = y = z = 2
∴ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 1.b :

Dengan AM-GM
$x^2 + y^2 \geq 2xy$
$x^2 + z^2 \geq 2xz$
$y^2 + z^2 \geq 2yz$
Tanda kesamaan terjadi jika dan hanya jika x = y = z
Maka
$12 = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz = 12$ .... (7)
Berdasarkan persamaan (2) dan (4) maka x = y = z
Karena x + y + z = 6 maka x = y = z = 2.
Setelah dicek ternyata x = y = z = 2 memenuhi ketiga persamaan.
∴ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 2 :

Dari persamaan (1) dan (2) didapat

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \frac{x+y+z}{3} \quad \text{.................................} \quad (8)$$

Berdasarkan ketaksamaan QM-AM maka

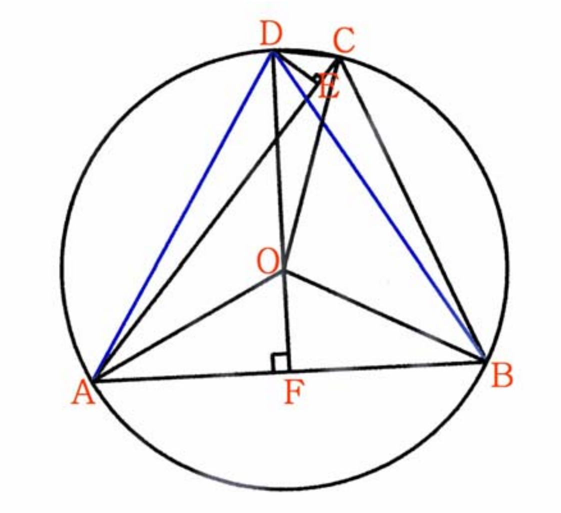
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3} \quad \text{..........................} \quad (9)$$

Tanda kesamaan terjadi jika dan hanya jika x = y = z.
Berdasarkan persamaan (8) dan (9) dapat disimpulkan bahwa x = y = z = 2.
Setelah dicek ternyata x = y = z = 2 memenuhi ketiga persamaan.
∴ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 3 :

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12 - 4(x + y + z)$
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 12 + 12 - 4(6) = 0$
Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka kesamaan terjadi hanya jika x = y = z = 2.
Setelah dicek ternyata x = y = z = 2 memenuhi ketiga persamaan.
∴ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

4.



Misalkan $\angle ACB = \gamma$

Karena ΔABD dan ΔABC memiliki alas yang sama dan titik A, B, C dan D semuanya terletak pada satu lingkaran yang sama maka $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$.

Titik F adalah pertengahan AB dengan DF tegak lurus AB. Maka AD = BD.

Karena DF tegak lurus AB dan F pertengahan maka $\angle ADF = \angle FDB = ½\gamma$.

Karena O pusat lingkaran maka $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma$ serta $\angle AOB = \angle FOB = \gamma$

$AD = BD = \dfrac{AB}{2\sin\frac{1}{2}\gamma}$ .... (1)

ABCD adalah segiempat talibusur, maka sesuai teorema *Ptolemy* berlaku :

$AC \cdot BD = DC \cdot AB + AD \cdot BC$

Karena AD = BD maka

$DC = \dfrac{(AC - BC)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma}$ .... (2)

Karena DE tegak lurus AC maka pada ΔADE berlaku $AD^2 = DE^2 + AE^2$ .... (3)

Pada ΔDEC berlaku $DC^2 = DE^2 + EC^2$ .... (4)

Dari persamaan (3) dan (4) didapat :

$AD^2 - DC^2 = AE^2 - EC^2$

Mengingat AE = AC − EC maka :

$AD^2 - DC^2 = AC^2 - 2\, AC \cdot EC$

$$\frac{(AB)^2 - (AC - BC)^2}{4\sin^2\frac{1}{2}\gamma} = AC^2 - 2AC \cdot EC$$

Mengingat bahwa $2\sin^2 ½\gamma = 1 - \cos\gamma$ dan $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\, AC\, BC \cos\gamma$ maka :

$$\frac{AC \cdot BC \cdot (2 - 2\cos\gamma)}{2 - 2\cos\gamma} = AC^2 - 2AC \cdot EC$$

BC = AC − 2EC

Karena AC = AE + EC maka AE = EC + CB (terbukti)

$\therefore$ **Terbukti bahwa AE = EC + CB.**

5. Karena jumlah pada setiap barisan sama dan jumlah pada setiap kolom sama maka jumlah ke-15 bilangan tersebut akan habis dibagi 3 dan 5 yang berarti jumlah ke-15 bilangan tersebut habis dibagi 15.
Jumlah ke-16 bilangan = 3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+16+17+18+19+20 = 178
Karena 178 $\equiv$ 13 (mod 15) maka bilangan yang harus dibuang adalah 13.

10	A	B
C	D	9
E	3	F
11	G	17
H	20	J

Karena jumlah bilangan = 165 maka jumlah masing-masing baris = 165 : 5 = 33 dan jumlah pada masing-masing kolom = 165 : 3 = 55.
Berdasarkan hal tersebut maka jelas bahwa G = 5.
H + J = 13. Pasangan yang mungkin memenuhi adalah (6, 7) atau (7, 6)
A + B = 23. Pasangan yang mungkin memenuhi adalah (4, 19), (19, 4). Pasangan (7, 16) dan (16, 7) tidak mungkin memenuhi sebab 7 pasti berada pada baris ke-5.
Jika A = 4 dan B = 19 maka A + D + 3 + G + 20 = 55. Akibatnya D = 23 (tidak ada bilangan 23).
Maka nilai yang mungkin memenuhi hanya A = 19 dan B = 4 yang dipenuhi oleh D = 8.
Pada baris ke-2, C + D + 9 = 33. Maka C = 16.
Pada baris ke-3 berlaku E + F = 30. Pasangan (E, F) yang mungkin hanya (12, 18) atau (18, 12).
Jika E = 18 maka 10 + C + E + 11 + H = 55. Akibatnya H = 0 (tidak ada bilangan 0)
Maka kemungkinan nilai E hanya jika E = 12. Maka F = 18 dan H = 6 yang berakibat J = 7
Dengan mengecek kembali semua bilangan tersebut maka semuanya terpenuhi.
$\therefore$ **Hanya ada satu kemungkinan pengisian petak yaitu :**

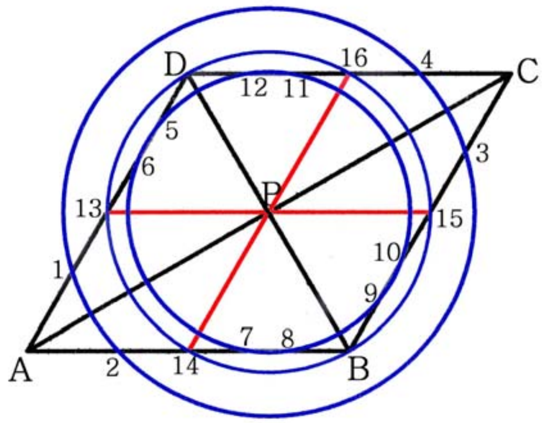
10	19	4
16	8	9
12	3	18
11	5	17
6	20	7

6. Karena p prima maka $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ keduanya bilangan prima > 5.
Alternatif 1 :
Jika $p^2 \equiv \pm 1$ (mod 5) maka $4p^2 + 1 \equiv 0$ (mod 5) yang tidak mungkin merupakan bilangan prima.
Jika $p^2 \equiv \pm 2$ (mod 5) maka $6p^2 + 1 \equiv 0$ (mod 5) yang tidak mungkin merupakan bilangan prima.
Sedangkan jika $p^2 \equiv 0$ (mod 5) maka bilangan prima p yang memenuhi hanya p = 5.
Untuk p = 5 maka $4p^2 + 1 = 101$ dan $6p^2 + 1 = 151$ yang keduanya merupakan bilangan prima.
Alternatif 2 :
Angka satuan bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, 9.
Jika angka satuan p^2 adalah 0 maka angka satuan p juga 0 yang membuat tidak mungkin p prima.
Jika angka satuan p^2 adalah 5 maka angka satuan p juga 5. Bilangan prima p yang memenuhi hanya jika p = 5 maka $4p^2 + 1 = 101$ dan $6p^2 + 1 = 151$ yang keduanya merupakan bilangan prima.

Jika angka satuan p^2 adalah 1 atau 6 maka angka satuan $4p^2 + 1$ adalah 5 yang membuat tidak mungkin $4p^2 + 1$ bilangan prima.
Jika angka satuan p^2 adalah 4 atau 9 maka angka satuan $6p^2 + 1$ adalah 5 yang membuat tidak mungkin $5p^2 + 1$ bilangan prima.

$\therefore$ **Maka nilai p prima yang memenuhi $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ hanya p = 5.**

7. ABCD adalah belah ketupat sehingga AB = BC = CD = DA.
Tidak mungkin Q, R dan S ketiga berimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD sebab akan menyebabkan terdapat tiga titik P dan dua di antara Q, R dan S akan sejajar.
Misalkan terdapat dua titik, misalkan Q dan R, yang berhimpit dengan titik sudut ABCD. Salah satu PQ atau PR adalah merupakan sisi belah ketupat PQRS. Tanpa mengurangi keumuman misalkan PQ adalah sisi belah ketupat PQRS. Maka PQ akan sejajar dengan salah satu diagonal ABCD. Karena R berhimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD maka tidak mungkin ada ruas garis sejajar PQ dengan salah ujungnya merupakan titik sudut ABCD.



Misalkan titik Q terletak pada sisi belah ketupat ABCD sehingga PQ tidak sejajar dengan salah satu sisi ABCD serta PQ merupakan salah satu sisi belah ketupat PQRS. Misalkan juga titik R adalah titik sehingga PR juga merupakan sisi belah ketupat PQRS. Tidak mungkin PR sejajar sisi-sisi ABCD sebab akan membuat panjang PR = ½AB $\neq$ PQ. Maka titik S tidak akan mungkin terletak pada sisi yang sama dengan Q dan R sebab akan menyebabkan QS atau QR sejajar sisi ABCD, padahal PQ maupun PR tidak sejajar sisi ABCD.

Misalkan terdapat dua titik di antara Q, R atau S yang terletak pada sisi yang sama. Misalkan titiki tersebut adalah QR. Tidak mungkin QR diagonal sebab akan menyebbakan titik S terletak di luar ABCD. Akibatnya PS harus sejajar QR maka titik S adalah pertengahan dari sisi AB. BC, CD atau DA. Panjang PS = ½AB. Dengan pusat P dan jari-jari PS dibuat lingkaran yang memotong belah ketupat ABCD di pertengahan sisi AB, BC, CD, DA, B atau D Akibatnya titik Q atau R haruslah terletak pada pertengahan sisi ABCD. Maka titik keempat haruslah terletak pada A, B, C atau D.

Jika tidak terdapat dua titik yang terletak pada sisi yang sama. Maka akan terdapat dua titik yang terletak pada sisi yang sejajar. Tanpa mengurangi keumuman misalakn sisi yang sejajar tersebut adalah AD dan BC.

Jika titik Q terletak pada bagian A-13. Misalkan juga titik Q adalah titik 1. Dari titik Q dibuat garis lurus melalui P dan meootng sisi BC di titik K. Karena ΔAPD kongruen dengan ΔBPC (ketiga sudutnya sama dan AD = BC), maka PQ = PK. Dengan P sebagai pusat dan jari-jari PQ dibuat sebuah lingkaran yang akan memotong sisi BC di titik K. Maka agar terbentuk belah ketupat PQRS, haruslah titik K merupakan salah satu titik sudut belah ketupat PQRS. Padahal Q, P dan K berada pada satu garuis lurus. Maka tidak mungkin dapat dibentuk belah ketupat PQRS dengan salah satu titik terletak pada sisi A-13.

Jika titik Q terletak pada bagian 13-D. Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik Q adalah titik 5. Dengan pusat P dan jari-jari PQ dapat dibuat sebuah lingkaran yang memotong belah ketupat ABCD di titik 6 sampai 12. Dengan cara yang sama dengan sebelumnya maka 5-P-9, 6-P-10, 7-P-11, 8-P-12 masing-masing merupakan garis lurus. Karena Q adalah titik 5 maka satu titik yang terletak pada sisi BC adalah titik 10, misalkan titik ini adalah R. Dari titik Q dibuat garis sejajar PR yang hanya akan memotong sisi BC sehingga pada sisi BC akan terdapat dua titik di antara Q, R dan S dan sesuai penjelasan sebelumnya hal tersebut tidak akan terpenuhi .

Maka dapat disimpulkan bahwa PQRS akan berbentuk belah ketupat hanya jika dua titik di antara Q, R atau S merupakan pertengahan sisi AB, BC, CD atau DA dan satu di anatar berhimpit dengan titik A, B, C atau D.

$\therefore$ **Terbukti bahwa jika PQRS membentuk belah ketupat maka tepat satu di antara Q, R atau S berhimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD.**

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2003

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2004

Bidang Matematika

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT KABUPATEN/KOTA
TAHUN 2003

1 Bagian Pertama

1. Ada berapa banyak diantara bilangan-bilangan 20000002, 20011002, 20022002, 20033002 yang habis dibagi 9 ?
   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

2. Ada berapa banyak bilangan 4-angka (digit) yang semua angkanya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ?
   A. 499 C. 624 E. Tidak satupun diantaranya
   B. 500 D. 625

3. Hari ini usiaku 1/3 kali usia ayahku. Lima tahun yang lalu, usiaku 1/4 kali usia ayahku pada waktu itu. Berapakah usiaku sekarang ?
   A. 12 B. 15 C. 17 D. 20 E. 21

4. Sebuah kelas terdiri dari 40 siswa. Diantaranya, 20 siswa menyukai pelajaran Matematika, 15 orang menyukai pelajaran Biologi, 15 orang menyukai pelajaran Bahasa Inggris dan lima orang menyukai ketiganya. Banyaknya siswa yang menyukai sedikitnya satu dari ketiga pelajaran tersebut adalah ?
   A. 10 C. 20 E. Tidak satupun diantaranya
   B. 15 D. 25

5. Masing-masing dari kelima pernyataan berikut benar atau salah.
   (a) pernyataan (c) dan (d) keduanya benar
   (b) pernyataan (d) dan (e) tidak keduanya salah
   (c) pernyataan (a) benar
   (d) pernyataan (c) salah
   (e) pernyataan (a) dan (c) keduanya salah.
   Berapa banyak diantara kelima pernyataan di atas yang benar ?
   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

6. Misalkan x dan y adalah bilangan taknol yang memenuhi
   $$xy = \frac{x}{y} = x - y$$
   Berapakah nilai x + y ?
   A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{3}{2}$

7. Di dalam suatu lingkaran L_1 berjari-jari 1 dan berpusat di titik asal dilukis suatu lingkaran L_2 yang bersinggungan dengan lingkaran L_1 , dan dengan sumbu-x dan sumbu-y positif. Jari-jari lingkaran L_2 adalah ?

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\frac{1}{2}$ E. $2-\sqrt{2}$

8. Misalkan $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$, dan $8^f = 9$. Berapakah hasil kali abcdef ?

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. 3 E. $\frac{10}{3}$

9. Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat : bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi oleh 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit dari N ?·

A. 4 B. 8 C. 13 D. 22 E. 40

10. Suatu garis melalui titik (m, –9) dan (7, m) dengan kemiringan m. Berapakah nilai m ?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

2 Bagian Kedua

11. Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} f(-x) = 2x$$

untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Berapakah nilai f(2) ?

12. Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$, maka berapakah nilai $a^2 + b^2$? (Diketahui bahwa 2003 merupakan bilangan prima)

13. Dari sepuluh orang siswa akan dibentuk 5 kelompok, masing-masing beranggota dua orang. Berapa banyaknya cara membentuk kelima kelompok ini ?

14. Misalkan bahwa

$$f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$$

dan bahwa f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5). Berapakah nilai a ?

15. Berapakah hasil perkalian

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)$$

16. Iwan selalu berbohong pada hari Senin, Selasa, Rabu dan berkata jujur pada hari-hari lainnya. Di lain pihak Budi selalu berbohong pada hari Kamis, Jumat, Sabtu dan berkata jujur pada hari-hari lainnya. Pada suatu hari terjadi percakapan berikut :

Iwan : Kemarin saya berbohong
Budi : Saya juga

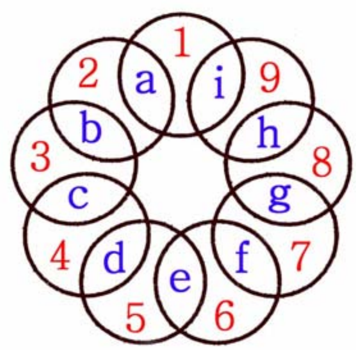
Pada hari apa percakapan tersebut terjadi ?

17. Segitiga ABC adalah segitiga samasisi dengan panjang sisi 1 satuan. Melalui B dibuat garis yang tegak lurus BC. Garis tersebut berpotongan dengan perpanjangan garis AC di titik D. Berapakah panjang BD ?

18. Untuk setiap bilangan real α, kita definisikan $\lfloor \alpha \rfloor$ sebagai bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan α. Sebagai contoh $\lfloor 4{,}9 \rfloor$ = 4 dan $\lfloor 7 \rfloor$ = 7. Jika x dan y bilangan real sehingga $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ = 9 dan $\lfloor \sqrt{y} \rfloor$ = 12, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$ adalah ?

19. Untuk menentukan wakilnya dalam cabang lari 110 m gawang putera, sebuah SMU mengadakan seleksi yang diikuti 5 orang siswa. Dalam seleksi tersebut diadakan tiga kali lomba yang pada setiap lomba, pelari tercepat diberi nilai 5, sedangkan peringkat di bawahnya berturut-turut mendapat nilai 3, 2, 1, 1. Tidak ada dua pelari yang menempati peringkat yang sama. Jika pemenang seleksi diberikan kepada yang nilai totalnya paling tinggi pada ketiga lomba, berapakah nilai terendah yang mungkin dicapai oleh pemenang seleksi ?

20. Misalkan a, b, c, d, e, f, g, h, i menyatakan bilangan-bilangan bulat positif berbeda yang kurang dari atau sama dengan sembilan. Jika jumlah setiap tiga bilangan dalam setiap lingkaran bernilai sama, berapakah nilai a + d + g ?



SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2003

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : A)

Teori : Sebuah bilangan bulat habis dibagi 9 jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 9.

Jumlah digit 20000002 = 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 4 (Tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20011002 = 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 2 = 6 (Tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20022002 = 2 + 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 + 2 = 8 (Tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20033002 = 2 + 0 + 0 + 3 + 3 + 0 + 0 + 2 = 10 (Tidak habis dibagi 9)

$\therefore$ Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 adalah **0**

2. (Jawaban : A)

Angka pertama ada 4 kemungkinan : 2, 4, 6, 8. Angka ke-2, ke-3 dan ke-4 masing-masing ada 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan empat angka yang semua digitnya genap ada : 4 x 5 x 5 x 5 = 500 bilangan.

Bilangan kelipatan 2003 yang terdiri dari 4 angka adalah : 2003, 4006, 6009, 8012. Yang semua digitnya bilangan genap hanya 4006.

$\therefore$ Banyaknya bilangan 4 angka yang semua digitnya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ada : 500 − 1 = **499** bilangan

3. (Jawaban : B)

Misal usiaku saat ini = X dan usia ayahku saat ini = Y, maka : $X = \frac{1}{3}Y$ dan

$$(X - 5) = \frac{1}{4}(Y - 5)$$

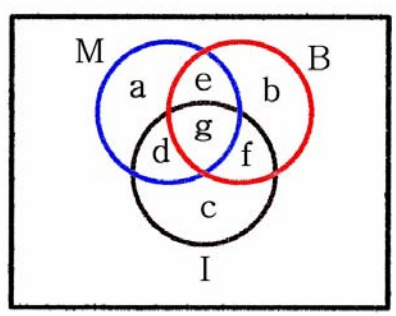
$$X - 5 = \frac{1}{4}(3X - 5)$$

4X − 20 = 3X − 5

X = 15

$\therefore$ Usiaku saat ini **15** tahun

4. (Jawaban : ?)



Misalkan M adalah himpunan siswa yang menyukai Matematika ; B adalah himpunan siswa yang menyukai Biologi dan I adalah himpunan siswa yang menyukai Bahasa Inggris.

Misalkan n(M∪B∪I) = T. Maka banyaknya siswa yang menyukai paling sedikit 1 mata pelajaran adalah T.
Misalkan banyaknya siswa yang tidak menyukai satupun dari ketiga pelajaran tersebut adalah k

$n(M\cup B\cup I) = n(M) + n(B) + n(I) - n(M\cap B) - n(M\cap I) - n(B\cap I) + n(M\cap B\cap I)$

$T = 40 - k = 20 + 15 + 15 - (e + g) - (d + g) - (f + g) + g$

$T = 40 - k = 40 - d - e - f$. Maka $k = d + e + f$

Tampak ada yang kurang pada soal. Kemungkinan maksud soal :

a. k = 0, banyaknya siswa yang menyukai hanya 1 pelajaran ?

$n(M\cup B\cup I) = n(M) + n(B) + n(I) - n(M\cap B) - n(M\cap I) - n(B\cap I) + n(M\cap B\cap I)$

$40 = 20 + 15 + 15 - (e + g) - (d + g) - (f + g) + g$

$d + e + g = 0$

Karena $d \geq 0$; $e \geq 0$ dan $f \geq 0$ maka d = 0 ; e = 0 dan f = 0

$a + d + e + g = 20$ sehingga $a = 20 - 5 - 0 - 0 = 15$

$c + d + f + g = 15$ sehingga $c = 15 - 5 - 0 - 0 = 10$

$b + e + f + g = 15$ sehingga $b = 15 - 5 - 0 - 0 = 10$

Banyaknya siswa yang menyukai hanya 1 pelajaran adalah = a + b + c = **35**

b. n(M∪B∪I) = 40 dan pertanyaan sesuai dengan soal

Maka jelas a + b + c + d + e + f + g = **40**

(*Catatan* : Jawaban asli soal ini adalah **25**, tapi bagaimana mendapatkannya ?)

5. (Jawaban : D)

Misalkan (a) benar maka (c) dan (d) benar
Berdasarkan (d) hal ini merupakan kontradiksi. Maka (a) salah.
Karena (a) salah maka (c) juga salah sehingga (d) dan (e) benar. Akibatnya (b) juga benar.
Pernyataan yang benar adalah (b) ; (d) dan (e).
∴ Banyaknya pernyataan yang benar ada : **3**

6. (Jawaban : A)

$xy = \frac{x}{y}$; $y \neq 0$

$xy^2 = x$ .... (1)

a. Untuk x = 0

$\frac{x}{y} = x - y$. Maka 0 = 0 – y sehingga y = 0 (Tidak memenuhi syarat awal bahwa $y \neq 0$)

b. Untuk $x \neq 0$

Berdasarkan pers (1) maka $y^2 = 1$ sehingga y = 1 atau y = –1

* Untuk y = 1

$\frac{x}{y} = x - y$. Maka x = x – 1. Karena 0 = – 1 maka tidak ada nilai x yang memenuhi

* Untuk y = –1

$\frac{x}{y} = x - y$. Maka –x = x + 1 sehingga $x = -\frac{1}{2}$

∴ $x + y = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$

7. (Jawaban : C)

OB adalah jari-jari lingkaran besar dengan pusat

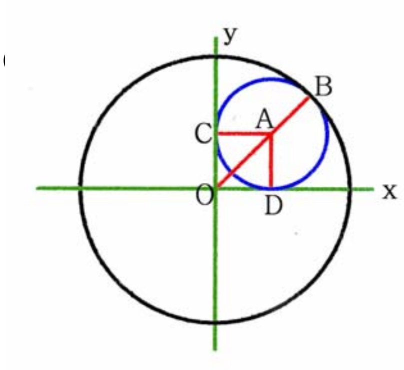
Misal jari-jari lingkaran dalam = r, maka AB = r

Karena OD = OC = r maka OA = r√2

OB = OA + AB

1 = r√2 + r

$\therefore \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$



8. (Jawaban : B)

Karena $3^a = 4$ maka a = $^3\log 4$

Karena $4^b = 5$ maka b = $^4\log 5$

Karena $5^c = 6$ maka c = $^5\log 6$

Karena $6^d = 7$ maka d = $^6\log 7$

Karena $7^e = 8$ maka e = $^7\log 8$

Karena $8^f = 9$ maka f = $^8\log 9$

abcdef = $^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \cdot {}^5\log 6 \cdot {}^6\log 7 \cdot {}^7\log 8 \cdot {}^8\log 9 = {}^3\log 9 = 2$

$\therefore$ abcdef = **2**

9. (Jawaban : C)

Alternatif 1 :

Karena N bersisa 2 jika dibagi 5 maka N = 5m + 2. Bilangan-bilangan N adalah 2, 7, 12, 17, 22, ····

Karena N bersisa 3 jika dibagi 7 maka N = 7n + 3. Bilangan-bilangan N adalah 3, 10, 17, 24, 31, ···

Karena persekutuan terkecilnya 17 maka bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5 dan bersisa 3 jika dibagi 7 akan berbentuk N = (5 · 7) p + 17 = 35p + 17 dengan p adalah bilangan bulat. Bilangan-bilangan N adalah 17, 52, 87, 122, 157, 192, ······

N bersisa 4 jika dibagi 9. Maka N = 9t + 4. Bilangan-bilangan N adalah 4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76, 85, 94, 103, 112, 121, 130, 139, 148, 157, 166, ······

Karena persekutuan terkecilnya adalah 157, maka bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi 7 dan bersisa 4 jika dibagi 9 akan berbentuk N = (35 · 9)k + 157

N = 315k + 157

N_{min} = 157 jika k = 0

$\therefore$ Jumlah digit dari N_{min} adalah = 1 + 5 + 7 = **13**

Alternatif 2 :

Karena N bersisa 2 jika dibagi 5 maka N = 5m + 2 untuk suatu bilangan bulat tak negatif m.

$N \equiv 3 \pmod 7$

$5m + 2 \equiv 3 \pmod 7$

$5m \equiv 1 \pmod 7$

Nilai m yang memenuhi haruslah berbentuk m = 7k + 3 untuk suatu bilangan bulat tak negatif k.

N = 5m + 2 = 5(7k + 3) + 2 = 35k + 17

$N \equiv 4 \pmod 9$

$35k + 17 \equiv 4 \pmod 9 \equiv 22 \pmod 9$

$35k \equiv 5 \pmod 9$

Nilai k yang memenuhi haruslah berbentuk k = 9p + 4 untuk suatu bilangan bulat tak negatif p.

N = 35k + 17 = 35(9p + 4) + 17 = 315p + 157.

N_{min} = 157 jika p = 0

$\therefore$ Jumlah digit dari N_{min} adalah = 1 + 5 + 7 = **13**

10. (Jawaban : C)

Gradien = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{m - (-9)}{7 - m}$

m + 9 = 7m – m^2

$(m - 3)^2 = 0$

∴ m = **3**

BAGIAN KEDUA

11. $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} f(-x) = 2x$

Untuk x = $\frac{1}{2}$ maka $f(2) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ .... (1)

Untuk x = –2 maka $f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f(2) = -4$

$2f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(2) = -8$ .... (2)

Kurangkan persamaan (1) dengan persamaan (2)

2f(2) = 9

∴ **f(2) =** $\frac{9}{2}$

12. $a^2 - b^2 = 2003$. Maka (a + b) (a – b) = 2003 · 1
   * Untuk a + b = 2003 dan (a – b) = 1
     didapat 2a = 2004. Maka a = 1002 dan b = 1001
     $a^2 + b^2 = (1002)^2 + (1001)^2 = 2006005$
   * Untuk (a + b) = 1 dan (a – b) = 2003
     didapat 2a = 2004. Maka a = 1002 dan b = – 1001
     $a^2 + b^2 = (1002)^2 + (-1001)^2 = 2006005$

   ∴ $a^2 + b^2$ = **2006005**

13. Alternatif 1:
   * Jika 2 orang siswa akan dibentuk 1 kelompok
     Banyaknya cara ada 1
   * Jika 4 orang siswa (misal A, B, C dan D) akan dibentuk menjadi 2 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang

Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 1 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 1.

Karena kemungkinan pasangan A ada 3, maka banyaknya cara dari 4 orang siswa akan dibentuk 2 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 3 x 1 = 3 cara.

* Jika 6 orang siswa (misal A, B, C, D, E dan F) akan dibentuk menjadi 3 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang

  Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 2 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 3 x 1.

  Karena kemungkinan pasangan A ada 5, maka banyaknya cara dari 6 orang siswa akan dibentuk 3 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 5 x 3 x 1 = 15 cara.
* Jika 8 orang siswa (misal A, B, C, D, E, F, G dan H) akan dibentuk menjadi 4 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang

  Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 3 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 5 x 3 x 1.

  Karena kemungkinan pasangan A ada 7, maka banyaknya cara dari 8 orang siswa akan dibentuk 4 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 7 x 5 x 3 x 1 = 105 cara.
* Jika 10 orang siswa (misal A, B, C, D, E, F, G, H, I dan J) akan dibentuk menjadi 5 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang

  Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 4 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 7 x 5 x 3 x 1.

  Karena kemungkinan pasangan A ada 9, maka banyaknya cara dari 10 orang siswa akan dibentuk 5 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 9 x 7 x 5 x 3 x 1 = 945 cara.

Alternatif 2 :

Pilih salah satu siswa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa lain adalah ${}_9C_1$. Pilih salah satu siswa dari 8 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_7C_1$. Pilih salah satu siswa dari 6 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_5C_1$. Pilih salah satu siswa dari 4 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_3C_1$. Sisanya adalah 2 orang siswa yang tidak dapat dipilih lagi.

Banyaknya cara membentuk kelima kelompok adalah ${}_9C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot 1 = 945$.

$\therefore$ Banyaknya cara membentuk kelima kelompok tersebut adalah **945**

14. Misal f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = k

Dibentuk persamaan polinomial :

$$g(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k$$

$$g(x) = f(x) - k$$

Jelas bahwa g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = g(5) = 0

Berarti bahwa 1; 2; 3; 4 dan 5 adalah akar-akar persamaan polinomial g(x) = 0.

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{B}{A} = -\frac{a}{1} = -a$$

Karena akar-akarnya adalah 1; 2; 3; 4 dan 5 maka :

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = – a

$\therefore$ a = – **15**

15. $S = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2002^2}\right)\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)$

$S = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2002}\right)\left(1+\frac{1}{2002}\right)\left(1-\frac{1}{2003}\right)\left(1+\frac{1}{2003}\right)$

$S = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{2002}{2001}\cdot\frac{2001}{2002}\right)\cdot\left(\frac{2003}{2002}\cdot\frac{2002}{2003}\right)\cdot\frac{2004}{2003}$

$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{2004}{2003}$

$\therefore \quad S = \frac{1002}{2003}$

16. Misalkan pada hari tersebut Iwan berbohong dan dengan berdasarkan perkataannya, pada hari sebelumnya Iwan harus berkata jujur. Akibatnya hari tersebut adalah Senin karena pada hari Minggu Iwan berkata jujur. Pada hari Senin Budi berkata jujur. Maka berdasarkan perkataannya berarti pada hari Minggu Budi berbohong. Hal tersebut kontradiksi karena pada hari Minggu Budi berkata jujur.

Misalkan pada hari tersebut Iwan berkata jujur dan dengan berdasarkan perkataannya, pada hari sebelumnya Iwan harus berkata bohong. Akibatnya hari tersebut adalah Kamis karena Rabu Iwan berbohong. Pada hari Kamis Budi berkata bohong. Maka berdasarkan perkataannya berarti pada hari Rabu Budi berkata jujur. Hal tersebut sesuai karena pada hari Rabu Budi berkata jujur.

$\therefore$ Percakapan tersebut terjadi pada hari **Kamis**

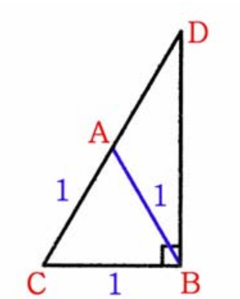
17. $\angle CBA = 60^o$ maka $\angle ABD = 30^o$

Jelas $\angle ACB = 60^o$, maka $\angle ADB = 90^o - \angle ACB = 30^o$

$\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AB}{\sin\angle ADB}$, maka $\frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ}$

$BD = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}$

$\therefore$ BD = $\sqrt{}$**3**



18. Karena $\sqrt{81}$ = 9 dan $\sqrt{100}$ = 10 maka $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ = 9 dipenuhi oleh $81 \le x < 100$

Karena $\sqrt{144}$ = 12 dan $\sqrt{169}$ = 13 maka $\lfloor\sqrt{y}\rfloor$ = 12 dipenuhi oleh $144 \le y < 169$

$\lfloor y - x \rfloor_{min} = \lfloor y_{min} - x_{maks} \rfloor = \lfloor 144 - 99{,}99\cdots \rfloor = \lfloor 44{,}00\cdots 1 \rfloor$

$\therefore$ $\lfloor \mathbf{y - x} \rfloor_{\mathbf{min}}$ **= 44**

19. Nilai total = 3 · (5 + 3 + 2 + 1 + 1) = 36

Misal nilai pemenang = x. Maka nilai sisa = 36 – x

Agar x minimum maka nilai sisa harus terdistribusi merata kepada 4 pelari lain. Misal nilai masing-masing pelari lain = y

$x + 4y = 36$ dengan $x > y$. Maka $4x > 4y$

$4x > 36 - x$.

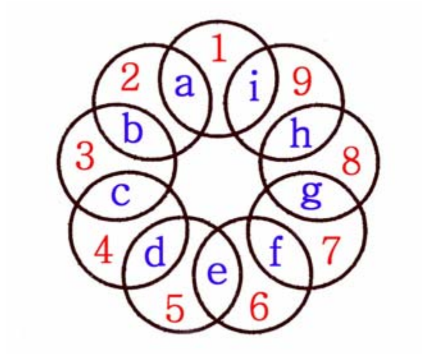
$5x > 36$

Jika x = 8 maka 4y = 28 sehingga y = 7.

Kombinasi nilai 7 adalah (5,1,1) ; (1,5,1) ; (3,1,3) ; (2,3,2). Karena masing-masing nilai 2, 3 dan 5 tidak lebih dari tiga kali dan nilai 1 tidak lebih dari 6 kali, maka kombinasi di atas memenuhi.

∴ Nilai minimum pemenang adalah **8**

20.



$1 \le a, b, c, d, e, f, g, h, i \le 9$

Karena a, b, c, d, e, f, g, h, i adalah bilangan bulat berbeda maka :

$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

Misal masing-masing lingkaran berjumlah k dan karena ada 9 lingkaran, maka :

$(a+1+i)+(b+2+a)+(c+3+b)+(d+4+c)+(e+5+d)+(f+6+e)+(g+7+f)+(h+8+g)+(i+9+h) = 9k$

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 2\,(a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 9k$

$45 + 2 \cdot 45 = 9k$

$k = 15$

Karena $a + 1 + i = 15$ maka $a + i = 14$

Kemungkinan nilai a dan i adalah : a = 5 dan i = 9 atau a = 9 dan i = 5 atau a = 6 dan i = 8 atau a = 8 dan i = 6.

Karena $i + 9 + h = 15$ maka $i + h = 6$

Kemungkinan nilai h dan i adalah : h = 1 dan i = 5 atau h = 5 dan i = 1 atau h = 2 dan i = 4 atau h = 4 dan i = 2.

Irisan dari kedua persamaan di atas didapat i = 5. Maka h = 1 dan a = 9

Karena $b + 2 + a = 15$ maka $b = 15 - 2 - 9 = 4$

Karena $c + 3 + b = 15$ maka $c = 15 - 3 - 4 = 8$

Karena $d + 4 + c = 15$ maka $d = 15 - 4 - 8 = 3$

Karena $e + 5 + d = 15$ maka $e = 15 - 5 - 3 = 7$

Karena $f + 6 + e = 15$ maka $f = 15 - 6 - 7 = 2$

Karena $g + 7 + f = 15$ maka $g = 15 - 7 - 2 = 6$

∴ $a + d + g = 9 + 3 + 6 =$ **18**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

BAGIAN PERTAMA

1. Jika a dan b bilangan bulat ganjil dengan a > b, berapa banyakkah bilangan bulat genap di antara a dan b ?

2. Agung mendapatkan bahwa nilai rata-rata dari tiga ulangan matematika yang diikutinya adalah 81. Nilai ulangan pertama adalah 85. Nilai ulangan ketiga lebih rendah 4 dari nilai ulangan kedua. Berapakah nilai ulangan kedua Agung ?

3. Apakah himpunan jawab dari persamaan $|x + 2| + |3x| = 14$?

4. $\square - \dfrac{\square}{\square} \cdot \square$ Keempat bilangan 3, 5, 7 dan 8 akan diisikan ke dalam kotak-kotak di samping. Berapakah hasil terbesar yang dapat diperoleh ?

5. Misalkan x, y, z tiga bilangan asli berbeda. Faktor persekutuan terbesar ketiganya adalah 12, sedangkan kelipatannya persekutuan terkecil ketiganya adalah 840. Berapakah nilai terbesar bagi $x + y + z$?

6. Berapakah bilangan bulat positif k terkecil sehingga $\underbrace{20032003\cdots2003}_{k}$ habis dibagi 9 ?

7. Persamaan kuadrat $2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$ mempunyai dua akar real x_1 dan x_2. Berapakah nilai a yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut sehingga $x_1 < a < x_2$?

8. Dalam sebuah segitiga ABC siku-siku sama kaki, dibuat persegi PQRS sebagai berikut : Titik P pada sisi AB, titik Q pada sisi AC, sedangkan titik-titik R dan S pada sisi miring BC. Jika luas segitiga ABC adalah x, berapakah luas persegi PQRS ?

9. Upik melemparkan n dadu. Ia menghitung peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6. Untuk n berapakah peluang tersebut paling besar ?

10. Suatu garis vertikal membagi segitiga dengan titik sudut (0,0), (1,1) dan (9,1) menjadi dua daerah dengan luas yang sama. Apakah persamaan garis tersebut ?

11. Misalkan m dan n dua bilangan asli yang memenuhi $m^2 - 2003 = n^2$. Berapakah mn ?

12. Berapakah nilai x yang memenuhi ${}^4\log({}^2\log x) + {}^2\log({}^4\log x) = 2$?

13. Titik P terletak di dalam persegi ABCD demikian rupa, sehingga AP : BP : CP = 1 : 2 : 3. Berapakah besar sudut APB ?

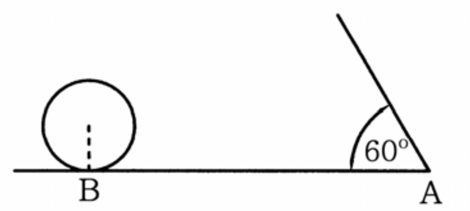
14. Dengan mengkombinasikan ketiga warna dasar merah, kuning, dan biru dapat dibentuk warna-warna yang lain. Misalkan terdapat 5 kaleng cat warna merah, 5 kaleng warna kuning, dan 5

kaleng warna biru. Budi boleh memilih kaleng manapun untuk mencampurkan warna, dan semua cat dalam sebuah kaleng harus dipakai semua. Ada berapa pilihan warna yang dihasilkan ?

15. Pak Oto membeli dua mobil untuk dijual kembali. Ia memperoleh keuntungan 30% dari mobil pertama, tetapi menderita kerugian 20% pada mobil kedua. Harga jual kedua mobil sama. Berapa persenkah keuntungan (atau kerugian) pak Oto secara keseluruhan ?
    [Catatan : Semua persentase terhadap harga pembelian. Untuk jawaban, gunakan tanda '–' untuk menyatakan kerugian dan tanda '+' untuk menyatakan keuntungan.]

16. Empat pasang suami isteri menonton pagelaran orkestra. Tempat duduk mereka harus dipisah antara kelompok suami dan kelompok isteri. Untuk masing-masing kelompok disediakan 4 buah tempat duduk bersebelahan dalam satu barisan. Ada berapa banyak cara memberikan tempat duduk kepada mereka ?

17. Sebuah bola dengan jari-jari r ditendang dari B ke A. Bola tersebut menggelinding sebanyak tepat 10 putaran sebelum membentur bidang miring dan berhenti. Berapakah jarak dari B ke A ?



18. Berapakah sisa pembagian $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$ oleh 101 ?

19. Suatu lingkaran mempunyai diameter AB yang panjangnya merupakan bilangan bulat 2-angka. Tali busur CD tegak lurus pada AB dan memotong AB di titik H. Panjang CD sama dengan bilangan yang diperoleh dengan menukar letak kedua angka dari panjang AB. Jika jarak dari H ke pusat lingkaran merupakan bilangan rasional, berapakah panjang AB ?

20. Berapakah banyaknya cara memilih tiga bilangan berbeda sehingga tidak ada dua bilangan yang berurutan, jika bilangan-bilangan tersebut dipilih dari himpunan $\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

BAGIAN KEDUA

1. Andi, Beni, Coki, Doni dan Edo bermain kancil-serigala. Setiap anak menjadi kancil atau serigala, tetapi tidak kedua-duanya. Kancil selalu jujur, sementara serigala selalu berdusta.
   Andi berkata bahwa Beni adalah kancil. Coki berkata bahwa Doni adalah serigala. Edo berkata Andi bukan serigala. Beni berkata Coki bukan kancil. Doni berkata bahwa Edo dan Andi adalah binatang yang berbeda.
   Tentukan banyaknya serigala dalam permainan ini.

2. Tentukan semua bilangan bulat a dan b sehingga bilangan
   $$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$
   merupakan bilangan rasional

3. Titik-titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AE dan CG pada kubus ABCD.EFGH. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, tentukan luas segi-empat DPFQ.

4. Buktikan bahwa $999! < 500^{999}$.
   [Catatan : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.]

5. Tiga buah titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$. Buktikan bahwa sedikitnya dua di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya bilangan bulat antara a dan b adalah a − b − 1. Karena a dan b ganjil, maka banyaknya bilangan genap di antara a dan b lebih satu dari banyaknya bilangan ganjil di antara a dan b.

   Maka banyaknya bilangan bulat genap dirumuskan dengan $\frac{(a-b-1)+1}{2}$.

   ∴ Banyaknya bilangan genap di antara a dan b adalah $\frac{a-b}{2}$

2. Misal nilai ulangan ke-2 Agung = x, maka $\frac{(85)+(x)+(x-4)}{3} = 81$

   81 + 2x = 81 · 3. Maka x = 81

   ∴ Nilai ulangan Agung ke-2 = **81**

3. * Untuk x ≤ −2, maka |x + 2| = −x − 2 dan |3x| = −3x
     |x + 2| + |3x| = 14. Maka −x − 2 − 3x = 14 sehingga x = −4 (memenuhi bahwa x ≤ −2)
   * Untuk −2 ≤ x ≤ 0 maka |x + 2| = x + 2 dan |3x| = −3x
     |x + 2| + |3x| = 14. Maka x + 2 − 3x = 14 sehingga x = −6 (tidak memenuhi bahwa −2 ≤ x ≤ 0)
   * Untuk x ≥ 0 maka |x + 2| = x + 2 dan |3x| = 3x
     |x + 2| + |3x| = 14. Maka x + 2 + 3x = 14 sehingga x = 3 (memenuhi bahwa x ≥ 0)

   ∴ Himpunan jawab dari persamaan |x + 2| + |3x| = 14 adalah = **{ −4, 3}**

4. $$\boxed{N} = \boxed{A} - \frac{\boxed{B}}{\boxed{D}} \cdot \boxed{C}$$

   Teori : Agar T − M maksimal, maka T harus sebesar-besarnya dan M harus sekecil-kecilnya.
   Jika diinginkan N sebesar-besarnya, maka A dan D harus maksimal dengan A > D sedangkan B dan C harus minimum dan karena B · C = C · B, maka tidak ada pengaruh posisi B dan C.
   Berarti A = 8, B = 3, C = 5, D = 7 atau A = 8, B = 5, C = 3, D = 7

   ∴ $N = 8 - \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{41}{7}$

5. Karena faktor persekutuan terbesar dari x, y, z adalah 12, maka x, y, z akan berbentuk x = 12a, y = 12b dan z = 12c dengan a, b dan c adalah bilangan bulat FPB(a, b, c) = 1
   Dan karena 840 : 12 = 70, maka a, b dan c masing-masing harus faktor dari 70. Nilai a, b dan c harus diambil dari faktor-faktor 70 yaitu : 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 dan 70.
   Karena diinginkan nilai x + y + z yang terbesar maka nilai a + b + c juga harus yang terbesar. Karena FPB (14, 35, 70), FPB (10, 35, 70), FPB (7, 35, 70), FPB (5, 35, 70) semuanya lebih dari 1 maka a, b dan c diambil dari 2, 35 dan 70 atau 10, 14, 35 dan karena 2 + 35 + 70 > 10 + 14 + 35 maka a, b dan c diambil dari 2, 35 dan 70.

   ∴ $(x + y + z)_{terbesar}$ = 12 · 2 + 12 · 35 + 12 · 70 = **1284**

6. Misal N = $\underbrace{20032003\cdots 2003}_{k}$.

   Agar N habis dibagi 9 maka jumlah digit N harus habis dibagi 9.
   Karena 2 + 0 + 0 + 3 = 5 maka jumlah digit N = 5k.
   ∴ Bilangan bulat positif k terkecil yang memenuhi adalah **k = 9**

7. $x_{1,2} = \frac{4a + 2 \pm \sqrt{(4a+2)^2 - 4(2)(a^2 - a)}}{2 \cdot 2} = a + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$

   * Akar-akarnya real berarti Disk ≥ 0. Maka Disk = $(4a + 2)^2 - 4(2)(a^2 - a) \geq 0$
     $8a^2 + 24a + 4 \geq 0$
     $2a^2 + 6a + 1 \geq 0$

     $$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(1)}}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

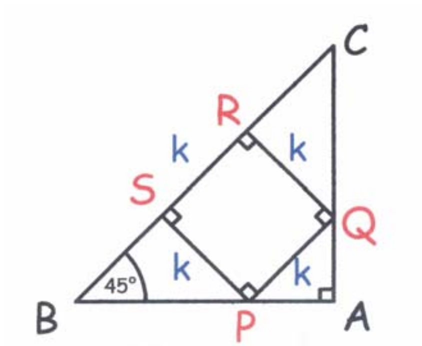
     Nilai a yang memenuhi adalah $a \leq -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$ atau $a \geq -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}$ .... (1)

   * $a < x_2$. Maka $a < a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$ sehingga $\sqrt{2a^2 + 6a + 1} > -1$
     Akar dari suatu bilangan bernilai positif sehingga semua nilai a memenuhi. .... (2)

   * $a > x_1$. Maka $a > a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$ sehingga $\sqrt{2a^2 + 6a + 1} > 1$
     $2a^2 + 6a + 1 > 1$
     $2a(a + 3) > 0$
     Nilai a yang memenuhi adalah a < –3 atau a > 0 .... (3)

   Karena $\sqrt{7} < 3$ maka $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7} > -3$ dan $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7} < 0$.
   Irisan dari ketiga penyelesaian untuk a adalah a < –3 atau a > 0
   ∴ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a < –3 atau a > 0**

8.



Misal PQ = QR = RS = PS = k

$\angle ACB = \angle ABC = \angle APQ = \angle AQP = \angle BPS = \angle CQR = 45^o$

Maka BS = CR = k

BP = CQ = k√2

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}(AB)(AC) = \frac{1}{2}\left(k\sqrt{2} + \frac{1}{2}k\sqrt{2}\right)\left(k\sqrt{2} + \frac{1}{2}k\sqrt{2}\right) = x$

$k^2 = \frac{4x}{9}$

∴ Luas persegi PQRS = $\frac{4x}{9}$

9. Karena nilai terkecil dadu = 1, maka n ≤ 6.
   * Untuk n = 1

     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{1}{6}$
   * Untuk n = 2

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) = 5

     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$
   * Untuk n = 3

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,4), (1,2,3), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,3), (2,2,2), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (4,1,1) = 10

     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{10}{6^3} = \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$
   * Untuk n = 4

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,1,3,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (1,3,1,1), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1), (3,1,1,1) = 10

     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{10}{6^4} = \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$
   * Untuk n = 5

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,1,2), (1,1,1,2,1), (1,1,2,1,1), (1,2,1,1,1), (2,1,1,1,1) = 5

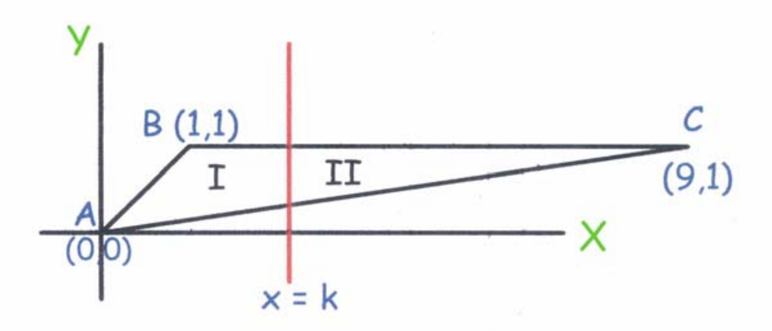
     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{5}{6^5} < \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$
   * Untuk n = 6

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,1,1,1) = 1

     Peluang jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{1}{6^6} < \frac{5}{6^5} < \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

   ∴ Peluang terbesar adalah jika n = **1**

10.



Misal persamaan garis vertikal tersebut adalah x = k

Luas ΔABC = ½ (9 − 1)(1 − 0) = 4

Persamaan garis melalui (0,0) dan (9,1) adalah y = $\frac{1}{9}$x

Untuk x = k maka y = $\frac{1}{9}$k

Luas Δ II = ½ Luas ΔABC

½ (9 − k)(1 − $\frac{1}{9}$k) = ½ · 4

9 − k = ± 6

k = 3 (memenuhi) atau k = 15 (tidak memenuhi bahwa 0 ≤ k ≤ 9)

∴ Persamaan garis vertikal tersebut adalah **x = 3**

11. $m^2 - 2003 = n^2$

$m^2 - n^2 = 2003$

(m + n)(m − n) = 2003

2003 adalah bilangan prima sehingga persamaan dipenuhi hanya jika m + n = 2003 dan m − n = 1

Sehingga m = 1002 dan n = 1001

∴ mn = 1002 · 1001 = **1003002**

12. $^4\log\left(^2\log x\right) + {}^2\log\left(^4\log x\right) = 2$

$^2\log\left(^2\log x\right)^{1/2} + {}^2\log\left(^2\log \sqrt{x}\right) = 2$

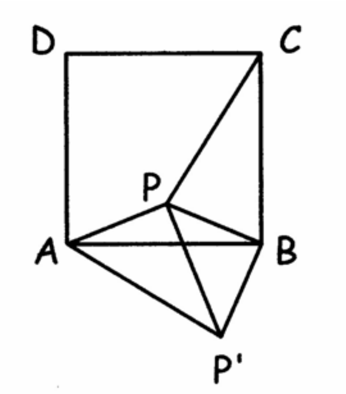
$\sqrt{^2\log x} \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^2\log x = 2^2 = 4$

$\left(^2\log x\right)^{3/2} = 8$

x = 2^4

∴ **x = 16**

13.



Misalkan AP = a maka BP = 2a dan CP = 3a

Dengan berpusat di B, titik P diputar sejauh 90^o menjadi titik P'. maka ΔPBP' adalah segitiga siku-siku sama kaki.

$\angle BPP' = 45^o$ dan $PP' = 2a\sqrt{2}$

$\Delta BPC \cong \Delta AP'B$ sehingga $AP' = 3a$

$(AP')^2 = (AP)^2 + (PP')^2 - 2(AP)(PP')\cos \angle APP'$

$(3a)^2 = (a)^2 + (2a\sqrt{2})^2 - 2(a)(2a\sqrt{2})\cos \angle APP'$

$\cos \angle APP' = 0$

$\angle APP' = 90^o$

$\therefore$ $\angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = 90^o + 45^o =$ **135^o**

14. * Jika terdapat sedikitnya satu warna yang tidak ikut dicampur
Salah satu perbandingan yang menghasilkan warna adalah 0:0:1. Karena ada 3 warna, maka akan ada 3 warna yang dihasilkan dari perbandingan ini. Perbandingan 0:0:2, 0:0:3, 0:0:4, 0:0:5 akan menghasilkan warna yang sama dengan perbandingan 0:0:1. Perbandingan lainnya yang memenuhi adalah 0:1:1, 0:1:2, 0:1:3, 0:1:4, 0:1:5, 0:2:3, 0:2:5, 0:3:4, 0:3:5, 0:4:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 11 = 33.

* Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 1 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 1:1:1, 1:1:2, 1:1:3, 1:1:4, 1:1:5, 1:2:2, 1:2:3, 1:2:4, 1:2:5, 1:3:3, 1:3:4, 1:3:5, 1:4:4, 1:4:5, 1:5:5. Perbandingan 1:1:1 hanya ada 1 kemungkinan.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 1 + 3 x 14 = 43.

* Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 2 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 2:2:3, 2:2:5, 2:3:3, 2:3:4, 2:3:5, 2:4:5, 2:5:5. Perbandingan 2:2:2 akan menghasilkan warna yang sama dengan perbandingan 1:1:1. Hal yang hampir sama berhubungan dengan perbandingan 2:2:4 dan 2:4:4.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 7 = 21.

* Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 3 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 3:3:4, 3:3:5, 3:4:4, 3:4:5, 3:5:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 5 = 15.

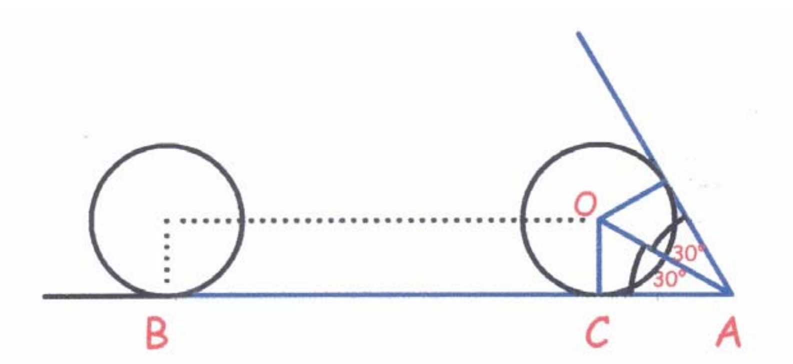
* Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 4 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 4:4:5, 4:5:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 2 = 6.

$\therefore$ Banyaknya warna keseluruhan yang dihasilkan adalah 33 + 43 + 21 + 15 + 6 = **118.**

15. Misal harga jual masing-masing mobil = p
Misal harga pembelian mobil pertama = y_1
$y_1 + 0{,}3y_1 = p$, maka $y_1 = \frac{10}{13}p$
Misal harga pembelian mobil kedua = y_2
$y_2 - 0{,}2y_2 = p$, maka $y_2 = \frac{5}{4}p$
Harga pembelian total = $y_1 + y_2 = \frac{10}{13}p + \frac{5}{4}p = \frac{105}{52}p$
Selisih = $2p - \frac{10}{13}p - \frac{5}{4}p = -\frac{1}{52}p$
Kerugian Pak Oto = $\dfrac{-\frac{1}{52}p}{\frac{105}{52}p}$ x 100 % = $-\frac{100}{105}$ %
∴ Kerugian Pak Oto = $-\frac{20}{21}$ **%**

16. Banyaknya cara duduk masing-masing kelompok adalah sama dengan permutasi 4 obyek pada 4 tempat = ${}_4P_4 = 24$.
Posisi duduk kelompok isteri dapat di sebelah kanan maupun di sebelah kiri kelompok suami.
∴ Banyaknya cara memberikan tempat duduk kepada mereka adalah = 2 · 24 · 24 = **1152 cara**.

17.



BC = 10 · 2πr = 20πr
CA = OC · cotg 30° = r√3
AB = BC + CA = 20πr + r√3
∴ Jarak dari B ke A = **(20π + √3)r**

18. Misal $P = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$

$T = 2 \cdot 1! + 3 \cdot 2! + 4 \cdot 3! + \cdots + 100 \cdot 99! + 101 \cdot 100! = 2! + 3! + 4! + \cdots + 100! + 101!$

$T - P = (2 - 1)\ 1! + (3 - 2)\ 2! + (4 - 3)\ 3! + \cdots + (100 - 99)\ 99! + (101 - 100)\ 100!$

$T - P = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!$

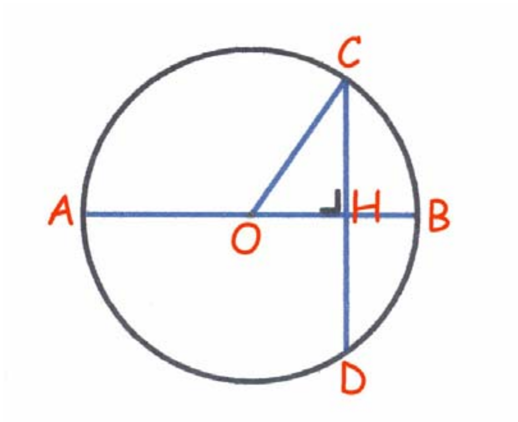
$2! + 3! + 4! + \cdots + 100! + 101! - P = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!$

$P = 101! - 1! = 101! - 1$

101! adalah bilangan yang habis dibagi 101, maka $P = 101! - 1 = 101k + 101 - 1 = 101k + 100$

$\therefore$ $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$ dibagi 101 akan bersisa **100**

19.



Misal panjang AB = 10a + b

OC = ½ AB = ½ (10a + b)

Panjang CD = 10b + a

CH = ½ (10b + a)

Dengan a dan b adalah bilangan bulat positif dan $0 < a \le 9$, $0 < b \le 9$

$$OH = \sqrt{(OC)^2 - (CH)^2}$$

$$OH = \frac{1}{2}\sqrt{(10a + b)^2 - (10b + a)^2}$$

$$OH = \frac{3}{2}\sqrt{11(a + b)(a - b)}$$

Karena OH adalah bilangan rasional dan a + b > a − b maka :

$a + b = 11k$ dan $a - b = km^2$ dengan k dan m adalah bilangan asli sebab a dan b asli.

Karena $a + b \le 18$ maka $11k \le 18$ sehingga nilai k yang memenuhi hanya jika k = 1.

Maka $a - b = m^2$. Karena $a - b < 9$ maka nilai m^2 yang mungkin hanya 1 atau 4.

Jika a + b = 11 dan a − b = 4 maka tidak mungkin didapat a dan b asli.

Jika a + b = 11 dan a − b = 1 maka nilai a dan b yang memenuhi hanya jika a = 6 dan b = 5.

$\therefore$ Panjang AB = **65**

20. Misal H = {1, 2, 3, ⋯, 9, 10}

Alternatif 1 :

* Banyaknya 2 bilangan berurutan dari himpunan H ada 9 yaitu : (1,2), (2,3), (3,4), ⋯, (9,10)
* Menentukan 3 bilangan dari H yang 2 berurutan namun ketiganya tidak berurutan :
  Untuk (1,2) hanya ada satu bilangan ketiga yang akan membuat ketiga bilangan tersebut berurutan, yaitu 3. Maka banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 bilangannya adalah (1,2) namun bilangan ketiga bukan 3 ada 7, yaitu : (1,2,4), (1,2,5), ⋯, (1,2,10). Banyaknya cara ini juga sama dengan 2 bilangan di antaranya adalah (9,10)
  Untuk (2,3) ada dua bilangan ketiga yang akan membuat ketiga bilangan tersebut berurutan, yaitu 1 dan 4. Maka banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 bilangannya adalah (2,3) namun bilangan ketiga bukan 1 atau 4 ada 6, yaitu : (2,3,5), (2,3,6), ⋯, (2,3,10). Banyaknya cara ini juga sama dengan 2 bilangan di antaranya adalah (3,4), (4,5), ⋯, (8,9).
  Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 di antaranya berurutan namun ketiga bilangan tersebut tidak berurutan adalah = $2 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = 56$.
* Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang ketiganya berurutan = 8, yaitu : (1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), ⋯, (7,8,9), (8,9,10).
* Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H = ${}_{10}C_3 = 120$.

∴ Banyaknya cara memilih 3 bilangan berbeda dari himpunan H sehingga tidak ada 2 bilangan berurutan = 120 − 56 − 8 = **56**.

Alternatif 2 :

Jika (a, b, c) adalah 3 bilangan dari H yang memenuhi bahwa tidak ada 2 bilangan di antaranya yang berurutan maka (a, b − 1, c − 2) haruslah merupakan 3 bilangan yang berbeda dan merupakan elemen dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 7, 8}.

Banyaknya cara memilih 3 bilangan dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 7, 8} adalah ${}_{8}C_3 = 56$

∴ Banyaknya cara memilih 3 bilangan berbeda dari himpunan H sehingga tidak ada 2 bilangan berurutan = **56**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

TINGKAT PROVINSI TAHUN 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. Pernyataan-pernyataan :
   a. Andi berkata bahwa Beni adalah kancil
   b. Coki berkata bahwa Doni adalah serigala
   c. Edo berkata Andi bukan serigala
   d. Beni berkata Coki bukan kancil
   e. Doni berkata bahwa Edo dan Andi adalah binatang berbeda

   - Misalkan Andi adalah kancil.
     Berdasarkan (a) maka Beni adalah kancil.
     Berdasarkan (d) maka Coki adalah serigala.
     Berdasarkan (b) maka Doni adalah kancil.
     Berdasarkan (e) karena Andi kancil maka Edo adalah serigala.
     Berdasarkan (c) maka Andi adalah serigala. Pernyataan ini kontradiksi dengan permisalan bahwa Andi adalah kancil.

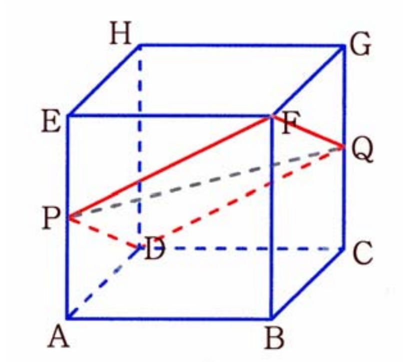
   - Misalkan Andi adalah serigala.
     Berdasarkan (a) maka Beni adalah serigala.
     Berdasarkan (d) maka Coki adalah kancil.
     Berdasarkan (b) maka Doni adalah serigala.
     Berdasarkan (e) maka Edo dan Andi sejenis. Karena Andi serigala maka Edo juga serigala.
     Berdasarkan (c) maka Andi adalah serigala yang berarti sesuai dengan permisalan bahwa Andi adalah kancil.

   Yang termasuk kancil adalah Coki dan yang termasuk serigala adalah Andi, Beni, Doni dan Edo.

   $\therefore$ **Banyaknya serigala ada** 4

2. Karena $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional maka $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan a, b, p dan q adalah bilangan asli dan q $\neq$ 0 serta p dan q relatif prima.
   $q\sqrt{2} + q\sqrt{a} = p\sqrt{3} + p\sqrt{b}$, maka $\left(q\sqrt{2} - p\sqrt{3}\right)^2 = \left(p\sqrt{b} - q\sqrt{a}\right)^2$
   $2q^2 + 3p^2 - 2pq\sqrt{6} = p^2b + q^2a - 2pq\sqrt{ab}$
   Karena a, b, p dan q adalah bilangan asli maka 6 = ab. Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (1,6) ; (2,3) ; (3,2) ; (6,1). Subtitusikan keempat pasangan ini ke persamaan semula untuk dicek apakah memenuhi bilangan rasional atau tidak. Setelah dicek maka pasangan (a,b) yang akan membuat persamaan semula merupakan bilangan rasional adalah (3,2).
   $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1$
   $\therefore$ **a = 3 dan b = 2**

3.



Karena bidang ADHE sejajar dengan BCGF dan bidang ABFE sejajar dengan bidang DCGH maka DP sejajar FQ dan FP sejajar DQ.

PF = DP = DQ = FQ = $\sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

PQ sejajar AC maka PQ = AC = $\sqrt{2}$

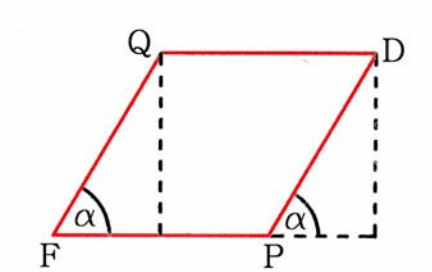
Alternatif 1 :

Mencari sudut PFQ. Misal $\angle$PFQ = α

$(PQ)^2 = (PF)^2 + (FQ)^2 - 2(PF)(FQ)\cos\alpha$

$$2 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\cos\alpha$$

cos α = $\frac{1}{5}$ sehingga sin α = $\frac{2}{5}\sqrt{6}$



Luas segi empat DPFQ = (FP)(PD)sin α

Luas segi empat DPFQ = $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$

$\therefore$ Luas segi empat DPFQ = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

Alternatif 2 :

Karena PF = DP = DQ = FQ maka segiempat DPFQ adalah belah ketupat. Diagonal PQ = $\sqrt{2}$ sedangkan diagonal DF adalah diagonal ruang maka FD = $\sqrt{3}$.

Luas segiempat DPFQ = ½ · PQ · FD = ½ · $\sqrt{2}$ · $\sqrt{3}$

$\therefore$ Luas segi empat DPFQ = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

4. Rataan Geometri ≤ Rataan Aritmatika

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

Tanda kesamaan berlaku jika $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_n$. Maka :

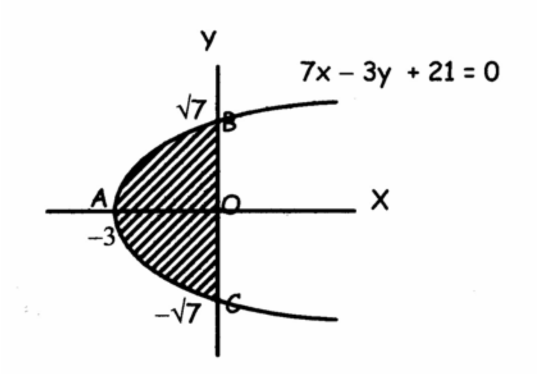
$$\sqrt[999]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 998 \cdot 999} < \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + 998 + 999}{999}$$

$$\sqrt[999]{999!} < \frac{1}{999} \cdot \frac{999}{2}(1 + 999)$$

$$\sqrt[999]{999!} < 500$$

∴ **Terbukti bahwa $999! < 500^{999}$**

5. $7x - 3y^2 + 21 = 0$. Maka $x = \frac{3}{7}\left(y + \sqrt{7}\right)\left(y - \sqrt{7}\right)$ yang merupakan suatu persamaan parabola dengan puncak di (−3,0) dan titik potong dengan sumbu Y di (0,√7) dan (0,−√7). Tampak bahwa ada 2 daerah. Satu daerah di atas sumbu X dan satu daerah lagi di bawah sumbu X.



Jarak AB = $\sqrt{(-3-0)^2 + \left(0 - \sqrt{7}\right)^2} = 4$

Jarak AC = $\sqrt{(-3-0)^2 + \left(0 - (-\sqrt{7})\right)^2} = 4$

Untuk $0 \leq y \leq \sqrt{7}$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan B dengan jarak AB = 4.

Untuk $-\sqrt{7} \leq y \leq 0$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan C dengan jarak AC = 4.

Karena ada 3 buah titik dan ada 2 daerah maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka sedikitnya ada 2 titik dalam satu daerah yaitu memiliki ordinat $0 \leq y \leq \sqrt{7}$ atau $-\sqrt{7} \leq y \leq 0$.

∴ **Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika 3 titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu Y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$, maka sedikitnya 2 titik di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.**

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003

BALIK PAPAN (KALIMANTAN TIMUR), 15 – 19 SEPTEMBER 2003

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003
15 – 19 SEPTEMBER 2003
BALIK PAPAN, KALIMANTAN TIMUR

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

1. Buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6, untuk setiap bilangan bulat a.

2. Diberikan sebuah segiempat ABCD sebarang. Misalkan P, Q, R, S berturut-turut adalah titik-titik tengah AB, BC, CD, DA. Misalkan pula PR dan QS berpotongan di O. Buktikan bahwa PO = OR dan QO = OS.

3. Tentukan semua solusi bilangan real persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$.
   [**Catatan** : Untuk sebarang bilangan real α, notasi $\lfloor \alpha \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan α, sedangkan $\lceil \alpha \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan α.]

4. Diberikan sebuah matriks berukuran 19 x 19, yang setiap komponennya bernilai +1 atau –1. Misalkan pula b_i adalah hasil kali semua komponen matriks di baris ke-i, dan k_j adalah hasil kali semua komponen matriks di kolom ke-j.
   Buktikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} \neq 0$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003

BALIK PAPAN (KALIMANTAN TIMUR), 15 – 19 SEPTEMBER 2003

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2003

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003
15 – 19 SEPTEMBER 2003
BALIK PAPAN, KALIMANTAN TIMUR

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

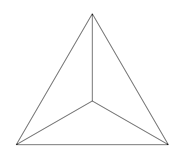
WAKTU : 180 MENIT

5. Untuk sebarang bilangan real a, b, c buktikan ketaksamaan

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

6. Balairung sebuah istana berbentuk segi-6 beraturan dengan panjang sisi 6 meter. Lantai balairung tersebut ditutupi dengan ubin-ubin keramik berbentuk segitiga samasisi dengan panjang sisi 50 cm. Setiap ubin keramik dibagi ke dalam 3 daerah segitiga yang kongruen, lihat gambar. Setiap daerah segitiga diberi satu warna tertentu sehingga setiap ubin memiliki tiga warna berbeda. Raja menginginkan agar tidak ada dua ubin yang memiliki pola warna sama. Paling sedikit berapa warna yang diperlukan ?



7. Misalkan k, m, n adalah bilangan-bilangan asli demikian, sehingga $k > n > 1$ dan faktor persekutuan terbesar k dan n sama dengan 1. Buktikan bahwa jika $k - n$ membagi $k^m - n^{m-1}$, maka $k \leq 2n - 1$.

8. Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut jika hasil kali dari dua sisi yang bukan sisi miring sama dengan tiga kali keliling segitiga.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2004

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2003

BALIK PAPAN (KALIMANTAN TIMUR), 15 – 19 SEPTEMBER 2003

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Alternatif 1 :

   $a^9 - a = a(a^8 - 1)$
   $a^9 - a = a(a^4 - 1)(a^4 + 1)$
   $a^9 - a = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$
   $a^9 - a = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$
   Karena $(a - 1)a(a + 1)$ adalah perkalian tiga bilangan bulat berurutan maka $a^9 - a$ habis dibagi $3! = 6$.

   Alternatif 2 :

   Sebuah bilangan bulat pasti akan memenuhi bahwa ia ganjil atau genap .
   * Jika a genap maka a^9 adalah genap
     Maka $a^9 - a$ adalah selisih antara dua bilangan genap sehingga $a^9 - a$ genap
   * Jika a ganjil maka a^9 adalah ganjil
     Maka $a^9 - a$ adalah selisih antara dua bilangan ganjil sehingga $a^9 - a$ genap

   Karena $a^9 - a$ genap maka berarti $a^9 - a$ habis dibagi 2.
   Akan dibuktikan bahwa $a^9 - a$ juga habis dibagi 3.

   Alternatif 2. a :

   Sebuah bilangan bulat akan memenuhi salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2
   * Jika $a = 3k \equiv 0 \pmod 3$
     $a^9 - a = 3^9k^9 - 3k = 3(3^8k^9 - k)$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3
     Penulisan lain. $a^9 - a \equiv 0^9 - 0 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.
   * Jika $a = 3k + 1 \equiv 1 \pmod 3$
     $a^9 - a = (3k + 1)^9 - (3k + 1) = 3^9k^9 + {}_9C_1\, 3^8k^8 + {}_9C_2\, 3^7k^7 + \cdots + {}_9C_7\, 3^2k^2 + {}_9C_8\, 3k + 1 - (3k + 1)$
     $a^9 - a = 3^9k^9 + {}_9C_1\, 3^8k^8 + {}_9C_2\, 3^7k^7 + \cdots + {}_9C_7\, 3^2k^2 + 24k = 3p$
     Penulisan lain. $a^9 - a \equiv 1^9 - 1 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.
     $a^9 - a$ habis dibagi 3
   * Jika $a = 3k + 2 \equiv -1 \pmod 3$
     $a^9 - a = (3k + 2)^9 - (3k + 2)$
     $a^9 - a = 3^9\, k^9 + {}_9C_1\, 3^8\, 2^1\, k^8 + {}_9C_2\, 3^7\, 2^2\, k^7 + \cdots + {}_9C_7\, 3^2\, 2^7\, k^2 + {}_9C_8\, 3k\, 2^8 + 1 - (3k + 2)$
     $a^9 - a = 3^9\, k^9 + {}_9C_1\, 3^8\, 2^1\, k^8 + {}_9C_2\, 3^7\, 2^2\, k^7 + \cdots + {}_9C_7\, 3^2\, 2^7\, k^2 + {}_9C_8\, 3k\, 2^8 + 2^9 - (3k + 2)$
     ${}_9C_8\, 3k\, 2^8 - 3k = 3k({}_9C_8 \cdot 2^8 - 1)$ yang berati habis dibagi 3
     $2^9 - 2 = 512 - 2 = 510$ habis dibagi 3.
     Penulisan lain. $a^9 - a \equiv (-1)^9 - (-1) \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.
     $a^9 - a$ habis dibagi 3

   Dapat disimpulkan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 3.

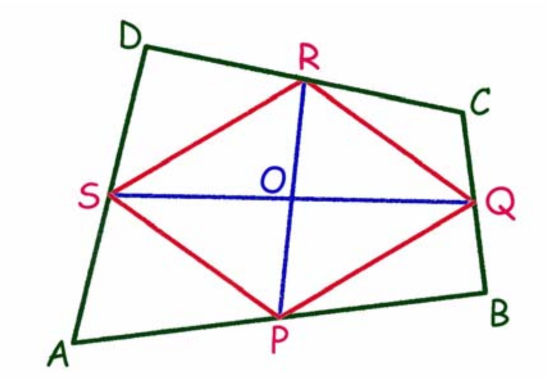
   Alternatif 2. b :

   Teorema Fermat : Untuk a bilangan bulat dan p prima maka $a^p - a$ habis dibagi p. Penulisan dalam bentuk lain adalah $a^p - a \equiv 0 \pmod p$ atau bisa juga $a^p \equiv a \pmod p$
   Berdasarkan teorema Fermat maka $a^3 - a$ habis dibagi 3 dan $(a^3)^3 - a^3$ juga habis dibagi 3.
   Maka $(a^3)^3 - a^3 + a^3 - a$ harus habis dibagi 3.
   Karena $(a^3)^3 - a^3 + a^3 - a = a^9 - a$ maka $a^9 - a$ habis dibagi 3.

   Karena 2 dan 3 relatif prima maka $a^9 - a$ habis dibagi $2 \cdot 3 = 6$

   $\therefore$ **Terbukti bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6 untuk setiap bilangan bulat a**

2.



Alternatif 1 :

Dengan cara vektor :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = 0{,}5\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = -0{,}5\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}\right) = 0{,}5\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = 0{,}5\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

Karena $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$ maka ruas garis SR dan PQ sejajar dan sama panjang.

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = 0{,}5\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} = 0{,}5\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = -0{,}5\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}\right) = 0{,}5\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

Karena $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ maka ruas garis QR dan PS sejajar dan sama panjang.

Akibatnya segiempat PQRS adalah jajaran genjang.

Karena $\angle$SOP = $\angle$QOR dan PS sejajar serta sama panjang dengan QR maka ΔSOP kongruen dengan ΔQOR yang berakibat QO = OS dan PO = OR

Alternatif 2 :

Pada ΔABC dan ΔPBQ berlaku $\angle$ABC = $\angle$PBQ serta $\frac{AB}{PA}$ = 2 dan $\frac{CB}{QB}$ = 2 yang berarti ΔABC dan ΔPBQ sebangun. Maka AC sejajar PQ dan $\frac{AC}{PQ}$ = 2.

Pada ΔADC dan ΔSDR berlaku $\angle$ADC = $\angle$SDR serta $\frac{AD}{SD}$ = 2 dan $\frac{CD}{RD}$ = 2 yang berarti ΔADC dan ΔSDR sebangun. Maka AC sejajar SR dan $\frac{AC}{SR}$ = 2 sehingga SR sejajar PQ dan SR = PQ.

Karena SR $/\!/$ PQ maka $\angle$SRP = $\angle$QPR dan $\angle$RSQ = $\angle$PQS dan karena SR = PQ maka ΔSOP kongruen dengan ΔQOR yang berakibat QO = OS dan PO = OR

Alternatif 3 :

PQRS adalah sebuah jajaran genjang (Varignon Parallelogram)

Menurut sifat jajaran genjang, diagonalnya saling membagi dua sama panjang.

$\therefore$ **Terbukti bahwa PO = OR dan QO = OS**

3. * Untuk $x^2 \le 1001$ maka $\lfloor x^2 \rfloor \le 1001$ dan $\lceil x^2 \rceil \le 1001$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil \le 2002$
   * Untuk $x^2 \ge 1002$ maka $\lfloor x^2 \rfloor \ge 1002$ dan $\lceil x^2 \rceil \ge 1002$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil \ge 2004$
   * Untuk $1001 < x^2 < 1002$ maka $\lfloor x^2 \rfloor = 1001$ dan $\lceil x^2 \rceil = 1002$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$

   Maka persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$ hanya dipenuhi oleh $1001 < x^2 < 1002$

   $\therefore$ $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$ hanya dipenuhi oleh $\sqrt{1001} < x < \sqrt{1002}$ atau $-\sqrt{1002} < x < -\sqrt{1001}$

4. Karena komponen-komponen matriks bernilai +1 atau –1 maka b_i dan k_i masing-masing juga akan bernilai +1 atau –1.

   Alternatif 1 :

   Andaikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$

   Maka harus ada 19 di antara b_1, k_1, b_2, k_2, $\cdots$, b_{19}, k_{19} yang bernilai –1. Kemungkinannya adalah :

   - Ada p genap di antara b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{19} yang bernilai –1 dan ada (19 – p) ganjil di antara k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_{19} yang bernilai –1.

     Berdasarkan fakta bahwa ada p genap di antara b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{19} yang bernilai –1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada komponen bertanda –1 sebanyak (ganjil · p + genap · ganjil) = genap

     Berdasarkan fakta bahwa ada (19 – p) ganjil di antara k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_{19} yang bernilai –1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada sebanyak (ganjil · (19 – p) + genap · genap) = ganjil komponen bertanda –1. Hal ini bertentangan dengan kenyataan sebelumnya bahwa komponen bertanda –1 harus ada sebanyak genap.

     Maka tidak mungkin bahwa ada p genap di antara b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{19} yang bernilai –1 dan ada (19 – p) ganjil di antara k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_{19} yang bernilai –1.
   - Ada q ganjil di antara b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{19} yang bernilai –1 dan ada (19 – q) genap di antara k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_{19} yang bernilai –1.

     Berdasarkan fakta bahwa ada q ganjil di antara b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{19} yang bernilai –1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada komponen bertanda –1 sebanyak (ganjil · q + genap · genap) = ganjil

     Berdasarkan fakta bahwa ada (19 – q) genap di antara k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_{19} yang bernilai –1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada sebanyak (ganjil · (19 – q) + genap · ganjil) = genap komponen bertanda –1. Hal ini bertentangan dengan kenyataan sebelumnya bahwa komponen bertanda –1 harus ada sebanyak ganjil.

     Maka tidak mungkin bahwa ada q ganjil di antara b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_{19} yang bernilai –1 dan ada (19 – q) genap di antara k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_{19} yang bernilai –1.

   Alternatif 2 :

   Pada matriks berlaku $b_1b_2b_3\cdots b_{19} = k_1k_2k_3\cdots k_{19}$ .... (1)

   Andaikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$ .... (2)

   Karena b_i dan k_j bernilai +1 atau –1 Maka harus ada 19 di antara b_1, k_1, b_2, k_2, $\cdots$, b_{19}, k_{19} yang bernilai –1.

   Jika di antara b_i ada terdapat sebanyak n buah yang bertanda –1 maka harus ada sebanyak (19–n) di antara k_i yang bertanda –1. Tetapi n dan (19–n) berbeda paritasnya (salah satunya ganjil dan satunya lagi genap), sehingga persamaan (1) tidak mungkin dapat dipenuhi. Akibatnya tidak mungkin $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$

   $\therefore$ **Terbukti $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} \neq 0$**

5. Alternatif 1 :
$(a - b)^2 \geq 0$. Maka $a^2 + b^2 \geq 2ab$
Pertidaksamaan di atas dapat diperoleh pula dari pertidaksamaan AM-GM
$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$ sehingga $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .... (1)
Kesamaan terjadi bila a = b
Berdasarkan persamaan (1) didapat :
$a^2 + c^2 \geq 2ac$ .... (2)
$b^2 + c^2 \geq 2bc$ .... (3)
Jumlahkan persamaan (1), (2) dan (3)
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ sehingga $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$ .... (4)
Bilangan kuadrat bernilai ≥ 0 maka :
$a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ .... (5)
Kesamaan terjadi hanya jika a = 0, b = 0 dan c = 0
Jumlahkan persamaan (4) + (5) sehingga $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$
Kesamaan terjadi hanya jika a = b = c = 0
$\therefore$ **Terbukti bahwa $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$**

Alternatif 2 :
$(2a - b)^2 \geq 0$
Tanda kesamaan terjadi jika 2a = b.
$4a^2 + b^2 \geq 4ab$ .... (6)
Dengan cara yang sama didapat
$4b^2 + c^2 \geq 4bc$ .... (7)
$4c^2 + a^2 \geq 4ac$ .... (8)
Tambahkan persamaan (6), (7) dan (8) didapat
$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$
Tanda kesamaan terjadi jika 2a = b, 2b = c dan 2c = a yang terpenuhi hanya jika a = b = c = 0
$\therefore$ **Terbukti bahwa $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$**

6. Segienam beraturan dibuat dari 6 buah segitiga sama sisi yang kongruen.
Luas lantai balairung = $6 \cdot ½ \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 60^o = 108 \sin 60^o$
Luas 1 buah ubin = $½ \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot \sin 60^o$
Luas lantai balairung : Luas 1 buah ubin = $8 \cdot 108 = 864$
Maka untuk menutupi lantai balairung dibutuhkan 864 buah ubin
Jika ada n buah warna maka banyaknya pola yang dapat dibuat = $({}_nC_3) \cdot (3 - 1)! =$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \geq 864$
$n(n - 1)(n - 2) \geq 2592$
Untuk n = 14 maka $n(n - 1)(n - 2) = 2184 < 2592$
Untuk n = 15 maka $n(n - 1)(n - 2) = 2730 > 2592$
$\therefore$ **Banyaknya warna minimum yang diperlukan adalah 15 buah**

7. $k - n \mid k^m - n^{m-1}$
$k - n \mid k^m - n^m + n^m - n^{m-1}$
$k - n \mid k^m - n^m + n^{m-1}(n - 1)$
Untuk $m \in$ bilangan asli maka $k - n$ membagi $k^m - n^m$.
Karena FPB $(k,n) = 1$ maka FPB$(k - n, n^{m-1}) = 1$. Akibatnya $k - n$ harus membagi $n - 1$.
Karena $k - n$ membagi $n - 1$ maka $k - n \le n - 1$
$k \le 2n - 1$
$\therefore$ **Terbukti bahwa $k \le 2n - 1$**

8. Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b dan c dengan c adalah sisi miring, maka :
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .... (1)
$ab = 3(a + b + c)$ .... (2)
Karena a, b dan c adalah bilangan bulat maka sekurang-kurangnya salah satu di antara a atau b adalah kelipatan 3.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = 3k dengan $k \in$ bilangan asli (sama saja jika dimisalkan b = 3k) maka :
$3k\sqrt{c^2 - 9k^2} = 3(3k + \sqrt{c^2 - 9k^2} + c)$
$k\sqrt{c^2 - 9k^2} = (3k + \sqrt{c^2 - 9k^2} + c)$
$(k - 1)\sqrt{c^2 - 9k^2} = c + 3k$
$(k - 1)^2(c + 3k)(c - 3k) = (c + 3k)^2$
$(k - 1)^2(c - 3k) = (c + 3k)$
$(k - 1)^2(c - 3k) = c - 3k + 6k$
$(c - 3k)(k^2 - 2k) = 6k$
Karena $k \ne 0$ maka $(c - 3k)(k - 2) = 6$ .... (3)
Karena c, $k \in$ bilangan asli maka $(k - 2)$ pasti membagi 6 dan karena $c > 3k$ maka $(k - 2) > 0$
Nilai k yang memenuhi adalah 3; 4; 5; 8
$c = 3k + \dfrac{6}{k - 2}$ .... (4)

Untuk k = 3 maka	a = 9	sehingga c = 15 dan b = 12	....	(5)
Untuk k = 4 maka	a = 12	sehingga c = 15 dan b = 9	....	(6)
Untuk k = 5 maka	a = 15	sehingga c = 17 dan b = 8	....	(7)
Untuk k = 8 maka	a = 24	sehingga c = 25 dan b = 7	....	(8)

Subtitusikan persamaan (5), (6), (7), (8) ke persamaan (2) yang ternyata semuanya memenuhi.
$\therefore$ **Panjang sisi-sisi segitiga yang memenuhi adalah :**
- **a = 9 b = 12 c = 15**
- **a = 12 b = 9 c = 15**
- **a = 8 b = 15 c = 17**
- **a = 15 b = 8 c = 17**
- **a = 7 b = 24 c = 25**
- **a = 24 b = 7 c = 25**

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2004

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2005

Bidang Matematika

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2004

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT KABUPATEN/KOTA
TAHUN 2004

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika a dan b adalah bilangan real yang memenuhi a + b = 3 dan $a^2 + ab = 7$, maka a adalah
   A. 3/7 B. 5/7 C. 3/4 D. 7/5 E. 7/3

2. Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sendiri sebanyak
   A. 3 B. 4 C. 6 D. 10 E. 12

3. Misalkan k bilangan bulat. Nilai $4^{k+1} \times 5^{k-1}$ sama dengan
   A. $\frac{4}{5} \times 20^k$ B. $\frac{4}{5} \times 20^{2k}$ C. $16 \times 20^{k-1}$ D. 20^{2k} E. 20^{k^2-1}

4. Untuk a dan b bilangan bulat dengan $a \neq 0$, notasi $a|b$ menyatakan "a membagi b". Pernyataan berikut yang *salah* adalah
   A. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka maka $a|(bc)$
   B. Jika $a|c$ dan $b|c$, maka $(ab)|c$
   C. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(b + c)$
   D. Untuk setiap bilangan bulat $a \neq 0$ berlaku $a|0$
   E. Jika $a|b$, maka $a|(bc)$, untuk setiap bilangan bulat c.

5. Di suatu hotel, rata-rata 96% kamar terpakai sepanjang sebulan liburan kenaikan kelas dan rata-rata 72% kamar terpakai sepanjang sebelas bulan lainnya. Maka rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah
   A. 70% B. 74% C. 75% D. 80% E. 84%

6. Dalam ketidaksamaan berikut, besar sudut dinyatakan dalam radian. Ketidaksamaan yang benar adalah
   A. sin 1 < sin 2 < sin 3 C. sin 1 < sin 3 < sin 2 E. sin 3 < sin 1 < sin 2
   B. sin 3 < sin 2 < sin 1 D. sin 2 < sin 1 < sin 3

7. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 6 bola putih. Secara acak diambil dua bola sekaligus. Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah
   A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{9}$ E. $\frac{5}{7}$

8. Segitiga dengan panjang sisi 6 dan 8 memiliki luas terbesar jika sisi ketiganya memiliki panjang
   A. 6 B. 8 C. 10 D. 12 E. 15

9. Pada sebuah segi6 beraturan, rasio panjang antara diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah

   A. 1 : 3 B. 1 : 2 C. 1 : $\sqrt{3}$ D. 2 : 3 E. $\sqrt{3}$: 2

10. Nomor polisi mobil-mobil di suatu negara selalu terdiri dari 4 angka. Jika jumlah keempat angka pada setiap nomor juga harus genap, mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak ada

    A. 600 B. 1800 C. 2000 D. 4500 E. 5000

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Jika $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ dan $\frac{z}{y} = \frac{4}{5}$ maka $\frac{x}{z}$ = ····

12. Jika 2004 dibagi ke dalam tiga bagian dengan perbandingan 2 : 3 : 5, maka bagian terkecil adalah ·····

13. Untuk dua bilangan bulat a dan b, penulisan a * b menyatakan sisa tak negatif ab jika dibagi 5. Nilai (–3) * 4 = ····

14. Jika luas segitiga ABC sama dengan kelilingnya, maka jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah ····

15. Agar bilangan $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$ sedekat mungkin kepada 2004, haruslah n = ····

16. Jika log p + log q = log (p + q), maka p dinyatakan dalam q adalah p = ····

17. Luas sebuah segitiga siku-siku adalah 5. Panjang sisi miring segitiga ini adalah 5. Maka keliling segitiga tersebut adalah ····

18. Jika x dan y dua bilangan asli dan x + y + xy = 34, maka nilai x + y = ·····

19. Sepuluh tim mengikuti turnamen sepakbola. Setiap tim bertemu satu kali dengan setiap tim lainnya. Pemenang setiap pertandingan memperoleh nilai 3, sedangkan yang kalah memperoleh nilai 0. Untuk pertandingan yang berakhir seri, kedua tim memperoleh nilai masing-masing 1. Di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124. Banyaknya pertandingan yang berakhir seri adalah ·····

20. Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan pemuda internasional terdiri dari 5 orang. Ada 7 orang pria dan 5 orang wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota itu harus wanita, banyaknya cara memilih anggota delegasi adalah ····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2004

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)
   a + b = 3 dan $a^2 + ab = 7$, maka a(a + b) = 7 sehingga a(3) = 7
   $\therefore$ **a =** $\frac{7}{3}$

2. (Jawaban : D)
   $2004 = 2^2 \cdot 501 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ dan 167 adalah bilangan prima.
   Maka banyaknya faktor positif dari 2004 termasuk 1 dan 2004 = (2 +1)(1 + 1)(1 + 1) = 12
   Banyaknya faktor 2004 selain 1 dan 2004 adalah = 12 − 2 = 10
   Faktor dari 2004 selain 1 dan 2004 adalah : 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002. Banyaknya faktor ada 10
   $\therefore$ Banyaknya faktor ada **10**

3. (Jawaban : A atau C)
   $4^{k+1} \times 5^{k-1} = 4 \times 4^k \times \frac{5^k}{5} = \frac{4}{5} \times 20^k$ atau
   $4^{k+1} \times 5^{k-1} = 16 \times 4^{k-1} \times 5^{k-1} = 16 \times 20^{k-1}$
   $\therefore$ $4^{k+1} \times 5^{k-1}$ sama dengan $\boldsymbol{\frac{4}{5} \times 20^k}$ **atau** $\boldsymbol{16 \times 20^{k-1}}$
   Catatan : Jawaban yang dikirimkan dari panitia pusat menyatakan hanya A saja yang benar. Namun dalam hitungan ternyata C juga bernilai sama.

4. (Jawaban : B)
   - A benar karena jika $a \mid b$ maka $a \mid (bc)$
   - B salah karena yang benar adalah jika $a \mid c$ dan $b \mid c$, maka $(ab) \mid c^2$
   - C benar
   - D benar
   - E benar sesuai dengan A

   $\therefore$ Pernyataan yang salah adalah **B**

5. (Jawaban : B)
   Rata-rata % pemakaian kamar setahun = $\frac{1 \cdot 96\% + 11 \cdot 72\%}{1 + 11}$ = 74 %
   $\therefore$ Rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah **74 %**

6. (Jawaban : E)
   1 rad ≈ $57{,}3^o$ sehingga 2 rad ≈ $114{,}6^o$ dan 3 rad ≈ $171{,}9^o$
   $\sin 114{,}6^o = \sin (180 - 114{,}6)^o = \sin 65{,}4^o$
   $\sin 171{,}9^o = \sin (180 - 171{,}9)^o = \sin 8{,}1^o$

Untuk $0 \le x \le 90^o$ berlaku bahwa $\sin x_1 < \sin x_2$ jika $x_1 < x_2$

$\therefore$ Ketidaksamaan yang benar adalah **sin 3 < sin 1 < sin 2**

Catatan : Jawaban yang dikirimkan dari panitia pusat menyatakan bahwa jawaban yang benar adalah B, namun bisa dibuktikan bahwa seharusnya jawaban yang benar adalah E. Jawaban soal ini juga bisa dibuktikan dengan hitungan dengan alat hitung berupa kalkulator atau komputer.

7. (Jawaban : B)

2 bola berwarna sama bisa didapat dari keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.

P(A) = $\frac{{}_6C_2 \cdot {}_6C_0}{{}_{12}C_2} + \frac{{}_6C_0 \cdot {}_6C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$

$\therefore$ Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah $\frac{5}{11}$

8. (Jawaban : C)

Misal segitiga tersebut adalah segitiga ABC.

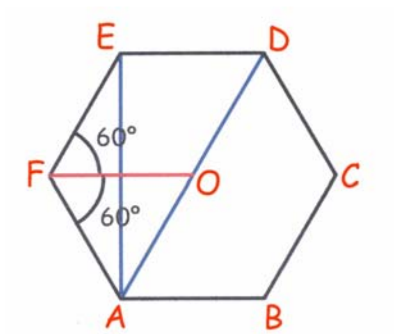
Luas segitiga = ½ ab sin C

Karena a dan b bernilai konstan, maka luas segitiga akan maksimum jika sin C bernilai maksimum. Maksimum sin C = 1 untuk C = 90^o yang berarti segitiga ABC siku-siku di C.

c = $\sqrt{6^2 + 8^2}$ = 10

$\therefore$ Panjang sisi ketiga agar segitiga tersebut memiliki luas terbesar adalah **10**.

9. (Jawaban : E)



Misal sisi segi-6 beraturan tersebut adalah a dan O adalah pusat segi-6 beraturan.

Karena bangun adalah segi-6 beraturan maka berlaku :

OA = OB = OC = OD = OE = OF = AB = BC = CD = DE = EF = AF = a

$\angle AFO = \angle OFE = 60^o$

$(AE)^2 = (AF)^2 + (FE)^2 - 2(AF)(FE) \cos 120^o$

$(AE)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot (-½)$

$(AE) = a\sqrt{3}$

(AD) = (AO) + (OD) = a + a = 2a

(AE) : (AD) = $\sqrt{3}$: 2

$\therefore$ Rasio panjang diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah $\sqrt{3}$ **: 2**

10. (Jawaban : D)
Untuk plat angka pertama tidak boleh 0. Agar jumlah keempat angka tersebut genap, maka keempat angka tersebut harus genap atau keempatnya harus ganjil atau 2 genap dan 2 ganjil.
- Jika keempat angka tersebut genap maka banyaknya plat = 4 x 5 x 5 x 5 = 500
- Jika keempat angka tersebut ganjil maka banyaknya plat = 5 x 5 x 5 x 5 = 625
- Jika keempat angak tersebut terdiri dari 2 genap dan 2 ganjil
  Misal angka genap = p dan angka ganjil = j
  Banyaknya susunan angka genap dan ganjil ada $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ = 6, yaitu : ppjj, pjpj, pjjp, jjpp, jpjp, jppj.
  Untuk susunan ppjj, pjpj, pjjp, banyaknya plat untuk masing-masing susunan = 4x5x5x5 = 500.
  Untuk susunan jjpp, jpjp, jppj, banyaknya plat untuk masing-masing susunan = 5x5x5x5 = 625.

$\therefore$ Mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak = 500 + 625 + 3(500) + 3(625) = **4500.**

BAGIAN KEDUA

11. $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} : \frac{z}{y} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$

$\therefore$ $\frac{x}{z} = \frac{5}{6}$

12. Bagian yang terkecil = $\frac{2}{2+3+5} \cdot 2004$ = $\frac{4008}{10}$

$\therefore$ Bagian yang terkecil adalah **400,8**

13. (–3) · 4 = –12 = (–3) · 5 + 3
Maka : –12 dibagi 5 akan bersisa 3

$\therefore$ (–3) * 4 = **3**

14. Misal jari-jari lingkaran dalam sama dengan r dan ketiga sisinya adalah a, b dan c, maka :
Luas segitiga = ½ r (a + b + c)
Luas segitiga = ½ r · Keliling segitiga
Karena Luas segitiga sama dengan Keliling segitiga maka r = 2

$\therefore$ Jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah **2**

15. $2^o + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{2^o(2^{n+1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$
Diinginkan $2^{n+1} - 1$ sedekat mungkin ke 2004 sedangkan 2^{10} = 1024 dan 2^{11} = 2048, maka n = 10

$\therefore$ n = **10**

16. log p + log q = log (p + q)
    log (pq) = log (p + q)
    pq = p + q
    p(q − 1) = q
    $\therefore$ p = $\frac{q}{q-1}$

17. Misal sisi siku-siku segitiga tersebut adalah a dan b.
    Luas segitiga = ½ ab = 5
    ab = 10 .... (1) dan $a^2 + b^2 = 5^2 = 25$ .... (2)
    $(a + b)^2 - 2ab = 25$
    $(a + b)^2 - 2\cdot 10 = 25$ sehingga a + b = $\sqrt{45}$ = $3\sqrt{5}$
    Keliling segitiga = 5 + a + b
    $\therefore$ Keliling setiga tersebut = **5 + 3**$\sqrt{5}$

18. x + y + xy = 34
    (x + 1) (y + 1) = 34 + 1 = 35 = 5 · 7
    Karena x dan y bilangan asli maka persamaan hanya dipenuhi jika x + 1 = 5 dan y + 1 = 7 atau x + 1 = 7 dan y + 1 = 5. Akibatnya x = 4 dan y = 6 atau x = 6 dan y = 4
    x + y = 4 + 6 = 6 + 4 = 10
    $\therefore$ **x + y =** 10

19. Jika dalam pertandingan ada salah satu yang menang maka nilai total kedua tim = 3.
    Jika dalam pertandingan berakhir seri maka nilai total kedua tim = 1 + 1 = 2 atau ada 1 nilai yang hilang per pertandingan yang berakhir seri.
    Banyaknya pertandingan keseluruhan = ${}_{10}C_2$ = 45 pertandingan.
    Jumlah nilai untuk seluruh tim maksimum terjadi jika tidak ada pertandingan yang berakhir seri, yaitu 3 x 45 = 135.
    Karena di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124, maka banyaknya pertandingan yang berakhir seri = 135 − 124 = 11
    $\therefore$ Banyaknya pertandingan yang berakhir seri = **11**

20. Susunan delegasi yang mungkin adalah 4 pria dan 1 wanita atau 3 pria dan 2 wanita atau 2 pria dan 3 wanita atau 1 pria dan 4 wanita atau 5 wanita .
    Banyaknya cara memilih anggota delegasi = ${}_7C_4 \cdot {}_5C_1 + {}_7C_3 \cdot {}_5C_2 + {}_7C_2 \cdot {}_5C_3 + {}_7C_1 \cdot {}_5C_4 + {}_7C_0 \cdot {}_5C_5$ = 35 · 5 + 35 · 10 + 21 · 10 + 7 · 5 + 1 · 1 = 175 + 350 + 210 + 35 + 1 = 771 cara.
    $\therefore$ Banyaknya cara memilih anggota delegasi ada **771.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2004

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

BAGIAN PERTAMA

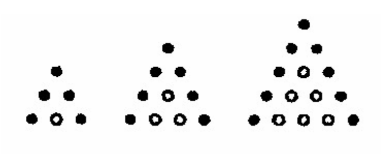
1. Misalkan x dan y adalah bilangan real tak nol. Jika $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10$ dan x + y = 40, berapakah xy ?

2. Sebotol sirup bisa digunakan untuk membuat 60 gelas minuman jika dilarutkan dalam air dengan perbandingan 1 bagian sirup untuk 4 bagian air. Berapa gelas minuman yang diperoleh dari sebotol sirup jika perbandingan larutan adalah 1 bagian sirup untuk 5 bagian air ?

3. Penduduk Jawa Tengah adalah 25 % dari penduduk pulau Jawa dan 15 % dari penduduk Indonesia. Berapa persen penduduk Indonesia yang tinggal di luar pulau Jawa ?

4. Ketika menghitung volume sebuah tabung, Dina melakukan kesalahan. Ia memasukkan diameter alas ke dalam rumus volume tabung, padahal seharusnya jari-jari alas yang dimasukkan. Berapakah rasio hasil perhitungan Dinas terhadap hasil yang seharusnya ?

5. Tiga lingkaran melalui titik pusat koordinat (0, 0). Pusat lingkaran pertama terletak di kuadran I, pusat lingkaran kedua berada di kuadran II dan pusat lingkaran ketiga berada pada kuadran III. Jika P adalah sebuah titik yang berada di dalam ketiga lingkaran tersebut, di kuadran manakah titik ini berada ?

6. 

   Diberikan berturut-turut (dari kiri ke kanan) gambar-gambar pertama, kedua dan ketiga dari suatu barisan gambar. Berapakah banyaknya bulatan hitam pada gambar ke-n ?

7. Diberikan segitiga ABC dengan perbandingan panjang sisi AC : CB = 3 : 4. Garis bagi sudut luar C memotong perpanjangan BA di P (titik A terletak di antara titik-titik P dan B). Tentukan perbandingan panjang PA : AB.

8. Berapakah banyaknya barisan bilangan bulat tak negatif (x, y, z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 99 ?

9. Tentukan himpunan semua bilangan asli n sehingga n(n − 1)(2n − 1) habis dibagi 6.

10. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^2 < |2x - 8|$.

11. Dari antara 6 buah kartu bernomor 1 sampai 6 diambil dua kartu secara acak. Berapakah peluang terambilnya dua kartu yang jumlah nomornya adalah 6 ?

12. Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu dari diagonal tersebut panjangnya 5, berapakah luas trapesium tersebut ?

13. Tentukan nilai dari $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{2005}\right)$.

14. Santi dan Tini berlari sepanjang sebuah lintasan yang berbentuk lingkaran. Keduanya mulai berlari pada saat yang sama dari titik P, tetapi mengambil arah berlawanan. Santi berlari 1½ kali lebih cepat daripada Tini. Jika PQ adalah garis tengah lingkaran lintasan dan keduanya berpapasan untuk pertama kalinya di titik R, berapa derajatkah besar $\angle RPQ$?

15. Pada sisi-sisi SU, TS dan UT dari ΔSTU dipilih titik-titik P, Q dan R berturut-turut sehingga SP = $\frac{1}{4}$ SU, TQ = $\frac{1}{2}$ TS dan UR = $\frac{1}{3}$ UT. Jika luas segitiga STU adalah 1, berapakah luas ΔPQR ?

16. Dua bilangan real x, y memenuhi $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$. Berapakah nilai x + y ?

17. Berapakah banyak minimal titik yang harus diambil dari sebuah persegi dengan panjang sisi 2, agar dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya tidak lebih dari $\frac{1}{2}\sqrt{2}$?

18. Misalkan f sebuah fungsi yang memenuhi f(x) f(y) − f(xy) = x + y, untuk setiap bilangan bulat x dan y. Berapakah nilai f(2004) ?

19. Notasi fpb(a, b) menyatakan *faktor persekutuan terbesar* dari bilangan bulat a dan b. Tiga bilangan asli $a_1 < a_2 < a_3$ memenuhi fpb(a_1, a_2, a_3) = 1, tetapi fpb(a_i, a_j) > 1 jika $i \neq j$, i, j = 1, 2, 3. Tentukan (a_1, a_2, a_3) agar $a_1 + a_2 + a_3$ minimal.

20. Didefinisikan a o b = a + b + ab, untuk semua bilangan bulat a, b. Kita katakan bahwa bilangan bulat a adalah *faktor* dari bilangan bulat c bilamana terdapat bilangan bulat b yang memenuhi a o b = c. Tentukan semua faktor positif dari 67.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2004

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

BAGIAN KEDUA

1. Tentukan semua (x,y,z), dengan x, y, z bilangan-bilangan real, yang memenuhi sekaligus ketiga persamaan berikut :

$$x^2 + 4 = y^3 + 4x - z^3$$
$$y^2 + 4 = z^3 + 4y - x^3$$
$$z^2 + 4 = x^3 + 4z - y^3$$

2. Pada segitiga ABC diberikan titik-titik D, E, dan F yang terletak berturut-turut pada sisi BC, CA dan AB sehingga garis-garis AD, BE dan CF berpotongan di titik O. Buktikan bahwa

$$\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2$$

3. Beni, Coki dan Doni tingggal serumah dan belajar di sekolah yang sama. Setiap pagi ketiganya berangkat pada saat yang sama. Untuk sampai ke sekolah Beni memerlukan waktu 2 menit, Coki memerlukan waktu 4 menit, sedangkan Doni memerlukan waktu 8 menit. Selain itu tersedia sebuah sepeda yang hanya dapat dinaiki satu orang. Dengan sepeda, setiap orang memerlukan waktu hanya 1 menit.
   Tunjukkan bahwa adalah mungkin bagi ketiganya untuk sampai ke sekolah dalam waktu tidak lebih dari $2\frac{3}{4}$ menit.

4. Buktikan bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e, dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$.

5. *Titik letis* pada bidang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa pasangan bilangan bulat.
   Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik letis berbeda pada bidang.
   Buktikan bahwa terdapat sepasang titik (P_i, P_j), $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10$. Maka $\frac{x+y}{xy}=10$. Karena x + y = 40 maka $\frac{40}{xy}=10$

   $\therefore$ xy = **4**

2. Keadaan I :
   Misalkan dalam 1 gelas terdapat a bagian sirup maka banyaknya bagian air adalah 4a bagian. Karena dalam satu gelas terdapat a bagian sirup maka dalam satu botol sirup terdapat 60a bagian sirup. Sedangkan dalam 1 gelas terdapat 5a bagian.
   Keadaan II :
   Jika dalam gelas terdapat b bagian sirup, maka banyaknya bagian air adalah 5b bagian. Karena dalam satu gelas terdapat b bagian sirup maka dalam x gelas terdapat bx bagian sirup. Sedangkan dalam 1 gelas terdapat 6b bagian.
   Dari keadaan I dan keadaan II didapat 5a = 6b.
   Misalkan dari campuran tersebut dapat dibuat x gelas, maka :
   bx = 60a = 12 $\cdot$ (6b) sehingga x = 72
   $\therefore$ Banyaknya gelas yang diperoleh adalah **72** gelas

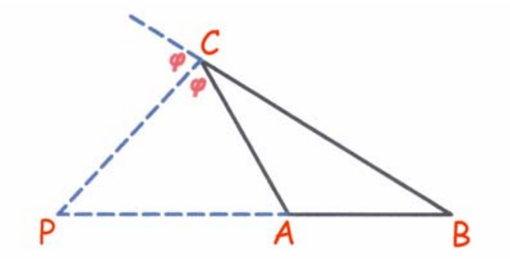
3. Misalkan penduduk Jawa tengah = JT
   Penduduk Jawa = J
   Penduduk Indonesia = I
   JT = 25% J
   JT = 15% I
   25% J = 15% I
   J = 60% I
   Karena penduduk Jawa = 60% penduduk Indonesia maka
   $\therefore$ Penduduk Indonesia yang tinggal di luar pulau Jawa = **40%**

4. Volume seharusnya = $\pi r^2 t$
   Volume perhitungan Dina = $\pi D^2 t$ = $4\pi r^2 t$
   Rasio perhitungan Dinas terhadap hasil seharusnya = $\frac{4\pi r^2 t}{\pi r^2 t}$ = 4
   $\therefore$ Rasio perhitungan Dina terhadap hasil seharusnya = **4**

5. * Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran I dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran III.
   * Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran II dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran IV.
   * Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran III dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran I.
   $\therefore$ Titik P hanya mungkin terletak di **kuadran II.**

6. Jika panjang sisi segitiga adalah k titik maka banyaknya bulatan hitam = 2k − 1.
   Pada gambar ke-n panjang sisi segitiga = n + 2 titik.
   Banyaknya bulatan hitam = 2(n + 2) − 1 = 2n + 3
   ∴ Banyaknya bulatan hitam pada gambar ke-n adalah **2n + 3**

7. Karena CP adalah garis bagi maka berlaku AC : CB = PA : PB. Maka $PA = \frac{3}{4}PB$



PB = PA + AB

$\frac{4}{3}$ PA = PA + PB.

PA = 3 AB

∴ PA : AB = **3 : 1**

8. Alternatif 1 :
   * Untuk x = 0, maka y + z = 99.
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 100 yaitu (0,99), (1,98), (2,97), ⋯, (99,0)
   * Untuk x = 1, maka y + z = 98.
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 99 yaitu (0,98), (1,97), (2,96), ⋯, (98,0)
   * Untuk x = 2, maka y + z = 97.
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 98 yaitu (0,97), (1,96), (2,95), ⋯, (97,0)
   * Untuk x = 3, maka y + z = 96.
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 97 yaitu (0,96), (1,95), (2,94), ⋯, (96,0)

   ⋮

   * Untuk x = 99, maka y + z = 0
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 1 yaitu (0,0)

   Banyaknya barisan bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi = 100 + 99 + 98+ ⋯ + 1 = $\frac{100}{2}(100+1)$

   ∴ Banyaknya barisan bilangan bulat (x,y,z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 99 ada **5050.**

   Alternatif 2 :
   Misalkan $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r$ dengan x_i bulat ≥ 0 untuk i = 1, 2, ⋯, n. Maka banyaknya pasangan ($x_1, x_2, \cdots, x_n$) yang memenuhi adalah $\frac{(r+(n-1))!}{r!(n-1)!}$ = ${}_{r+n-1}C_{n-1}$

   Diketahui x + y + z = 99 dengan x, y , z ≥ 0 dan x, y, z bulat.

   Banyaknya tripel bilangan bulat tak negatif (x, y, z) yang memenuhi = $\frac{101!}{99!\cdot 2!}$ = 5050.

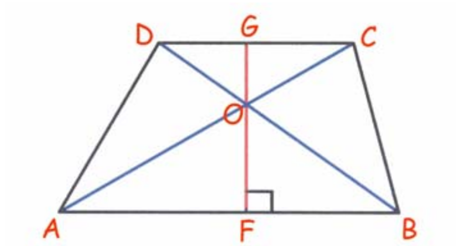
   ∴ Banyaknya barisan bilangan bulat (x,y,z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 99 ada **5050.**

9. n(n – 1)(2n – 1) = n(n – 1)(2n + 2 – 3)
= 2n(n – 1)(n + 1) – 3n(n – 1)
(n – 1), n, (n + 1) adalah 3 bilangan bulat berurutan, maka (n – 1)n(n + 1) habis dibagi 3! = 6.
n(n – 1) juga habis dibagi 2! = 2.
Maka 3n(n – 1) pasti habis dibagi 6.
Akibatnya berapa pun nilai n bilangan asli akan memenuhi n(n – 1)(2n – 1) habis dibagi 6.
∴ Himpunan semua n asli sehingga n(n – 1)(2n – 1) habis dibagi 6 adalah **{n | n ∈ bilangan asli}**

10. * Jika $x \le 4$ maka $|2x - 8| = 8 - 2x$
Pertidaksamaan menjadi $x^2 < 8 - 2x$
$(x + 4)(x - 2) < 0$
$-4 < x < 2$
Ketaksamaan di atas memenuhi syarat awal $x \le 4$.
* Jika $x \ge 4$ maka $|2x - 8| = 2x - 8$
Pertidaksamaan menjadi $x^2 < 2x - 8$
$x^2 - 2x + 8 < 0$
$(x - 1)^2 + 7 < 0$
Ruas kiri adalah definit positif sehingga tidak ada penyelesaian x yang memenuhi.
∴ Penyelesaian x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 < |2x - 8|$ adalah **$-4 < x < 2$**

11. Banyaknya pasangan kartu yang jumlahnya 6 ada 2 yaitu (1,5) dan (2,4)
Peluang terambilnya 2 kartu yang jumlahnya nomornya 6 adalah $\frac{2}{{}_6C_2}$
∴ Peluang terambilnya 2 kartu yang jumlah nomornya 6 adalah $\frac{2}{15}$

12. Alternatif 1 :



Misal ∠ACD = α maka ∠GOD = ∠CAB = ∠BOF = α

$\sin \alpha = \frac{CE}{CA} = \frac{FG}{CA} = \frac{4}{5}$ ······· (1) sehingga $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ······· (2) dan $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ······· (3)

Misal CO = a dan GO = b maka OA = 5 – a dan OF = 4 – b sebab FG adalah tinggi trapesium.

$GC = CO \cos \alpha = \frac{3}{5}a$

$DG = GO \tan \alpha = \frac{4}{3}b$

DC = DG + GC = $\frac{3}{5}$a + $\frac{4}{3}$b .... (4)

AF = OA cos α = (5 − a) $\frac{3}{5}$ = 3 − $\frac{3}{5}$a

FB = OF tan α = (4 − b) $\frac{4}{3}$ = $\frac{16}{3}$ − $\frac{4}{3}$b

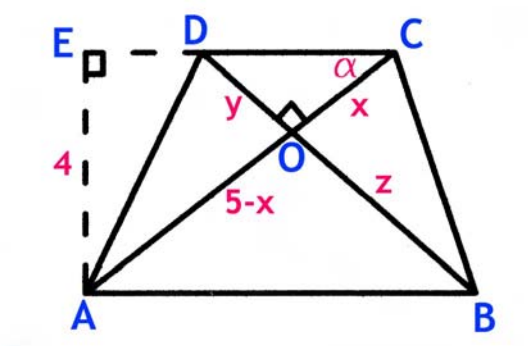
AB = AF + FB = 3 − $\frac{3}{5}$a + $\frac{16}{3}$ − $\frac{4}{3}$b = $\frac{25}{3}$ − $\frac{3}{5}$a − $\frac{4}{3}$b

Luas trapesium = $\frac{1}{2}(DC + AB)FG$

Dari persamaan (4) dan (5) didapat luas trapesium = $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{3}\right) \cdot 4$ = $\frac{50}{3}$

∴ Luas trapesium = $\frac{50}{3}$

Alternatif 2 :
Misalkan OC = x maka OA = 5 − x
Misalkan juga OD = y dan OB = z.



Jelas bahwa ΔOAB sebangun dengan ΔOCD sehingga

$\frac{5-x}{x} = \frac{z}{y}$ maka $\frac{y}{x} = \frac{y+z}{5}$ .... (5)

Misalkan juga ∠ACD = α maka tg α = 4/3
Karena AC tegak lurus BD maka tg α = y/x = 4/3 .... (6)
Subtitusikan persamaan (6) ke persamaan (5)

Maka $y + z = \frac{20}{3}$

Karena AC tegak lurus BD maka luas trapesium = ½ · AC · BD
Luas trapesium = ½ · 5 · (y + z)

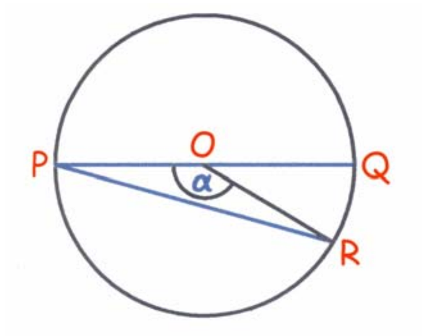
Luas trapesium = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{20}{3}$

∴ Luas trapesium = $\frac{50}{3}$

13. $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{2005}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2003}{2005}$

$\therefore\ \left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{2005}\right)=\frac{1}{2005}$

14. Karena Tini lebih lambat dari Santi maka panjang busur yang ditempuhnya akan lebih pendek dari yang ditempuh Santi.



Misal panjang busur yang ditempuh Tini = a maka panjang busur yang ditempuh Santi = $\frac{3}{2}$a.

a + $\frac{3}{2}$a = K dengan K adalah keliling lingkaran.

a = $\frac{2}{5}$K

$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{a}{K}=\frac{2}{5}$

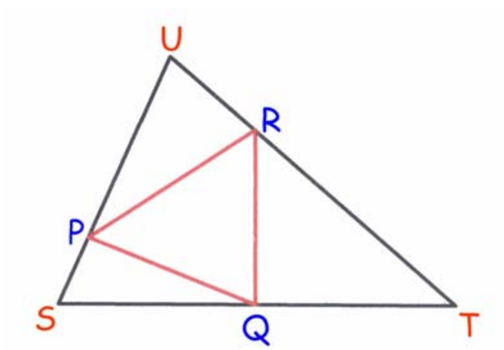
$\alpha = 144^o$

Karena O adalah pusat lingkaran maka ΔOPR adalah segitiga sama kaki.

$\angle$RPO = $\angle$RPQ = $\frac{1}{2}$($180^o - 144^o$)

$\therefore$ $\angle$RPQ = **18^o**

15.



Misal panjang sisi TU = a, SU = b dan ST = c serta $\angle$UST = α, $\angle$STU = β dan $\angle$TUS = γ, maka :

Luas ΔSTU = $\frac{1}{2}$ab sin γ = $\frac{1}{2}$ac sin β = $\frac{1}{2}$bc sin α = 1

Luas ΔSPQ = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}c\right)$sin α = $\frac{1}{8}$ Luas ΔSTU = $\frac{1}{8}$

Luas ΔTQR = $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{1}{2}c\right)$sin β = $\frac{1}{3}$ Luas ΔSTU = $\frac{1}{3}$

Luas ΔUPR = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{3}{4}b\right)$sin γ = $\frac{1}{4}$ Luas ΔSTU = $\frac{1}{4}$

Luas ΔPQR = Luas ΔSTU − Luas ΔSPQ − Luas ΔTQR − Luas ΔUPR = $1-\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

∴ Luas ΔPQR = $\frac{7}{24}$

16. $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$ = 1

$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}$ .... (1)

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$

$(-1)(-1)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$

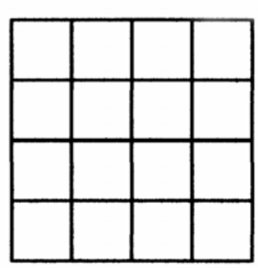
$x-\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{y-\sqrt{y^2+1}}$ .... (2)

Jumlahkan persamaan (1) dan (2) sehingga $2x=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{y-\sqrt{y^2+1}}=\frac{2y}{(-1)}$

−x = y

∴ **x + y = 0**

17. Pada sebuah persegi dengan panjang sisi = a, jarak terjauh dua titik yang terletak pada persegi adalah a$\sqrt{2}$ jika kedua titik merupakan ujung-ujung diagonal bidang persegi tersebut.



Bagi persegi dengan panjang sisi 2 tersebut menjadi 16 persegi dengan panjang sisi masing-masing = $\frac{1}{2}$ sehingga jarak terjauh 2 titik yang terletak pada masing-masing persegi adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Jika terdapat 16 titik, maka titik-titik tersebut masih dapat didistribusikan masing-masing 1 titik yang terletak di dalam persegi kecil sehingga masih belum dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jika terdapat 17 titik maka sesuai *Pigeon Hole Principle* maka sekurang-kurangnya ada satu persegi kecil berisi sekurang-kurangnya 2 titik sehingga dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$\therefore$ Jumlah minimal titik yang harus diambil dari dalam sebuah persegi dengan panjang sisi 2 agar dapat dijamin senantiasa terambil 2 titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ adalah **17**.

18. $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

* Jika x = 0 dan y = 0, maka $f(0)f(0) - f(0) = 0$

  $f(0) (f(0) - 1) = 0$. Maka $f(0) = 0$ atau $f(0) = 1$

* Jika x = 1 dan y = 0, maka $f(1)f(0) - f(0) = 1$
  - Jika f(0) = 0, maka 0 = 1 yang berarti tidak mungkin f(0) = 0 maka f(0) = 1
  - Untuk f(0) = 1 maka $f(1) - 1 = 1$ sehingga f(1) = 2

* Jika x = 2004 dan y = 1 maka $f(2004)f(1) - f(2004) = 2005$

  $2f(2004) - f(2004) = 2005$ sehingga f(2004) = 2005

* Jika x = 2004 dan y = 0 maka $f(2004)f(0) - f(0) = 2004$

  $f(2004) - 1 = 2004$ sehingga f(2004) = 2005

$\therefore$ f(2004) = **2005**

19. fpb(a_1, a_2, a_3) = 1.

Karena fpb(a_i, a_j) > 1 untuk $i \neq j$, i, j = 1, 2, 3 maka a_i dan a_j untuk $i \neq j$, i, j = 1, 2, 3 tidak saling prima relatif. Misalkan fpb(a_1, a_2) = q, fpb(a_1, a_3) = p dan fpb(a_1, a_2) = r dengan p, q, r > 1.

Maka a_i dengan i = 1, 2, 3 akan berbentuk :

$a_1 = pq$

$a_2 = qr$

$a_3 = pr$

p dan q, q dan r, p dan r masing-masing saling prima relatif.

3 bilangan terkecil (p, q, r) yang memenuhi adalah (2, 3, 5) sehingga $a_1 = 2 \cdot 3 = 6$, $a_2 = 2 \cdot 5 = 10$ dan $a_3 = 3 \cdot 5 = 15$.

$\therefore$ Agar $a_1 + a_2 + a_3$ minimal maka (a_1, a_2, a_3) = **(6, 10, 15)**

20. a o b = a + b + ab

c = a + b + ab

67 = a + b + ab

67 = (a + 1) (b + 1) − 1

(a + 1) (b + 1) = 68

Faktor yang sebenarnya dari 68 adalah 1, 2, 4, 17, 34 dan 68

Jika a + 1 = 1 maka a = 0 Jika a + 1 = 2 maka a = 1 Jika a + 1 = 4 maka a = 3

Jika a + 1 = 17 maka a = 16 Jika a + 1 = 34 maka a = 33 Jika a + 1 = 68 maka a = 67

∴ *faktor* positif dari 67 adalah **1, 3, 16, 33 dan 67**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

TINGKAT PROVINSI TAHUN 2004

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

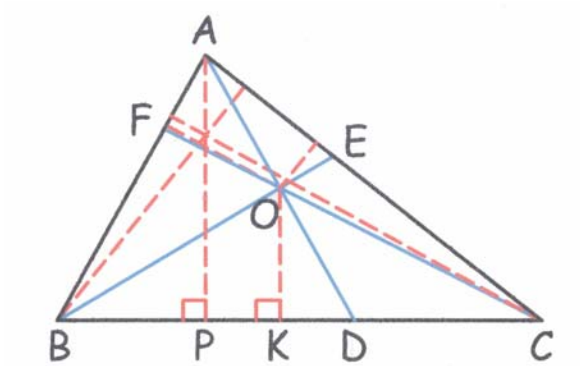
Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. $x^2 + 4 = y^3 + 4x - z^3$ .... (1)
$y^2 + 4 = z^3 + 4y - x^3$ .... (2)
$z^2 + 4 = x^3 + 4z - y^3$ .... (3)
Jumlahkan (1) + (2) + (3) sehingga $x^2 + 4 + y^2 + 4 + z^2 + 4 = 4x + 4y + 4z$
$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 0$
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$
Karena persamaan kuadrat tidak mungkin negatif, maka persamaan di atas hanya dipenuhi jika :
$x - 2 = 0$; $y - 2 = 0$ dan $z - 2 = 0$
Didapat $x = 2$; $y = 2$ dan $z = 2$. Subtitusikan hasil ini ke persamaan (1), (2) dan (3)
Persamaan (1), $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$. Memenuhi 8 = 8
Persamaan (2), $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$. Memenuhi 8 = 8
Persamaan (3), $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$. Memenuhi 8 = 8
$\therefore$ **(x, y, z) yang memenuhi adalah (2, 2, 2)**

2. Dibuat garis tinggi pada segitiga ABC dan segitiga BOC yang masing-masing ditarik dari titik A dan O. Garis tinggi ini masing-masing memotong sisi BC di titik P dan K.



Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}(BC)(AP)$ dan Luas $\Delta BOC = \frac{1}{2}(BC)(OK)$

$$\frac{Luas\ \Delta BOC}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{OK}{AP} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ΔDAP sebangun dengan ΔDOK sehingga $\frac{OD}{AD} = \frac{OK}{AP}$ .... (2)

Dari (1) dan (2) didapat $\frac{Luas\ \Delta BOC}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{OD}{AD}$ .... (3)

Dengan cara yang sama didapat $\frac{Luas\ \Delta AOC}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{OE}{BE}$ .... (4) dan $\frac{Luas\ \Delta AOB}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{OF}{CF}$ ··· (5)

Luas ΔBOC + Luas ΔAOC + Luas ΔAOB = Luas ΔABC

$$\frac{Luas\ \Delta BOC}{Luas\ \Delta ABC} + \frac{Luas\ \Delta AOC}{Luas\ \Delta ABC} + \frac{Luas\ \Delta AOB}{Luas\ \Delta ABC} = 1$$

$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$

$1-\frac{OA}{AD}+1-\frac{OB}{BE}+1-\frac{OC}{CF}=1$ sehingga $\frac{OA}{AD}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}=2$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\frac{OA}{AD}+\frac{OB}{BE}+\frac{OC}{CF}=2$

3. Misal jarak dari rumah mereka ke sekolah = S
   Untuk Doni :

   Misalkan agar waktu yang diperlukan Doni adalah $2\frac{3}{4}$ menit maka ia harus naik sepeda sejauh X dan sisanya dengan jalan kaki dengan catatan bahwa Doni tidak pernah istirahat atau bergerak mundur.

   $\frac{X}{S}+\frac{(S-X)8}{S}=\frac{11}{4}$. Maka 4X + 32S − 32X = 11S sehingga X = $\frac{3}{4}$S

   Untuk Coki :

   Misalkan agar waktu yang diperlukan Coki adalah $2\frac{3}{4}$ menit maka ia harus naik sepeda sejauh Y dan sisanya dengan jalan kaki dengan catatan bahwa Coki tidak pernah istirahat atau bergerak mundur.

   $\frac{Y}{S}+\frac{(S-Y)4}{S}=\frac{11}{4}$. Maka 4Y + 16S − 16Y = 11S sehingga Y = $\frac{5}{12}$S

   Karena $\frac{3}{4}$S + $\frac{5}{12}$S = $1\frac{1}{6}$S maka berarti sepeda harus dimundurkan dalam perjalanannya.

   Alternatif 1:

   Doni naik sepeda sejauh $\frac{3}{4}$S lalu melanjutkan perjalan dengan jalan kaki. Maka ia akan sampai dalam waktu $\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 8=2\frac{3}{4}$ menit.

   Beni akan sampai di tempat di mana sepeda ditinggalkan dalam waktu $1\frac{1}{2}$ menit. Agar Coki juga dapat sampai di sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka Beni harus memundurkan sepedanya menuju ke arah rumahnya. Anggap Beni memundurkan sepedanya sejauh Z dari tempat di mana sepeda tersebut ditemukan olehnya.

   Alternatif 1a :

   Jika yang diinginkan adalah Beni yang mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka :

   $\frac{3}{4}\cdot 2+\frac{Z}{S}+\frac{(Z+0{,}25S)}{S}\cdot 2=\frac{11}{4}$. Maka 4Z + 8Z + 2S = 5S sehingga $Z=\frac{1}{4}S$. Artinya posisi sepeda kini berada di tengah-tengah antara rumah dan sekolah. Waktu yang diperlukan sampai dengan sepeda sampai di tempat tersebut adalah $\left(1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ menit = $1\frac{3}{4}$ menit. Waktu yang diperlukan Coki untuk mencapai pertengahan rumah dan sekolah adalah 2 menit > $1\frac{3}{4}$ menit. Artinya ketika ia mencapai tempat tersebut, sepeda telah berada di sana.

Waktu yang diperlukan Coki untuk mencapai sekolah adalah $2+\frac{1}{2}\cdot 1 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$ menit.

$\therefore$ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{3}{4}$ menit ; Coki = $2\frac{1}{2}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit.**

Alternatif 1b :

Jika yang diinginkan adalah Coki yang mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka sesuai dengan hitungan sebelumnya, sepeda harus ditaruh pada $\frac{5}{12}$S dihitung dari sekolah atau $\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}$S dihitung dari tempat dimana sepeda ditemukan oleh Beni.

Waktu yang diperlukan Beni untuk mencapai sekolah adalah $\frac{3}{4}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{12}\cdot 2 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$ menit.

$\therefore$ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{1}{2}$ menit ; Coki = $2\frac{3}{4}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit.**

Alternatif 2 :

Coki naik sepeda sejauh $\frac{1}{2}$S dan melanjutkan perjalannya dengan jalan kaki. Waktu yang diperlukan untuk mencapai sekolah adalah $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 4 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$ menit

Beni akan mencapai pertengahan jarak terlebih dulu. Agar Doni dapat mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka Beni harus memundurkan sepedanya sejauh $\frac{1}{4}$S. Waktu yang diperlukan agar sepeda sampai pada jarak $\frac{1}{4}$S dari rumah adalah $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}$ menit. Waktu yang diperlukan Doni untuk mencapai jarak ini adalah $\frac{1}{4}\cdot 8 = 2$ menit > $\frac{3}{4}$ menit. Artinya sepeda telah berada di sana saat Doni mencapai tempat tersebut.

Waktu yang diperlukan Beni untuk mencapai sekolah adalah $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot 2 = 2\frac{3}{4}$ menit.

$\therefore$ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{3}{4}$ menit ; Coki = $2\frac{1}{2}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit**

4. Anggap terdapat persamaan yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan k dan e bulat dan e > 2
Jika ada m bilangan asli yang memenuhi, maka ruas kiri ≥ 2 yang berarti k ≥ 2 ·············· (1)
Karena persamaan berbentuk $ab = c^d$ dengan a, b, c, d ∈ Asli, maka a membagi c atau c membagi a.

Alternatif 1 :

* Jika k membagi m
maka $m = p \cdot k^q$ dengan p bukan kelipatan k dan q ∈ bilangan bulat dan p ∈ bilangan asli.
Persamaan menjadi $p^3k^{3q} + pk^q = k^e$ sehingga $p^3k^{2q} + p = k^{e-q}$ ·················· (2)
- Jika e > q
Ruas kanan persamaan (2) adalah sebuah bilangan yang habis dibagi k sedangkan ruas kiri adalah sebuah bilangan yang bersisa p jika dibagi k dengan p bukan bilangan kelipatan k. Maka tanda kesamaan tidak akan mungkin terjadi.
- Jika e ≤ q
Ruas kanan persamaan (2) bernilai ≤ 1
Karena p ≥ 1 dan k ≥ 2 maka $p^3k^{2q} + p \geq 3$ yang berarti tidak ada nilai p dan k yang memenuhi.

Maka tidak ada nilai m ∈ bilangan asli yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan k membagi m.

* Jika m membagi k
maka k = rm dengan r ∈ bilangan asli sebab k ≥ 2
Persamaan akan menjadi $m(m^2 + 1) = r^em^e$ sehingga $m + \frac{1}{m} = r^e m^{e-2}$ ················· (3)
- Jika m = 1
Persamaan (3) menjadi $2 = r^e$. Karena $2 = 2^1$ maka persamaan hanya akan dipenuhi jika r = 2 dan e = 1 yang tidak memenuhi syarat bahwa e ≥ 2.
- Jika m > 1
Ruas kiri persamaan (3) bukan merupakan bilangan bulat sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sebab e ≥ 2.

Maka tidak ada nilai m ∈ bilangan asli yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan m membagi k.

∴ **Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e, dengan e ≥ 2, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$**

Alternatif 2 :

FPB $(m, m^2 + 1)$ = FPB(m, 1) = 1 yang artinya m dan $m^2 + 1$ relatif prima.
Jadi, persamaan $m(m^2 + 1) = k^e$ hanya akan terpenuhi jika m dan $m^2 + 1$ memiliki pangkat yang sama.
Misalkan $m = a^e$ dan $m^2 + 1 = b^e = a^{2e} + 1$.
Karena $(a^2 + 1)^e = {}_eC_0a^{2e} + {}_eC_1a^{2(e-1)} + \cdots + {}_eC_e\, 1^e = a^{2e} + e \cdot a^{2(e-1)} + \cdots + 1 > a^{2e} + 1 = m^2 + 1$ maka $(a^2)^e < m^2 + 1 = (a^2)^e + 1 < (a^2 + 1)^e$
Dari ketaksamaan di atas didapat $m^2 + 1$ terletak di antara dua bilangan asli berurutan berpangkat e. Maka tidak mungkin $m^2 + 1$ berbentuk b^e.

∴ **Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e, dengan e ≥ 2, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$**

5. Misal x_{ij} adalah jarak titik P_i dan P_j dalam arah sumbu X dan Misal y_{ij} adalah jarak titik P_i dan P_j dalam arah sumbu Y.

   Jika x_{ij} dan y_{ij} keduanya genap, maka dapat dipastikan bahwa sekurang-kurangnya satu titik letis selain titik P_i dan P_j akan terletak pada ruas garis P_iP_j, yaitu pada pertengahan ruas garis P_iP_j yang akan berjarak $\frac{1}{2}x_{ij}$ pada arah sumbu X dan $\frac{1}{2}y_{ij}$ pada arah sumbu Y terhadap titik P_i maupun P_j dengan $\frac{1}{2}x_{ij}$ dan $\frac{1}{2}y_{ij}$ adalah juga bilangan bulat.

   Sifat penjumlahan berikut juga akan membantu menjelaskan :

   Bilangan Genap − Bilangan Genap = Bilangan Genap

   Bilangan Ganjil − Bilanagn Ganjil = Bilangan Genap.

   Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap,genap), (genap,ganjil), (ganjil,ganjil) dan (ganjil,genap).

   Jika 2 titik letis mempunyai paritas yang sama maka sesuai sifat penjumlahan maka dapat dipastikan kedua titik letis memiliki jarak mendatar dan jarak vertikal merupakan bilangan genap yang berarti koordinat titik tengah dari garis yang menghubungkan kedua titik letis tersebut juga merupakan bilangan genap.

   Karena ada 5 titik letis sedangkan hanya ada 4 paritas titik letis maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada dua titik letis yang memiliki paritas yang sama.

   $\therefore$ **Dari penjelasan di atas dapat dibuktikan bahwa jika P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik letis berbeda pada bidang maka terdapat sepasang titik (P_i, P_j), i ≠ j, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.**

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004

PEKAN BARU (RIAU), 24 – 29 AGUSTUS 2004

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2004

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004
24 – 29 AGUSTUS 2004
PEKAN BARU, RIAU

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

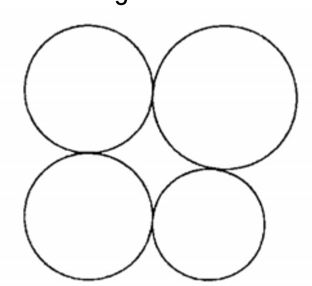
WAKTU : 180 MENIT

1. Berapa banyaknya pembagi genap dan pembagi ganjil dari $5^6 - 1$?

2. Sebuah bak bila diisi dengan keran air dingin akan penuh dalam 14 menit. Untuk mengosongkan bak yang penuh dengan membuka lubang pada dasar bak, air akan keluar semua dalam waktu 21 menit. Jika keran air dingin dan air panas dibuka bersamaan dan lubang pada dasar bak dibuka, bak akan penuh dalam 12,6 menit. Maka berapa lamakah waktu yang diperlukan untuk memenuhkan bak hanya dengan keran air panas dan lubang pada dasar bak ditutup ?

3. 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10
   Berapa carakah untuk menyusun deretan tersebut dengan mengganti mengganti tanda ekspresi "*" dengan tanda "+" atau "–" sehingga jumlahnya menjadi 29 ?

4. Lingkaran yang berbeda bentuk disusun sebagai berikut :



   Buktikan bahwa ada lingkaran yang melewati keempat titik singgung keempat lingkaran.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004

PEKAN BARU (RIAU), 24 – 29 AGUSTUS 2004

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2004

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004
24 – 29 AGUSTUS 2004
PEKAN BARU, RIAU

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

5. $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$
   $4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$
   $9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$
   Berapakah nilai S jika
   $S = 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$

6. Persamaan kuadrat $x^2 + ax + b + 1 = 0$ dengan a, b adalah bilangan bulat, memiliki akar-akar bilangan asli. Buktikan bahwa $a^2 + b^2$ bukan bilangan prima.

7. Buktikan bahwa suatu segitiga ABC siku-siku di C dengan a menyatakan sisi dihadapan sudut A, b menyatakan sisi di hadapan sudut B, c menyatakan sisi di hadapan sudut C memiliki diameter lingkaran dalam = a + b – c.

8. Sebuah lantai berluas 3 m^2 akan ditutupi oleh karpet dengan bermacam bentuk sebanyak 5 buah dengan ukuran @ $1m^2$. Tunjukkan bahwa ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih lebih dari 1/5 m^2.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2005

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2004

PEKAN BARU (RIAU), 24 – 29 AGUSTUS 2004

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. $5^6 - 1 = (5^3 + 1)(5^3 - 1) = 126 \cdot 124$
   $5^6 - 1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 31$
   $5^6 - 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$
   Misalkan $M = p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot p_3^{d3} \cdot \cdots \cdot p_n^{dn}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ adalah bilangan prima maka banyaknya pembagi positif dari M adalah $(d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1) \cdots (d_n + 1)$
   Banyaknya pembagi (disebut juga faktor) dari $5^6 - 1$ adalah $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 48$
   Misal $K = 3^2 \cdot 7 \cdot 31$. Mengingat bahwa bilangan ganjil hanya didapat dari perkalian bilangan ganjil maka semua pembagi dari K pasti ganjil.
   Banyaknya pembagi dari K adalah $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$
   Banyaknya pembagi dari K sama dengan banyaknya pembagi ganjil dari $5^6 - 1$
   $\therefore$ **Banyaknya pembagi ganjil dari $5^6 - 1$ adalah 12.**
   Banyaknya pembagi genap dari $5^6 - 1$adalah $48 - 12 = 36$
   (Catatan : Ke-48 pembagi $5^6 - 1$ adalah : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 31, 36, 42, 56, 62, 63, 72, 84, 93, 124, 126, 168, 186, 217, 248, 252, 279, 372, 434, 504, 558, 651, 744, 868, 1116, 1302, 1736, 1953, 2232, 2604, 3906, 5208, 7812, 15624)

2. Misalkan v_d = kelajuan air keluar dari keran air dingin
   v_p = kelajuan air keluar dari keran air panas
   v_b = kelajuan air keluar dari lubang di dasar bak
   X = volume bak

$$v_d = \frac{X}{14}$$

$$v_b = \frac{X}{21}$$

$$v_d + v_p - v_b = \frac{X}{12,6}$$

Dari ketiga persamaan di atas didapat :

$$\frac{X}{14} + v_p - \frac{X}{21} = \frac{5X}{63}$$

$$v_p = \frac{X}{7}\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

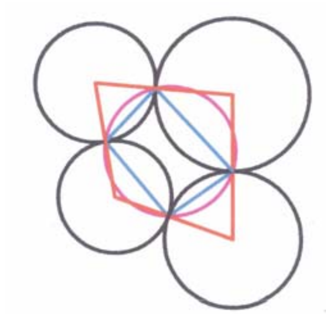
$$v_p = \frac{X}{18}$$

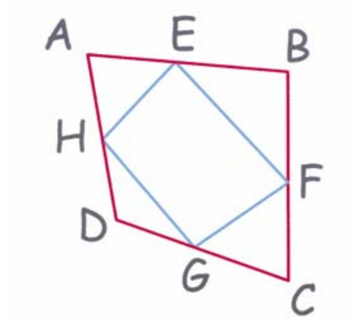
$\therefore$ Waktu yang diperlukan untuk memenuhkan bak hanya dengan keran air panas dan lubang pada dasar bak ditutup adalah **18 menit**

3. Misalkan S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55
   Jika + k kita ganti dengan − k maka S akan berkurang sebanyak 2k.
   Karena 55 − 29 = 26 maka bilangan yang yang bertanda "−" harus berjumlah 13.
   Jika ada 4 bilangan yang bertanda "−" maka jumlah minimum bilangan tersebut = 2 + 3 + 4 + 5 = 14 > 13. Maka banyaknya bilangan yang bertanda "−" harus kurang dari 4.
   - Untuk 2 bilangan yang bertanda "−" maka pasangan yang mungkin adalah (3,10), (4,9), (5,8), (6,7).
   - Untuk 3 bilangan yang bertanda "−" maka tripel yang mungkin adalah (2,3,8), (2,4,7), (2,5,6), (3,4,6)

   ∴ **Banyaknya kemungkinan seluruhnya ada 8.**
   (Catatan : Ke-8 kemungkinan tersebut adalah :
   1 + 2 − 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 − 10
   1 + 2 + 3 − 4 + 5 + 6 + 7 + 8 − 9 + 10
   1 + 2 + 3 + 4 − 5 + 6 + 7 − 8 + 9 + 10
   1 + 2 + 3 + 4 + 5 − 6 − 7 + 8 + 9 + 10
   1 − 2 − 3 + 4 + 5 + 6 + 7 − 8 + 9 + 10
   1 − 2 + 3 − 4 + 5 + 6 − 7 + 8 + 9 + 10
   1 − 2 + 3 + 4 − 5 − 6 + 7 + 8 + 9 + 10
   1 + 2 − 3 − 4 + 5 − 6 + 7 + 8 + 9 + 10

4. Misalkan A, B, C dan D adalah keempat pusat lingkaran dan E, F, G dan H adalah titik singgung keempat lingkaran. Maka persoalan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :



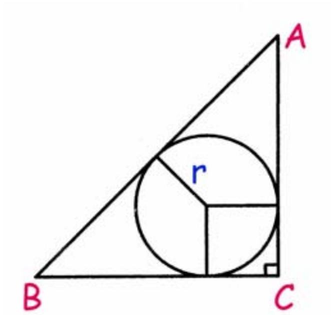


   ΔAEH, ΔBEF, ΔCFG dan ΔDGh semuanya adalah segitiga sama kaki.
   Misalkan ∠A menyatakan ∠DAC
   ∠B menyatakan ∠ABC
   ∠C menyatakan ∠BCD
   ∠D menyatakan ∠CDA
   $\angle EHA = \angle AEH = 90^o - ½ \angle A$
   $\angle BEF = \angle BFE = 90^o - ½ \angle B$
   $\angle CFG = \angle CGF = 90^o - ½ \angle C$
   $\angle D = 360^o - \angle A - \angle B - \angle C$
   $\angle DGH = \angle DHG = ½ (180^o - (360^o - \angle A - \angle B - \angle C)) = ½ (\angle A + \angle B + \angle C) - 90^o$
   $\angle HEF = 180^o - \angle AEH - \angle BEF = ½ (\angle A + \angle B)$
   $\angle HGF = 180^o - \angle DGH - \angle CGF = 180^o - ½ (\angle A + \angle B)$
   $\angle HEF + \angle HGF = 180^o$
   Karena $\angle HEF + \angle HGF = 180^o$ maka segiempat EFGH adalah segiempat tali busur yang berarti titik E, F, G, dan H terletak pada satu lingkaran.
   ∴ **Terbukti bahwa ada lingkaran yang melewati keempat titik singgung keempat lingkaran.**

5. $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$ .... (1)
$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$ .... (2)
$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$ .... (3)
Kurangkan (2) dengan (1), $3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 13x_6 + 15x_7 = 11$ .... (4)
Kurangkan (3) dengan (2), $5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 13x_5 + 15x_6 + 17x_7 = 111$ .... (5)
Kurangkan (5) dengan (4), $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 100$ .... (6)
Jumlahkan (5) dengan (6), $7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 15x_5 + 17x_6 + 19x_7 = 211$ .... (7)
Jumlahkan (3) dengan (7), $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = 334$
$\therefore$ **$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = 334$**

6. Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 + ax + b + 1 = 0$ maka :
$x_1 + x_2 = -a$
$x_1 x_2 = b + 1$
$b = x_1 x_2 - 1$
$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2$
$a^2 + b^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + (x_1 x_2)^2 - 2 x_1x_2 + 1$
$a^2 + b^2 = (x_1x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1$
$a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$
Karena x_1 dan x_2 keduanya adalah bilangan asli maka $(x_1^2 + 1)$ dan $(x_2^2 + 1)$ keduanya adalah bilangan asli lebih dari 1.
Maka $a^2 + b^2$ adalah perkalian dua bilangan asli masing-masing > 1 yang mengakibatkan $a^2 + b^2$ adalah bukan bilangan prima.
$\therefore$ **Terbukti $a^2 + b^2$ bukan bilangan prima.**

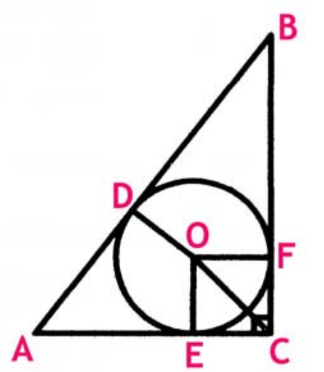
7. Misalkan d adalah diameter lingkaran dalam segitiga dan r adalah jejari lingkaran dalam maka :
Alternatif 1 :



½ r (a + b + c) = Luas segitiga
d (a + b + c) = 4 · Luas segitiga
d (a + b + c) = 2ab
$d (a + b + c) = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$
Karena ABC adalah segitiga siku-siku di C maka :
$d (a + b + c) = (a + b)^2 - c^2$
$d (a + b + c) = (a + b + c)(a + b - c)$
$d = a + b - c$
$\therefore$ **Terbukti bahwa diameter lingkaran dalam segitiga tersebut adalah a + b − c.**

Alternatif 2 :

Misalkan O adalah pusat lingkaran dalam ΔABC. Misalkan juga garis AB, AC dan BC berturut-turut menyinggung lingkaran dalam di titik D, E dan F.



Jelas bahwa CE = CF = r.
Jelas juga bahwa AD = AE dan BD = BF
Maka AE = b − r dan BF = a − r
AB = AD + BD
c = (b − r) + (a − r)
d = 2c = a + b − c

$\therefore$ **Terbukti bahwa diameter lingkaran dalam segitiga tersebut adalah a + b − c.**

8. Alternatif 1 :

Misalkan A_i menyatakan karpet ke-i. $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1$
Berdasarkan Prinsip Inklusi Eksklusi maka :

$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) - (A_1 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3) - (A_2 \cap A_4) - (A_2 \cap A_5) - (A_3 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5) - (A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

$3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) - (A_1 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3) - (A_2 \cap A_4) - (A_2 \cap A_5) - (A_3 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5) - (A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

$2 + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = (A_1 \cap A_2) + (A_1 \cap A_3) + (A_1 \cap A_4) + (A_1 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3) + (A_2 \cap A_4) + (A_2 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4) + (A_3 \cap A_5) + (A_4 \cap A_5)$ .... (1)

$(A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d)$ merupakan himpunan bagian dari $(A_a \cap A_b \cap A_c)$ sehingga $(A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d) \le (A_a \cap A_b \cap A_c)$

$(A_a \cap A_b \cap A_c)$ merupakan himpunan bagian dari $(A_a \cap A_b)$ sehingga $(A_a \cap A_b \cap A_c) \le (A_a \cap A_b)$

dan seterusnya ·········

Akibatnya :
$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \le (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \le (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ dan seterusnya
$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \le (A_1 \cap A_2 \cap A_5)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \le (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ dan seterusnya
$(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \le (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \le (A_1 \cap A_2 \cap A_5)$ dan seterusnya
$(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \le (A_1 \cap A_3 \cap A_4)$ atau $(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \le (A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ dan seterusnya
$(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \le (A_2 \cap A_3 \cap A_5)$ atau $(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \le (A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ dan seterusnya

Maka ruas kiri persamaan (1) bernilai minimal 2.
Karena ada 10 irisan di ruas kanan persamaan (1) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada 1 di antara 10 irisan 2 karpet tersebut yang memiliki irisan minimal 2/10 = 0,2 m^2.

Alternatif 2 :
Andaikan tidak ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih lebih dari 1/5 m^2. Karpet pertama akan menempati ruang dengan luas 1 m^2. Maka karpet kedua akan menempati ruang dengan luas minimum 4/5 m^2. Karpet ketiga akan menempati ruang dengan luas minimum 3/5 m^2. Karpet keempat akan menempati ruang dengan luas minimum 2/5 m^2. Karpet kelima akan menempati ruang dengan luas minimum 1/5 m^2.

Luas minimum karpet yang diperlukan adalah $1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ = 3 m^2.

$\therefore$ **Hanya dapat dibuktikan bahwa ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih minimal 1/5 m^2.**

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2005

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2006

Bidang Matematika

Waktu : 3,5 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2005

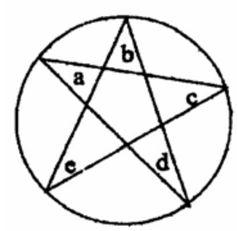
Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Bilangan $\frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$ adalah bilangan

   A. takrasional positif
   B. takrasional negatif
   C. rasional tidak bulat
   D. bulat positif
   E. bulat negatif

2. Pada gambar di samping, a, b, c, d dan e berturut-turut menyatakan besar sudut pada titik-titik ujung bintang lima yang terletak pada suatu lingkaran. Jumlah a + b + c + d + e =

   A. 135^o
   B. 180^o
   C. 270^o
   D. 360^o
   E. tidak dapat ditentukan dengan pasti

3. Semula harga semangkuk bakso dan harga segelas jus masing-masing adalah Rp. 5000. Setelah kenaikan BBM, semangkuk bakso harganya naik 16% sedangkan harga segelas jus naik 4%. Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus adalah

   A. 8%
   B. 10%
   C. 12%
   D. 15%
   E. 20%

4. Jika a bilangan real yang memenuhi $a^2 < a$, maka

   A. a negatif
   B. $a < 1$
   C. $1 < a$
   D. $½ < a < 2$
   E. tidak ada a yang memenuhi

5. Aries menggambar bagian dari parabola $y = x^2 - 6x + 7$. Titik-titik parabola yang muncul dalam gambar memiliki absis mulai dari 0 sampai +4. Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar titik-titik pada parabola yang muncul dalam gambar berturut-turut adalah

   A. -2 dan -1
   B. -2 dan 7
   C. -1 dan 7
   D. 0 dan -1
   E. 0 dan 7

6. Dua buah dadu dilemparkan bersamaan. Berapakah peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 ?

   A. $\frac{5}{36}$
   B. $\frac{7}{36}$
   C. $\frac{10}{36}$
   D. $\frac{14}{36}$
   E. $\frac{35}{36}$

7. Titik A(a, b) disebut *titik letis* jika a dan b keduanya adalah bilangan bulat. Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah

   A. 4
   B. 6
   C. 8
   D. 12
   E. tidak bisa dipastikan

8. Mana di antara 5 ekspresi berikut yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 ?

A. $5^{5^{5^5}}$ B. $6^{6^{6^6}}$ C. $8^{8^{8^8}}$ D. $9^{9^{9^9}}$ E. $10^{10^{10^{10}}}$

9. Diberikan tiga bilangan positif x, y dan z yang semuanya berbeda. Jika $\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$, maka nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. 1 D. 2 E. $\frac{10}{3}$

10. Jika diberikan persamaan $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$, maka banyaknya bilangan bulat x yang merupakan solusi dari persamaan tersebut adalah

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Faktor prima terbesar dari 2005 adalah ·····

12. Tentukan semua solusi persamaan $|x - 1| + |x - 4| = 2$.

13. Misalkan a dan b adalah bilangan real tak nol yang memenuhi $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$. Tentukan $\frac{a}{b}$.

14. Diberikan dua buah persegi, A dan B, dimana luas A adalah separuh dari luas B. Jika keliling B adalah 20 cm, maka keliling A, dalam centimeter, adalah ····

15. Seorang siswa mempunyai dua celana berwarna biru dan abu-abu, tiga kemeja berwarna putih, merah muda dan kuning, serta dua pasang sepatu berwarna hitam dan coklat. Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu adalah ······

16. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^4 + \frac{1}{x^4} \le 2$.

17. Tentukan semua bilangan tiga-angka sehingga nilai bilangan itu adalah 30 kali jumlah ketiga angka itu.

18. Nilai $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o$ = ······

19. Diketahui bahwa segiempat ABCD memiliki pasangan sisi yang sejajar. Segiempat tersebut memiliki tepat satu sumbu simetri lipat jika ia berbentuk ········

20. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang merupakan solusi dari persamaan $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2005

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

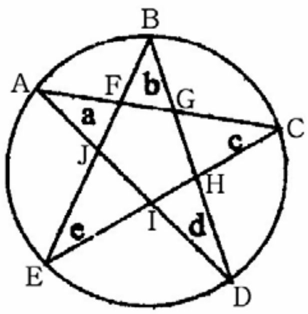
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{(1-2)\left(2^2-3\right)} = -1$$

$\therefore$ $\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}$ adalah bilangan **bulat negatif**.

2. (Jawaban : B)



Misalkan penamaan titik seperti pada gambar.
Pada ΔEFC berlaku ∠EFC = 180^o − (c + e). Maka ∠BFG = c + e
Pada ΔAGD berlaku ∠AGD = 180^o − (a + d). Maka ∠FGB = a + d
Pada ΔFGB berlaku ∠BFG + ∠FGB + ∠FBG = 180^o. Maka (c + e) + (a + d) + (b) = 180^o.
$\therefore$ a + b + c + d + e = **180^o.**

3. (Jawaban : B)

Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus = $\frac{16\% \cdot 5000 + 4\% \cdot 5000}{5000 + 5000}$ = 10%

$\therefore$ Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus adalah **10 %.**

4. (Jawaban : ?)
a^2 < a. Maka a(a − 1) < 0 sehingga 0 < a < 1.
$\therefore$ Jika a^2 < a maka 0 < a < 1.

5. (Jawaban : B)
y = x^2 − 6x + 7
Nilai pada ujung-ujung interval, untuk x = 0 maka y = 7 sedangkan untuk x = 4 maka y = −1

$y_{maks} = -\frac{D}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4(1)(7)}{4(1)} = -2$ yang didapat untuk $x = -\frac{b}{2a} = 3$.

$\therefore$ Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar adalah −**2 dan 7.**

6. (Jawaban : C)

   Kemungkinan penjumlahan mata dadu sama dengan 6 ada 5, yaitu (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1).

   Kemungkinan penjumlahan mata dadu sama dengan 8 ada 5, yaitu (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).

   Peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 = $\frac{5+5}{36}$

   $\therefore$ Peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 = $\frac{10}{36}$

7. (Jawaban : D)

   Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah $x^2 + y^2 = 25$

   Karena $0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ maka pasangan (x, y) bulat yang memenuhi ada 12, yaitu (0, 5), (0, –5), (5, 0), (–5, 0), (3, 4), (3, –4), (–3, 4), (–3, –4), (4, 3), (4, –3), (–4, 3) dan (–4, –3).

   $\therefore$ Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 ada **12.**

8. (Jawaban : C)

   Karena 5^k memiliki angka satuan 5 untuk setiap k asli maka $5^{5^{5^5}}$ memiliki angka terakhir 5.

   Karena 6^k memiliki angka satuan 6 untuk setiap k asli maka $6^{6^{6^6}}$ memiliki angka terakhir 6.

   Karena 10^k memiliki angka satuan 0 untuk setiap k asli maka $10^{10^{10^{10}}}$ memiliki angka terakhir 0.

   8^1 memiliki angka satuan 8

   8^2 memiliki angka satuan 4

   8^3 memiliki angka satuan 2

   8^4 memiliki angka satuan 6

   8^5 memiliki angka satuan 8 dst

   Maka $8^{4k+i} \equiv 8^i$ (mod 10) untuk setiap k dan i bilangan asli.

   Karena 8^{8^8} habis dibagi 4 maka $8^{8^{8^8}}$ memiliki angka satuan yang sama dengan 8^4 yaitu 6.

   9^1 memiliki angka satuan 9

   9^2 memiliki angka satuan 1

   9^3 memiliki angka satuan 9 dst

   Maka $9^{2k+i} \equiv 9^i$ (mod 10) untuk setiap k dan i bilangan asli.

   Karena 9^k ganjil untuk k asli maka $9^{9^{9^9}}$ memiliki angka satuan yang sama dengan 9^1 yaitu 9.

   $\therefore$ Maka di antara $5^{5^{5^5}}$, $6^{6^{6^6}}$, $8^{8^{8^8}}$, $9^{9^{9^9}}$ dan $10^{10^{10^{10}}}$ yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 adalah $8^{8^{8^8}}$.

9. (Jawaban : D)

   Misalkan $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y} = k$

   Maka : $y = k(x - z)$ .... (1)

   $x + y = kz$ .... (2)

   $x = ky$ .... (3)

Jumlahkan (1) + (2) + (3) sehingga 2(x + y) = k(x + y).
Karena x dan y keduanya positif maka x + y $\neq$ 0 sehingga k = 2.

Karena $\frac{x}{y} = k$ maka $\frac{x}{y} = 2$

$\therefore$ nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan **2**

10. (Jawaban : C)
$(x^2 - x - 1)^{x + 2} = 1$
Kemungkinan-kemungkinan yang memenuhi adalah :
- x + 2 = 0. Maka x = –2
  $((-2)^2 - (-2) - 1) \neq 0$ maka x = –2 memenuhi
- $x^2 - x - 1 = 1$. Maka (x – 2)(x + 1) = 0
  x = 2 dan x = –1 keduanya memenuhi
- $x^2 - x - 1 = -1$. Maka x(x – 1) = 0 sehingga x = 0 atau x = 1
  Jika x = 0 maka x + 2 = 2 (bilangan genap). Maka x = 0 memenuhi
  Jika x = 1 maka x + 2 = 3 (bilangan ganjil). Maka x = 1 tidak memenuhi.

Nilai-nilai x yang memenuhi adalah –2, –1, 0 dan 2.
$\therefore$ Banyaknya bilangan bulat x yang merupakan solusi dari persamaan $(x^2 - x - 1)^{x + 2} = 1$ ada **4**.

BAGIAN KEDUA

11. 2005 = 5 · 401 dengan 401 adalah bilangan prima.
$\therefore$ Faktor prima terbesar dari 2005 adalah **401.**

12. $|x - 1| + |x - 4| = 2$
- Jika $x \leq 1$
  Maka $|x - 1| = 1 - x$ dan $|x - 4| = 4 - x$
  1 – x + 4 – x = 2 sehingga x = $\frac{3}{2}$ (tidak memenuhi $x \leq 1$)
- Jika $1 < x \leq 4$
  Maka $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 4| = 4 - x$
  x – 1 + 4 – x = 2 sehingga 3 = 2 (tidak memenuhi kesamaan)
- Jika x > 4
  Maka $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 4| = x - 4$
  x – 1 + x – 4 = 2 sehingga x = $\frac{7}{2}$ (tidak memenuhi x > 4)

$\therefore$ Nilai x yang memenuhi persamaan $|x - 1| + |x - 4| = 2$ adalah **tidak ada**.

13. $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$

    Untuk $b \neq 0$ maka $\left(3\frac{a}{b} - 2\right)^2 = 0$

    $\therefore$ Maka $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

14. Luas B = 2 Luas A, maka B = 2A

    Misalkan panjang sisi A = x dan panjang sisi B = y maka Luas B = $y^2 = 2x^2$ sehingga $y = x\sqrt{2}$

    Keliling B = 4y. Maka $4x\sqrt{2} = 20$ sehingga x = $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

    Keliling A = 4x = $10\sqrt{2}$

    $\therefore$ Keliling A = **$10\sqrt{2}$ cm**

15. Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu = 2 x 3 x 2 = 12 cara

    $\therefore$ Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu adalah **12.**

16. $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 2$

    Sesuai dengan ketaksamaan AM-GM maka $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2\sqrt{x^4 \cdot \frac{1}{x^4}} = 2$

    Karena $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 2$ dan $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$ maka ketaksamaan hanya dipenuhi jika $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2$.

    $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 0$

    $\therefore$ Bilangan real x yang memenuhi persamaan adalah **x = 1 atau x = –1**

17. Misalkan bilangan tersebut adalah n = 100a + 10b + c

    100a + 10b + c = 30(a + b + c)

    10(7a – 2b) = 29c

    $\frac{c}{7a - 2b} = \frac{10}{29}$

    Karena 10 dan 29 relatif prima maka 7a – 2b = 29k dan c = 10k.

    Karena $0 \leq c \leq 9$ maka nilai k yang memenuhi hanya k = 0 sehingga c = 0.

    7a = 2b

    Karena 2 dan 7 relatif prima sedangkan $0 \leq a, b \leq 9$ maka nilai a dan b yang memenuhi adalah a = 2 dan b = 7.

    $\therefore$ Bilangan tiga angka yang memenuhi adalah **270.**

18. $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = (\sin^4 75^o + \cos^4 75^o)\ (\sin^4 75^o - \cos^4 75^o)$

$\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = ((\sin^2 75^o + \cos^2 75^o)^2 - 2(\sin^2 75^o)(\cos^2 75^o))\ (\sin^2 75^o + \cos^2 75^o)(\sin^2 75^o - \cos^2 75^o)$

Mengingat bahwa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ dan $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ maka :

$\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = (1 - \frac{1}{2}\sin^2 150^o)(-\cos 120^o)$

$\therefore$ $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = \frac{7}{16}$

19. Jika segiempat adalah trapesium sebarang maka belum dapat dipastikan bangun tersebut memiliki tepat satu sumbu simetri lipat sebab ada kemungkinan trapesium tersebut tidak memiliki sumbu simetri lipat.

$\therefore$ Maka bangun tersebut adalah **trapesium sama kaki.**

20. $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$

$mn - 4n - 2m = 0$

$(m - 4)(n - 2) = 8 = 2^3$

Karena 4 dan 2 memiliki paritas yang sama maka $m - 4$ dan $n - 2$ memiliki paritas yang sama.

Maka kemungkinan-kemungkinan penyelesaiannya adalah :

- $m - 4 = -2$ dan $n - 2 = -4$
  $m = 2$ dan $n = -2$ (tidak memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
- $m - 4 = 2$ dan $n - 2 = 4$
  $m = 6$ dan $n = 6$ (memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
- $m - 4 = -4$ dan $n - 2 = -2$
  $m = 0$ dan $n = 0$ (tidak memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
- $m - 4 = 4$ dan $n - 2 = 2$
  $m = 8$ dan $n = 4$ (memenuhi m dan n keduanya bulat positif)

$\therefore$ Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang memenuhi ada **2.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

BAGIAN PERTAMA

1. Jika a sebuah bilangan rasional dan b adalah sebuah bilangan tak rasional, maka a + b adalah bilangan ······

2. Jumlah sepuluh bilangan prima yang pertama adalah ·····

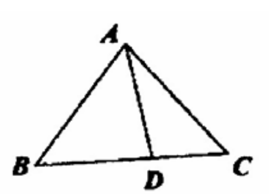
3. Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah ·····

4. Jika N = 123456789101112 ··· 9899100, maka tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah ·····

5. Misalkan ABCD adalah sebuah trapesium dengan $BC \parallel AD$. Titik-titik P dan R berturut-turut adalah titik tengah sisi AB dan CD. Titik Q terletak pada sisi BC sehingga BQ : QC = 3 : 1, sedangkan titik S terletak pada sisi AD sehingga AS : SD = 1 : 3. Maka rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah ······

6. Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah ·····

7. Jika a, b dua bilangan asli $a \le b$ sehingga $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, maka pasangan terurut (a, b) = ······

8. 

Jika AB = AC, AD = BD, dan besar sudut DAC = 39^o, maka besar sudut BAD adalah ·····

9. Ketika mendaki sebuah bukit, seorang berjalan dengan kecepatan 1½ km/jam. Ketika menuruni bukit tersebut, ia berjalan tiga kali lebih cepat. Jika waktu yang dibutuhkan untuk melakukan perjalanan bolak-balik dari kaki bukit ke puncak bukit dan kembali ke kaki bukit adalah 6 jam, maka jarak antara kaki bukit dan puncak bukit (dalam km) adalah ····

10. Sebuah segienam beraturan dan sebuah segitiga sama sisi mempunyai keliling yang sama. Jika luas segitiga adalah $\sqrt{3}$, maka luas segienam adalah ····

11. Dua buah dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang jumlah kedua angka yang muncul adalah bilangan prima adalah ····

12. Keliling sebuah segitiga samasisi adalah p. Misalkan Q adalah sebuah titik di dalam segitiga tersebut. Jika jumlah jarak dari Q ke ketiga sisi segitiga adalah s, maka, dinyatakan dalam s, p = ········

13. Barisan bilangan asli (a, b, c) dengan $a \ge b \ge c$, yang memenuhi sekaligus kedua persamaan $ab + bc = 44$ dan $ac + bc = 23$ adalah ·····

14. Empat buah titik berbeda terletak pada sebuah garis. Jarak antara sebarang dua titik dapat diurutkan menjadi barisan 1, 4, 5, k, 9, 10. Maka k = ····

15. Sebuah kelompok terdiri dari 2005 anggota. Setiap anggota memegang tepat satu rahasia. Setiap anggota dapat mengirim surat kepada anggota lain manapun untuk menyampaikan seluruh rahasia yang dipegangnya. Banyaknya surat yang perlu dikirim agar semua anggota kelompok mengetahui seluruh rahasia adalah ·····

16. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $2xy - 5x + y = 55$ adalah ····

17. Himpunan A dan B saling lepas dan $A \cup B = \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$. Hasil perkalian semua unsur A sama dengan jumlah semua unsur B. Unsur terkecil B adalah ····

18. Bentuk sederhana dari

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)}\cdots\frac{(100^3-1)}{(100^3+1)}$$

adalah ····

19. Misalkan ABCD adalah limas segitiga beraturan, yaitu bangun ruang bersisi empat yang berbentuk segitiga samasisi. Misalkan S adalah titik tengah rusuk AB dan T titik tengah rusuk CD. Jika panjang rusuk ABCD adalah 1 satuan panjang, maka panjang ST adalah ····

20. Untuk sembarang bilangan real a, notasi $\lfloor a \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan a. Jika x bilangan real yang memenuhi $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$, maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari ·····

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006
TINGKAT PROVINSI

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

BAGIAN KEDUA

1. Panjang sisi terbesar pada segiempat talibusur ABCD adalah a, sedangkan jari-jari lingkaran luar ΔACD adalah 1. Tentukan nilai terkecil yang mungkin bagi a. Segiempat ABCD yang bagaimana yang memberikan nilai a sama dengan nilai terkecil tersebut ?

2. Di dalam sebuah kotak terdapat 4 bola yang masing-masing bernomor 1, 2, 3 dan 4. Anggi mengambil bola secara acak, mencatat nomornya, dan mengembalikannya ke dalam kotak. Hal yang sama ia lakukan sebanyak 4 kali. Misalkan jumlah dari keempat nomor bola yang terambil adalah 12. Berapakah peluang bola yang terambil selalu bernomor 3 ?

3. Jika α, β dan γ adalah akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$, tentukan
$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

4. Panjang ketiga sisi a, b, c dengan $a \le b \le c$, sebuah segitiga siku-siku adalah bilangan bulat. Tentukan semua barisan (a, b, c) agar nilai keliling dan nilai luas segitiga tersebut sama.

5. Misalkan A dan B dua himpunan, masing-masing beranggotakan bilangan-bilangan asli yang berurutan. Jumlah rata-rata aritmatika unsur-unsur A dan rata-rata aritmatika unsur-unsur B adalah 5002. Jika $A \cap B = \{2005\}$, tentukan unsur terbesar yang mungkin dari himpunan $A \cup B$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

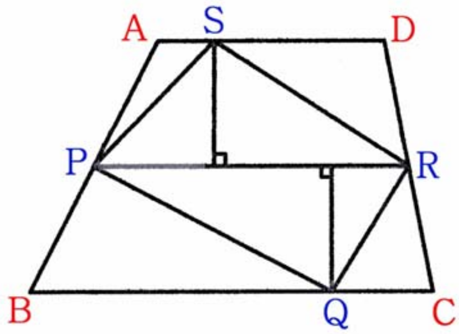
1. Bilangan rasional + bilangan tak rasional = bilangan tak rasional
   $\therefore$ a + b adalah bilangan **tak rasional.**

2. Sepuluh bilangan prima pertama adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
   2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 129
   $\therefore$ Jumlah sepuluh bilangan prima pertama = **129**

3. $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   X terdiri dari sedikitnya 2 unsur dan maksimal 5 unsur dengan 2 unsur di antaranya haruslah 1 dan 2. Sedangkan sisanya dipilih dari unsur-unsur 3, 4 atau 5.
   Jika X terdiri dari 2 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_0$ = 1
   Jika X terdiri dari 3 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_1$ = 3
   Jika X terdiri dari 4 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_2$ = 3
   Jika X terdiri dari 5 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_3$ = 1
   $\therefore$ Banyaknya himpunan X = 1 + 3 + 3 + 1 = **8.**

4. N = 123456789101112 ··· 9899100
   Banyaknya angka 123456789 adalah 9.
   Karena 10, 11, ···, 99 adalah bilangan 2 angka maka banyaknya digit 101112···99 adalah genap.
   Banyaknya angka 100 = 3
   Maka banyaknya angka N adalah merupakan bilangan genap.
   Mengingat $350^2 = 122500$, $351^2 = 123201$, $352^2 = 123904$, $110^2 = 12100$, $111^2 = 12321$, $112^2 = 12544$ maka kemungkinan tiga angka pertama dari $\sqrt{N}$ adalah 351 atau 111.
   Akan dibuktikan bahwa jika tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah 111 maka banyaknya digit $\lfloor N \rfloor$ akan ganjil sedangkan jika tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah 351 maka banyaknya digit $\lfloor N \rfloor$ akan genap.
   $N = (111 \cdot 10^k + p)^2 = 12321 \cdot 10^{2k} + 222p \cdot 10^k + p^2$ dengan banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k.
   Karena banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k maka $p < 10^k$.
   $N < 12321 \cdot 10^{2k} + 222 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} = 12544 \cdot 10^{2k}$
   $12321 \cdot 10^{2k} < N < 12544 \cdot 10^{2k}$
   Maka banyaknya angka N sama dengan banyaknya angka $12321 \cdot 10^{2k}$ yang merupakan bilangan ganjil.
   $N = (351 \cdot 10^k + p)^2 = 123201 \cdot 10^{2k} + 702p \cdot 10^k + p^2$ dengan banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k.
   Karena banyaknya angka $\lfloor p \rfloor$ tidak lebih dari k maka $p < 10^k$.
   $N < 123201 \cdot 10^{2k} + 702 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} = 123904 \cdot 10^{2k}$
   $123201 \cdot 10^{2k} < N < 123904 \cdot 10^{2k}$
   Maka banyaknya angka N sama dengan banyaknya angka $123201 \cdot 10^{2k}$ yang merupakan bilangan genap.
   $\therefore$ Tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah **351.**

5. Misalkan [PQRS] menyatakan luas segiempat PQRS

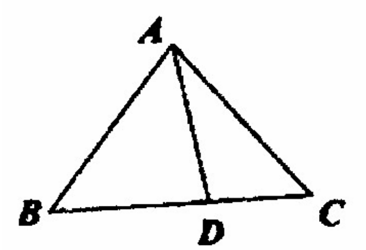


Misalkan juga jarak antara garis AD dan BC adalah t
[ABCD] = ½ (AD + BC) · t
Karena P dan R berurutan adalah pertengahan AB dan CD maka PR sejajar CD dan berlaku :
PR = ½ (AD + BC)
Jarak titik Q ke PR = jarak titik S ke PR = ½ t
[PQRS] = [PQR] + [PRS] = ½ (½t)(PR) + ½ (½t)(PR)
[PQRS] = (½t)(PR) = ½ (½ (AD + BC) · t) = ½ [ABCD]
∴ Rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah **1 : 2**

6. Bilangan kuadrat yang juga merupakan bilangan pangkat tiga adalah bilangan pangkat enam.
2^6 = 64 dan 3^6 = 729
∴ Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah **729.**

7. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan a, b, p dan q asli dan a ≤ b serta p dan q keduanya relatif prima.
$\left(q\sqrt{3} - 2p\right)^2 = \left(p\sqrt{b} - q\sqrt{a}\right)^2$
$3q^2 + 4p^2 - 4pq\sqrt{3} = p^2b + q^2a - 2pq\sqrt{ab}$
Karena a, b, p, q semuanya asli maka $2\sqrt{3} = \sqrt{ab}$ sehingga ab = 12.
Kemungkinan pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (1, 12), (2, 6) dan (3, 4)
Jika a = 1 dan b = 12 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{1}{2}$ yang merupakan bilangan rasional.
Jika a = 2 dan b = 6 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ yang bukan merupakan bilangan rasional.
Jika a = 3 dan b = 4 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ yang bukan merupakan bilangan rasional.
∴ Pasangan terurut (a, b) adalah **(1, 12)**

8.



Misalkan $\angle BAD = \alpha$
Karena AD = BD maka $\angle ABD = \alpha$
Karena AB = AC maka $\angle ACB = \alpha$
Pada ΔABC berlaku $(\alpha) + (\alpha + 39^o) + (\alpha) = 180^o$. Maka $\alpha = 47^o$
$\therefore$ Besarnya sudut BAD = **47^o.**

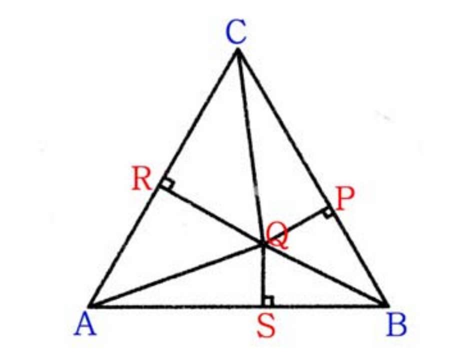
9. $v_n = 1\frac{1}{2}$ km/jam dan $v_t = 4\frac{1}{2}$ km/jam
Misalkan jarak antara kaki bukit dan puncak bukit dalam km adalah s.
$\frac{s}{1{,}5} + \frac{s}{4{,}5} = 6$ maka $s = \frac{27}{4}$ km
$\therefore$ Jarak antara kaki bukit dan puncak bukit = $\frac{27}{4}$ **km**

10. Karena keliling segienam beraturan sama dengan keliling segitiga sama sisi maka panjang sisi segitiga beraturan dua kali panjang sisi segienam beraturan.
Misalkan panjang sisi segienam beraturan = a maka panjang sisi segitiga sama sisi = 2a.
Luas segitiga sama sisi = ½ $(2a)^2 \sin 60^o = \sqrt{3}$
a = 1
Pada segienam beraturan, jari-jari lingkaran luar segienam beraturan sama dengan panjang sisinya.
Luas segienam beraturan = $6 \cdot \frac{1}{2} (a^2) \sin 60^o$
$\therefore$ Luas segienam beraturan = $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

11. Kemungkinan penjumlahan dua angka dadu bilangan prima adalah 2, 3, 5, 7, atau 11.
* Jika jumlah angka dadu = 2 maka banyaknya kemungkinan ada 1, yaitu (1,1)
* Jika jumlah angka dadu = 3 maka banyaknya kemungkinan ada 2, yaitu (1,2), (2,1)
* Jika jumlah angka dadu = 5 maka banyaknya kemungkinan ada 4, yaitu (1,4),(2,3),(3,2),(4,1)
* Jika jumlah angka dadu = 7 maka banyaknya kemungkinan ada 6, yaitu (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)
* Jika jumlah angka dadu = 11 maka banyaknya kemungkinan ada 2, yaitu (5,6), (6,5)

Banyaknya kemungkinan seluruhnya = 1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15
$\therefore$ Peluang jumlah kedua angka dadu yang muncul adalah bilangan prima = $\frac{15}{36}$

12. Misalkan segitiga tersebut adalah ΔABC. Maka AB + AC + BC = p sehingga AB = AC = BC = $\frac{1}{3}p$



Luas ΔABC = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p\right)^2 \sin 60^\circ$ = $\frac{1}{36}p^2\sqrt{3}$ dan QP + QR + QS = s

Luas ΔABC = Luas ΔABQ + Luas ΔACQ + Luas ΔBCQ = ½ AB QS + ½ AC QR + ½ BC QP

$\frac{1}{36}p^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p\right)(s)$

$\therefore \quad p = 2s\sqrt{3}$

13. ab + bc = 44 dan ac + bc = 23 dengan a, b, c asli dan a ≥ b ≥ c
Karena c(a + b) = 23 dengan a, b dan c asli maka c = 1 atau 23
Jika c = 23 maka a + b = 1 (tidak memenuhi sebab a + b ≥ 2). Maka c = 1
a + b = 23 dan ab + b = 44
(23 − b)b + b = 44, maka $b^2 - 24b + 44 = 0$ sehingga (b − 22)(b − 2) = 0
b = 2 atau b = 22
Jika b = 22 maka a = 1 (tidak memenuhi a ≥ b). Maka b = 2 dan a = 21
∴ Barisan bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi adalah **(21, 2, 1).**

14. Misal garis tersebut terletak pada sumbu X.
Angap titik A adalah titik paling kiri, D paling kanan serta B dan C terletak di antara A dan D dengan titik terdekat pada A adalah B.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik A berada pada x = 0 dan D pada koordinat x = 10.
Karena ada yang berjarak 1 dan 9 maka salah satu B berada di x = 1 atau C pada x = 9
   - Jika B terletak pada x = 1
     Jarak B dan D = 9
     Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi C ada di x = 4, 5 atau 6.
     Posisi C tidak mungkin di x = 4 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.
     Posisi C tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)
     Maka posisi C di x = 6 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10
     k = 6
   - Jika C terletak pada x = 9
     Jarak C dan A = 9

Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi B ada di x = 4, 5 atau 6.
Posisi B tidak mungkin di x = 6 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.
Posisi B tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)
Maka posisi B di x = 4 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10
k = 6

$\therefore$ Maka k = **6**

15. Secara umum untuk kelompok terdiri dari n anggota. Orang ke-k akan menerima surat setelah sedikitnya terjadi k − 2 telepon. Maka orang terakhir akan menerima surat yang pertama sedikitnya setelah terjadi n − 2 kiriman surat. Setelah orang ke-n menerima surat berarti sedikitnya telah terjadi n − 1 kiriman surat. Semua informasi yang didapat oleh orang ke-n akan disebar kepada seluruh orang selain dirinya. Sedikitnya dibutuhkan n − 1 surat.
Maka banyaknya surat minimum yang diperlukan sehingga setiap orang akan mengetahui n informasi adalah 2(n − 1)

$\therefore$ Banyaknya surat yang diperlukan adalah **4008.**

16. $2xy - 5x + y = 55$, maka $(2x + 1)(2y - 5) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
Maka $2y - 5$ membagi 105 sehingga $2y - 5 = \pm1, \pm3, \pm5, \pm7, \pm15, \pm21, \pm35, \pm105$.
Karena 105 merupakan perkalian bilangan ganjil maka semua faktor 105 adalah bilangan ganjil.
Karena penjumlahan dua bilangan ganjil adalah bilangan genap yang pasti habis dibagi 2 maka berapa pun faktor positif dan faktor negatif dari 105 akan membuat 2x + 1 dan 2y − 5 keduanya membagi faktor dari 105 tersebut.
105 memiliki 8 faktor positif dan 8 faktor negatif.

$\therefore$ Maka banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi adalah **16.**

17. Misalkan hasil perkalian semua unsur A = p dan penjumlahan semua unsur B = s, maka p = s
Himpunan A dapat terdiri dari 1 atau lebih unsur.
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45

* Andaikan 1 adalah unsur terkecil B.
- Jika A terdiri dari sedikitnya 4 unsur
  Karena 1 bukanlah unsur dari A maka $p \geq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 > 45$ (tidak dapat tercapai p=s)
- Jika A terdiri dari 3 unsur
  Misalkan ketiga unsur A tersebut adalah a, b dan c. Jelas bahwa abc < 45
  Kemungkinan unsur-unsur A adalah (2,3,4), (2,3,5), (2,3,6), (2,3,7) dan (2,4,5)
  Jika unsur-unsur A adalah (2,3,4) maka p = 24 dan s = 45 − 9 = 36 (tidak memenuhi p=s)
  Jika unsur-unsur A adalah (2,3,5) maka p = 30 dan s = 45 − 10 = 35 (tidak memenuhi p=s)
  Jika unsur-unsur A adalah (2,3,6) maka p = 36 dan s = 45 − 11 = 34 (tidak memenuhi p=s)
  Jika unsur-unsur A adalah (2,3,7) maka p = 42 dan s = 45 − 12 = 33 (tidak memenuhi p=s)
  Jika unsur-unsur A adalah (2,4,5) maka p = 40 dan s = 45 − 11 = 34 (tidak memenuhi p=s)
  Maka jika A terdiri dari 3 unsur maka tidak ada yang memenuhi p = s.
- Jika A terdiri dari 2 unsur
  Misalkan kedua unsur A tersebut adalah a dan b dengan $1 \leq a, b \leq 9$.
  Karena p = s maka $ab = 45 - a - b$ sehingga $(a + 1)(b + 1) = 46 = 23 \cdot 2$
  Misalkan a > b maka a + 1 = 23 dan b + 1 = 2. Maka a = 22 (tidak memenuhi $a \leq 9$)

- Jika A terdiri dari 1 unsur
  $p \le 9$ sedangkan $s \ge 45 - 9 = 36$ (tidak mungkin tercapai p = s)

* Andaikan 2 adalah unsur terkecil B
Jika A = {1, 4, 8} dan B = {2, 3, 5, 6, 7, 9} maka :
$p = 1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$ dan $s = 45 - 1 - 4 - 8 = 32$ (terpenuhi p = s)

$\therefore$ Unsur terkecil dari B adalah **2**.

18. Misalkan $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)}\cdots\frac{(100^3-1)}{(100^3+1)} = X$

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$X = \frac{(2-1)(3-1)(4-1)}{(2+1)(3+1)(4+1)}\cdots\frac{(100-1)}{(100+1)}\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)(4^2+4+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)(4^2-4+1)}\cdots\frac{(100^2+100+1)}{(100^2-100+1)}$$

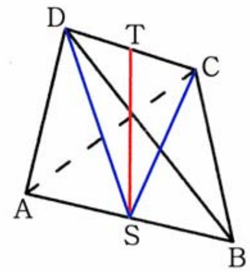
Perhatikan bahwa $n^2 + n + 1 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1$. Maka $2^2 + 2 + 1 = 3^2 - 3 + 1$; $3^2 + 3 + 1 = 4^2 - 4 + 1$ dan seterusnya.

$$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 101} \cdot \frac{100^2+100+1}{2^2-2+1}$$

$$X = \frac{2}{100 \cdot 101} \cdot \frac{10101}{3} = \frac{1}{50 \cdot 101} \cdot 3367$$

$$\therefore \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)}\cdots\frac{(100^3-1)}{(100^3+1)} = \frac{3367}{5050}$$

19.



Karena ΔABD sama sisi dan S pertengahan AB maka DS garis tinggi.

DS = AD sin60^o = ½$\sqrt{3}$.

Dengan cara yang sama CS = ½$\sqrt{3}$. Maka ΔCDS sama kaki. Karena ΔCDS sama kaki dan T pertengahan CD maka ST tegak lurus DT.

$ST^2 = DS^2 - DT^2$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$\therefore$ **ST =** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

20. $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$

$\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor > x + \sqrt{3} - 1$

$\lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor > x + \sqrt{3} - 1$

Mengingat $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ maka :

$x - \lfloor x \rfloor < 2 - \sqrt{3}$

Jika $x - \lfloor x \rfloor = 2 - \sqrt{3}$ maka $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ akan menjadi $\lfloor x \rfloor + 2 = \lfloor x \rfloor + 1$ sehingga kesamaan tidak mungkin terjadi.

Jika $x - \lfloor x \rfloor$ kurang sedikit dari $2 - \sqrt{3}$ maka $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ akan menjadi $\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$ sehingga kesamaan terjadi.

$\therefore$ Maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari $2 - \sqrt{3}$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

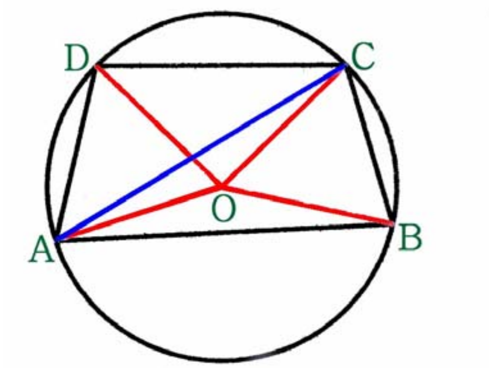
Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1.



Misalkan ABCD adalah segiempat tali busur tersebut dan O adalah pusat lingkaran. Karena lingkaran tersebut juga merupakan lingkaran luar ΔABC maka sesuai dalil sinus :

$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R = 2$ dengan R menyatakan jari-jari lingkaran luar ΔABC

Karena ∠AOB = 2∠ACB maka :

AB = 2 sin $\left(\frac{\angle AOB}{2}\right)$

Dengan cara yang sama didapat :

BC = 2 sin $\left(\frac{\angle BOC}{2}\right)$

CD = 2 sin $\left(\frac{\angle COD}{2}\right)$

AD = 2 sin $\left(\frac{\angle AOD}{2}\right)$

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 360^o$

Maka min(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) $\le 90^o$

Diketahui bahwa a = maks (AB, BC, CD, AD)

Karena untuk $0^o \le x \le 90^o$ nilai sin x naik maka :

a = maks (AB, BC, CD, AD) ≥ 2 sin $\left(\frac{90^\circ}{2}\right)$

$a \ge \sqrt{2}$

Maka nilai minimal a = $\sqrt{2}$

Karena maks(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) = min(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) = 90^o maka :

∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠AOD = 90^o yang berarti AB = BC = CD = AD.

Karena ∠AOD = 90^o sedangkan ΔAOD sama kaki maka ∠DOA = 45^o. Dengan cara yang sama didapat ∠COD = 45^o yang berarti segiempat ABCD adalah persegi.

∴ **Maka nilai a terkecil adalah $\sqrt{2}$ yang membuat segiempat ABCD adalah persegi.**

2. Kemungkinan empat jenis bola yang terambil adalah :
   - Keempat bola tersebut adalah (1, 3, 4, 4)

     Karena ada 4 obyek dan terdapat 2 yang sama maka banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12

     Semua kemungkinannya adalah (1, 3, 4, 4); (1, 4, 3, 4); (1, 4, 4, 3); (3, 1, 4, 4); (3, 4, 1, 4); (3, 4, 4, 1); (4, 1, 3, 4); (4, 1, 4, 3); (4, 3, 1, 4); (4, 3, 4, 1); (4, 4, 1, 3); (4, 4, 3, 1).
   - Keempat bola tersebut adalah (2, 3, 3, 4)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12

     Semua kemungkinannya adalah (2, 3, 3, 4); (2, 3, 4, 3); (2, 4, 3, 3); (3, 2, 3, 4); (3, 2, 4, 3); (3, 3, 2, 4); (3, 3, 4, 2); (3, 4, 2, 3); (3, 4, 3, 2); (4, 2, 3, 3); (4, 3, 2, 3); (4, 3, 3, 2).
   - Keempat bola tersebut adalah (2, 2, 4, 4)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ = 6

     Semua kemungkinannya adalah (2, 2, 4, 4); (2, 4, 2, 4); (2, 4, 4, 2); (4, 2, 2, 4); (4, 2, 4, 2); (4, 4, 2, 2).
   - Keempat bola tersebut adalah (3, 3, 3, 3)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{4!}$ = 1

     Semua kemungkinannya adalah (3, 3, 3, 3)

   Total banyaknya kemungkinan adalah 12 + 12 + 6 + 1 = 31
   Hanya ada satu cara kemungkinan angka yang muncul selalu 3.

   $\therefore$ Peluang bola yang terambil selalu bernomor 3 adalah = $\frac{1}{31}$

3. Dari $x^3 - x - 1 = 0$ serta $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ didapat A = 1, B = 0, C = –1 dan D = –1

   $$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{B}{A} = 0$$

   $$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{C}{A} = \frac{-1}{1} = -1$$

   $$\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

   $$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + (1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma) + (1+\gamma)(1-\alpha)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

   $$= \frac{3 - (\alpha+\beta+\gamma) - (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) + 3\alpha\beta\gamma}{1 - (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) - \alpha\beta\gamma}$$

   $$= \frac{3 - (0) - (-1) + 3(1)}{1 - (0) + (-1) - (1)}$$

   $$= \mathbf{-7}$$

   $$\therefore \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \mathbf{-7}$$

4. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .... (1)
   Luas ΔABC = ½ab = a + b + c, maka ab = 2(a + b + c) .... (2)
   Karena a, b dan c adalah bilangan bulat maka sekurang-kurangnya salah satu di antara a atau b adalah kelipatan 2.
   Jika a = 2k dengan k ∈ bilangan asli maka :
   $2k\sqrt{c^2 - 4k^2} = 2(2k + \sqrt{c^2 - 4k^2} + c)$
   $k\sqrt{c^2 - 4k^2} = (2k + \sqrt{c^2 - 4k^2} + c)$
   $(k-1)\sqrt{c^2 - 4k^2} = c + 2k$
   $(k-1)^2(c+2k)(c-2k) = (c+2k)^2$
   $(k-1)^2(c-2k) = (c+2k)$
   $(k-1)^2(c-2k) = c - 2k + 4k$
   $(c-2k)(k^2-2k) = 4k$
   Karena k ≠ 0 maka $(c-2k)(k-2) = 4$ .... (3)
   Karena c, k ∈ bilangan asli maka (k − 2) pasti membagi 4 dan karena c > 2k maka (k − 2) > 0
   Nilai k yang memenuhi adalah 3; 4; 6
   Untuk k = 3 maka a = 6 sehingga c = 10 dan b = 8 .... (4)
   Untuk k = 4 maka a = 8 sehingga c = 10 dan b = 6 .... (5)
   Untuk k = 6 maka a = 12 sehingga c = 13 dan b = 5 .... (6)
   Karena a dan b simetris maka jika b = 2k akan didapat
   Untuk k = 3 maka b = 6 sehingga c = 10 dan a = 8 .... (7)
   Untuk k = 4 maka b = 8 sehingga c = 10 dan a = 6 .... (8)
   Untuk k = 6 maka b = 12 sehingga c = 13 dan a = 5 .... (9)
   Tripel (a, b, c) yang memenuhi a ≤ b ≤ c adalah (6, 8, 10) dan (5, 12, 13).
   Setelah dicek ke persamaan a + b + c = ½ab maka kedua tripel ini memenuhi.
   ∴ **Maka tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (6, 8, 10) dan (5, 12, 13)**

5. Karena A dan B masing-masing beranggotakan bilangan asli berurutan sedangkan A ∩ B = {2005} maka 2005 adalah anggota terbesar dari A dan anggota terkecil dari B.
   A = {x, x + 1, x + 2, ⋯, 2005) dan B = {2005, 2006, ⋯, y − 1, y}
   A ∪ B = {x, x + 1, ⋯, y − 1, y}
   Maka unsur yang terbesar dari A ∪ B adalah y.
   $$\frac{x + x + 1 + \cdots + 2005}{2006 - x} + \frac{2005 + 2006 + \cdots + y}{y - 2004} = 5002$$
   $$\frac{x + 2005}{2} + \frac{2005 + y}{2} = 5002$$
   x + y + 4010 = 10004
   x + y = 5994
   Karena x bilangan asli maka x terkecil = 1 sehingga maksimum y = 5994 − 1 = 5993.
   ∴ **Unsur terbesar yang mungkin dari A ∪ B adalah 5993.**

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005

JAKARTA, 4 – 9 SEPTEMBER 2005

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005
4 – 9 SEPTEMBER 2005
JAKARTA

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

1. Misalkan n bilangan bulat positif. Tentukan banyaknya segitiga (tidak saling kongruen) yang panjang setiap sisinya adalah bilangan bulat dan panjang sisi terpanjangnya adalah n.

2. Untuk sebarang bilangan asli n, didefinisikan p(n) sebagai hasil kali digit-digit n (dalam representasi basis 10). Tentukan semua bilangan asli n sehingga $11 \cdot p(n) = n^2 - 2005$.

3. Misalkan k dan m bilangan-bilangan asli sehingga $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k}\right)$ adalah bilangan bulat.

   a. Buktikan bahwa $\sqrt{k}$ bilangan rasional

   b. Buktikan bahwa $\sqrt{k}$ bilangan asli

4. Misalkan M suatu titik di dalam segitiga ABC sedemikian rupa hingga $\angle AMC = 90^o$, $\angle AMB = 150^o$ dan $\angle BMC = 120^o$. Titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga AMC, AMB dan BMC berturut-turut adalah P, Q dan R. Buktikan bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005

JAKARTA, 4 – 9 SEPTEMBER 2005

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH UMUM
TAHUN 2005

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005
4 – 9 SEPTEMBER 2005
JAKARTA

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

5. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Buktikan bahwa ada tepat satu bilangan bulat m yang memenuhi persamaan

$$m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$$

6. Tentukan semua tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$x(y + z) = y^2 + z^2 - 2$$
$$y(z + x) = z^2 + x^2 - 2$$
$$z(x + y) = x^2 + y^2 - 2$$

7. Misalkan ABCD sebuah segiempat konveks. Persegi AB_1A_2B dibuat sehingga kedua titik A_2, B_1 terletak di luar segiempat ABCD. Dengan cara serupa diperoleh persegi-persegi BC_1B_2C, CD_1C_2D dan DA_1D_2A. Misalkan K adalah titik potong AA_2 dengan BB_1, L adalah titik potong BB_2 dengan CC_1, M adalah titik Potong CC_2 dengan DD_1, dan N adalah titik potong DD_2 dengan AA_1.
Buktikan bahwa KM tegak lurus LN.

8. Sebuah kompetisi matematika diikuti oleh 90 peserta. Setiap peserta berkenalan dengan paling sedikit 60 peserta lainnya. Salah seorang peserta, Amin, menyatakan bahwa setidaknya terdapat empat orang peserta yang banyak teman barunya sama. Periksa kebenaran pernyataan Amin.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2005

JAKARTA, 4 – 9 SEPTEMBER 2005

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Misalkan panjang sisi-sisi segitiga adalah a, b dan c dengan a adalah sisi terpanjang, maka a = n
Karena panjang salah satu sisi segitiga selalu kurang dari jumlah kedua sisi yang lain dan karena $b \le n$ dan $c \le n$ maka $a < b + c$ maka $b + c = n + 1, n + 2, n + 3, \cdots, 2n$.
Jika c = k untuk k bilangan asli maka $b = n - k + i$ untuk suatu nilai $i = 1, 2, 3, \cdots, k$.
Jika k = 1 maka nilai (b, c) ada 1 yaitu (n, 1)
Jika k = 2 maka nilai (b, c) ada 2 yaitu (n − 1, 2) dan (n, 2)
Jika k = 3 maka nilai (b, c) ada 3 yaitu (n − 2, 3), (n − 1, 3) dan (n, 3).
Jika k = 4 maka nilai (b, c) ada 4 yaitu (n − 3, 4), (n − 2, 4), (n − 1, 4) dan (n, 4).
⋮
Jika k = n − 1 maka nilai (b, c) ada n − 1 yaitu (2, n − 1), (3, n − 1), (4, n − 1), ⋯, (n, n − 1)
Jika k = n maka nilai (b, c) ada n yaitu (1, n), (2, n), (3, n), ⋯, (n, n)
Banyaknya seluruh segitiga adalah $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$
Tetapi segitiga-segitiga sama kaki dengan sisi-sisi a = n, b = k untuk $1 \le k < n$ dan c = n kongruen dengan segitiga-segitiga sama kaki dengan sisi-sisi a = n, b = n dan c = k untuk $1 \le k < n$. Segitiga-segitiga yang seperti itu banyaknya ada n − 1 yang terhitung dua kali di dalam perhitungan $\frac{1}{2}n(n + 1)$.
Perlu diingat pula bahwa segitiga-segitiga yang bukan sama kaki dengan a = n, b = n − p dan $c = p + r \le n$ tidak kongruen dengan segitiga-segitiga yang panjang sisinya a = n, $b = p + r \le n$ dan c = n − p walaupun ketiga sisinya sama.
Maka jumlah segitiga yang dicari = $\frac{1}{2}n(n + 1) - (n - 1)$
$\therefore$ **Banyaknya segitiga =** $\dfrac{n^2 - n + 2}{2}$

2. Alternatif 1 :
Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap n bilangan asli maka $p(n) \le n$
Misalkan $n = 10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_o$ dengan $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$
Karena $a_{0\ maks} = a_{1\ maks} = a_{2\ maks} = \cdots = a_{k-1\ maks} = 9$ maka $p(n) = a_o \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k \le 9^k \cdot a_k \le 10^k \cdot a_k \le n$
Maka $n^2 - 2005 = 11\ p(n) \le 11n$
$$\left(n - \frac{11}{2}\right)^2 \le \frac{8141}{4} \le 45^2$$
$1 \le n \le 50$ .... (1)
Selain itu $n^2 - 2005 = 11\ p(n) \ge 0$
$n \ge 45$ .... (2)
Dari (1) dan (2) didapat n = 45, 46, 47, 48, 49 atau 50
Dengan menguji ke persamaan $n^2 - 2005 = 11\ p(n)$ didapat hanya n = 49 yang memenuhi.
$\therefore$ Nilai n yang memenuhi hanya n = **49**
Alternatif 2 :
- Jika n terdiri dari k digit dengan $k \ge 4$
n^2 merupakan bilangan dengan sedikitnya 2k − 1 digit. Maka $n^2 - 2005$ merupakan bilangan dengan sedikitnya 2k − 2 digit.
$11\ p(n) \le 11 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 9 < 10^{k+1}$.
Maka 11 p(n) merupakan bilangan dengan sebanyak-banyaknya terdiri dari k + 1 digit.
Untuk $k \ge 4$ maka $2k \ge k + 4$ sehingga $2k - 2 \ge k + 2$
maka $2k - 2 > k + 1$ sehingga tidak ada yang memenuhi $11 \cdot p(n) = n^2 - 2005$

- Jika n terdiri dari 3 digit
  Jika angka ratusan n lebih dari 1 maka $n^2 - 2005 \geq 200^2 - 2005 = 37995$
  $11 \cdot p(n) \leq 11 \cdot 9^3 = 8019 < n^2 - 2005$ (tanda kesamaan tidak akan terjadi)
  Jika angka ratusan n sama dengan 1 maka $n^2 - 2005 \geq 100^2 - 2005 = 7995$
  $11 \cdot p(n) \leq 11 \cdot 1 \cdot 9^2 = 891 < n^2 - 2005$ (tanda kesamaan tidak akan terjadi)
- Jika n terdiri dari 2 digit
  Misalkan n = 10a + b
  n tidak mungkin genap sebab ruas kanan akan ganjil sedangkan ruas kiri genap.
  Karena n ganjil dan $2005 \equiv 1 \pmod 4$ maka $n^2 - 2005 \equiv 0 \pmod 4$
  Akibatnya salah satu a atau b habis dibagi 4. Karena n ganjil maka a = 4 atau 8.
  $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$
  $2005 \equiv 5 \pmod 8$
  Ruas kanan tidak habis dibagi 8, maka a = 4
  $11ab = (10a + b)^2 - 2005$
  $44b = 1600 + 80b + b^2 - 2005$
  $b^2 - 36b - 405 = 0$. Maka $(b - 9)(b + 45) = 0$ sehingga b = 9
  Bilangan tersebut adalah n = 49
- Jika n terdiri dari 1 digit
  Ruas kanan akan bernilai negatif (tidak memenuhi)

$\therefore$ Nilai n yang memenuhi hanya n = **49**

3. Alternatif 1 :

Perhatikan bahwa $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right)$ merupakan akar persamaan $x^2 + x\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$.

a. Misalkan $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right) = n$ adalah akar bulat dari $x^2 + x\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$ maka :

$n^2 + n\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$, maka $\sqrt{m} = n^2 + n\sqrt{k}$
Karena m bilangan asli maka $n \neq 0$

$m = n^4 + 2n^3\sqrt{k} + kn^2$

$$\sqrt{k} = \frac{m - n^4 - kn^2}{2n^3}$$

Karena m dan k adalah bilangan asli dan n bilangan bulat tak nol maka $\sqrt{k}$ merupakan bilangan rasional (terbukti).

b. Misalkan $\sqrt{k} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan FPB(p, q) = 1.

$k = \frac{p^2}{q^2}$. Karena FPB(p, q) = 1 maka FPB(p^2, q^2) = 1

Karena k adalah bilangan asli maka $q^2 = 1$.

$k = p^2$, maka $\sqrt{k} = p$ dengan p bilangan asli.

Terbukti bahwa $\sqrt{k}$ adalah bilangan asli.

Alternatif 2 :

a. Karena $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right)$ bulat dan m asli maka $\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}$ = p untuk bilangan asli p.

$\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}}\right)^2 = \left(p + \sqrt{k}\right)^2$

$4\sqrt{m} = p^2 + 2p\sqrt{k}$

Karena m asli maka tidak mungkin p = 0.

$16m = p^4 + 4p^2k + 4p^3\sqrt{k}$

$\sqrt{k} = \frac{16m - p^4 - 4p^2k}{4p^3}$

Karena m dan k asli sedangkan p bulat tak nol maka $\sqrt{k}$ merupakan bilangan rasional (terbukti).

b. Misalkan $\sqrt{k} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan FPB(p, q) = 1.

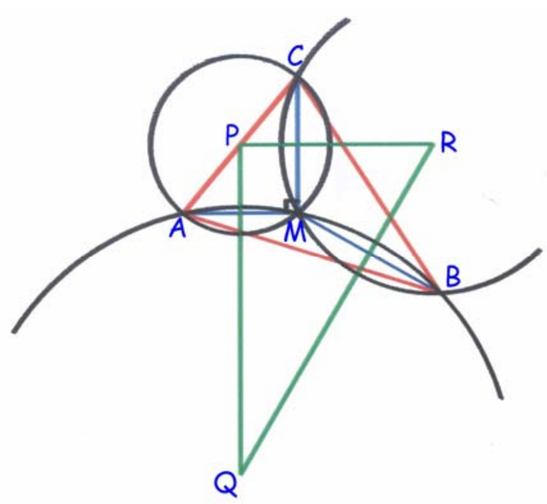
$k = \frac{p^2}{q^2}$. Karena FPB(p, q) = 1 maka FPB(p^2, q^2) = 1

Karena k adalah bilangan asli maka q^2 = 1.

k = p^2, maka $\sqrt{k} = p$ dengan p bilangan asli.

Terbukti bahwa $\sqrt{k}$ adalah bilangan asli.

4. Perhatikan gambar berikut



Misalkan AB = c, BC = a, CA = b, ∠BAC = α, ∠ABC = β dan ∠ACB = γ

Diketahui bahwa ∠AMC = 90^o, ∠AMB = 150^o dan ∠BMC = 120^o

Misalkan juga notasi [ ] menyatakan luas suatu segitiga.

[ABC] = ½ ab sin γ

Karena $\angle AMC = 90^o$ sedangkan P pusat lingkaran luar ΔAMC maka P adalah pertengahan AC.
Karena P, Q dan R pusat lingkaran dan AM, BM serta CM adalah tali busur persekutuan dua lingkaran maka $PR \perp CM$, $PQ \perp AM$ dan $QR \perp BM$.
Karena $\angle AMC = 90^o$ sedangkan $PR \perp CM$ serta $PQ \perp AM$ maka $\angle RPQ = 90^o$.
Karena $\angle BMC = 120^o$ sedangkan $PR \perp CM$ serta $QR \perp BM$ maka $\angle PRQ = 60^o$.
$\angle PQR = 180^o - 90^o - 60^o = 30^o$
Karena PR tegak lurus CM dan RC = RM maka $\angle CRP = \angle PRM = \theta$
Karena $RQ \perp MB$ dan RM = RB maka $\angle MRQ = \angle QRB = \phi$ sehingga $\angle PRM + \angle MRQ = \theta + \phi = 60^o$
$\angle CRB = 2(\theta + \phi) = 120^o$
Karena RC = RB sedangkan $\angle CRB = 120^o$ maka $\angle RCB = 30^o$
Misalkan R_1 adalah jari-jari lingkaran luar ΔBMC → $a = 2R_1 \sin \angle BMC$

$$R_1 = CR = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Pada ΔCPR berlaku :

$$PR^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\cos(\gamma + 30^\circ)$$

$$PR^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}}(\cos\gamma\cos 30^\circ - \sin\gamma\sin 30^\circ)$$

$$PR^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2[ABC]}{ab}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$PR^2 = \frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{4} + \frac{[ABC]}{\sqrt{3}}$$

$PQ = PR \tan 60^o = PR\sqrt{3}$
$[PQR] = ½ \cdot PQ \cdot PR$

$$[PQR] = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{4} + \frac{[ABC]}{\sqrt{3}}\right)$$

$$[PQR] - [ABC] = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a^2}{3} + c^2\right) - \frac{[ABC]}{2}$$

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat :

$$[PQR] - [ABC] \geq \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot 2\sqrt{\frac{a^2}{3}\cdot c^2} - \frac{[ABC]}{2}$$

$$[PQR] - [ABC] \geq \frac{ac}{4} - \frac{[ABC]}{2} = \frac{ac}{4} - \frac{ac\sin\beta}{4}$$

$$[PQR] - [ABC] \geq \frac{ac}{4}(1 - \sin\beta) > 0 \text{ sebab } \beta \neq 90^o$$

$$[PQR] > [ABC]$$

∴ **Terbukti bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC.**

5. Alternatif 1 :

$m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$, maka $\left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = m - 2005$

$\frac{m}{2005} - 1 < m - 2005 \le \frac{m}{2005}$

m – 2005 < 2005(m – 2005) ≤ m

$-2005 < 2004m - 2005^2 \le 0$

$2005^2 - 2005 < 2004m \le 2005^2$

$2005 < m \le \frac{2005^2}{2004}$

2005 < m ≤ 2006

Nilai m yang memenuhi hanya m = 2006

Jika m = 2006 diuji ke persamaan semula maka ini akan memenuhi.

∴ **Terbukti bahwa** $m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$ **mempunyai tepat satu penyelesaian.**

Alternatif 2 :

Bilangan bulat dapat dibuat ke bentuk m = 2005k + n untuk k bulat dan n ∈ {0, 1, 2, ···, 2004}.

$m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$, maka $2005k + n - \left\lfloor \frac{2005k + n}{2005} \right\rfloor = 2005$

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2005k + n – k = 2005

2004k + n = 2005

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2004k > 0 sehingga k > 0

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2004k ≤ 2005

0 < k ≤ 1, maka k = 1

2004 (1) + n = 2005, maka n = 1

Karena nilai k yang memenuhi hanya ada 1 maka kemungkinan nilai m yang memenuhi juga hanya ada 1 yaitu m = 2005 · 1 + 1 = 2006.

Jika m = 2006 diuji ke persamaan semula maka ini akan memenuhi.

∴ **Terbukti bahwa** $m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$ **mempunyai tepat satu penyelesaian**

6. $x(y + z) = y^2 + z^2 - 2$ .... (1)

$y(z + x) = z^2 + x^2 - 2$ .... (2)

$z(x + y) = x^2 + y^2 - 2$ .... (3)

Kurangkan (1) dengan (2),

$z(x - y) = y^2 - x^2 = (x + y)(y - x)$, maka $(x - y)(x + y + z) = 0$ .... (4)

Kurangkan (1) dengan (3),

$y(x - z) = z^2 - x^2 = (x + z)(z - x)$, maka $(x - z)(x + y + z) = 0$ .... (5)

Kurangkan (2) dengan (3),

$x(y - z) = z^2 - y^2 = (y + z)(z - y)$, maka $(y - z)(x + y + z) = 0$ . ... (6)

- Kasus I :

  x + y + z = 0

  Subtitusikan ke persamaan (1), (2) atau (3)

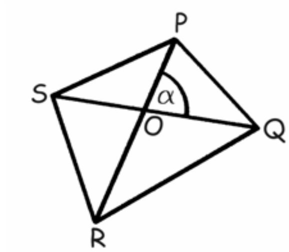
  $x(-x) = y^2 + z^2 - 2$, maka $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

Maka penyelesaiannya adalah $x^2 = 1$; $y^2 = 1$ dan $z^2 = 0$ serta permutasinya.
Tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah (x, y, z) = (1, −1, 0), (1, 0, −1), (−1, 1, 0), (−1, 0, 1), (0, 1, −1) dan (0, −1, 1)

- Kasus II :
  $x + y + z \neq 0$
  Berdasarkan persamaan (4), (5) dan (6) maka x = y = z
  Subtitusikan ke persamaan (1) didapat $2x^2 = 2x^2 - 2$, maka tidak ada nilai (x, y, z) yang memenuhi.

$\therefore$ **(x, y, z) = (1, −1, 0), (1, 0, −1), (−1, 1, 0), (−1, 0, 1), (0, 1, −1) dan (0, −1, 1)**

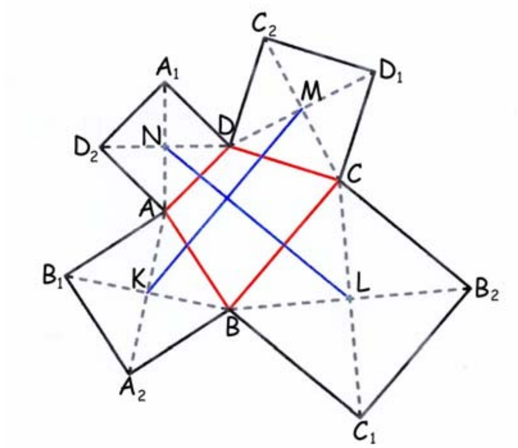
7. Alternatif 1 :
Akan dibutikan bahwa pada segiempat konveks PQRS berlaku $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$ jika dan hanya jika PR tegak lurus QS.



* Jika PR tegak lurus QS atau $\alpha = 90^o$.
$PQ^2 + RS^2 = (PO^2 + OQ^2) + (OR^2 + OS)^2 = (PO^2 + OS^2) + (OR^2 + OQ^2)$
$PQ^2 + RS^2 = PS^2 + QR^2$

* Jika $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$
Dengan dalil cosinus didapat :
$PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$
$OP^2 + OQ^2 - 2\ OP \cdot OQ \cos \alpha + OR^2 + OS^2 - 2\ OR \cdot OS \cos \alpha = OQ^2 + OR^2 - 2\ OQ \cdot OR \cos (180^o - \alpha) + OP^2 + OS^2 - 2\ OP \cdot OS \cos (180^o - \alpha)$
$(2\ OQ\ OR + 2\ OP\ OS + 2\ OP\ OQ + 2\ OR\ OS) \cos \alpha = 0$
$\alpha = 90^o$

Terbukti bahwa pada segiempat konveks PQRS berlaku $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$ jika dan hanya jika PR tegak lurus QS.



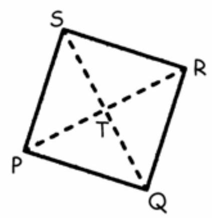
Perhatikan ΔKAN.

AA_1 dan AA_2 keduanya diagonal bidang persegi maka $\angle KAB = \angle KAB_1 = \angle NAD_2 = \angle NAD = 45^o$.
Dengan dalil cosinus didapat :
$KN^2 = AK^2 + AN^2 - 2\ AK \cdot AN \cos \angle KAN$.
Jika $\angle BAD \geq 90^o$ maka $\angle KAN = 270^o - \angle BAD$ dan jika $\angle BAD < 90^o$ maka $\angle KAN = 90^o + \angle BAD$
Akibatnya cos $\angle KAN$ akan tetap bernilai $-\sin \angle BAD$.
$KN^2 = AK^2 + AN^2 + 2\ AK \cdot AN \sin \angle BAD$.

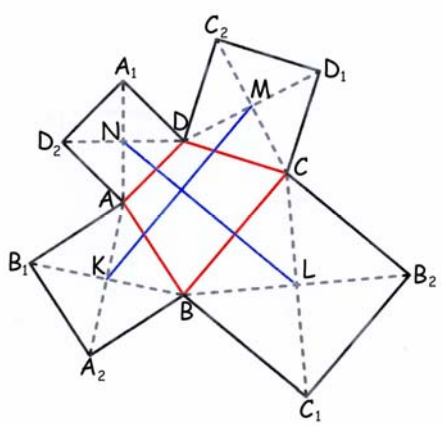
$$KN^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}AB \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}AD \cdot \sin \angle BAD$$

Dengan mengingat luas ΔABD = [ABD] = ½ AB · AD sin $\angle BAD$ maka
$KN^2 = ½AB^2 + ½AD^2 + 2[ABD]$
Dengan cara yang sama untuk ΔKBL, ΔLCM dan ΔMDN didapat :
$KL^2 = ½AB^2 + ½BC^2 + 2[ABC]$
$LM^2 = ½BC^2 + ½CD^2 + 2[BCD]$
$MN^2 = ½CD^2 + ½AD^2 + 2[ACD]$
Sehingga mengingat [ABD] + [BCD] = [ABC] + [ACD] maka
$KN^2 + LM^2 = KL^2 + MN^2$
Mengingat pembuktian yang telah dibuat di awal maka KM tegak lurus LN (terbukti)

Alternatif 2 :
Jika titik (x, y) dirotasi sebesar θ berlawanan arah jarum jam dengan titik pusat (a, b) sehingga diperoleh bayangan (x', y') maka berlaku :
$x' = a + (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta$ .... (1)
$y' = b + (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta$ .... (2)
Pembuktian persamaan di atas dapat dilihat di Buku Matematika SMA Bab Transformasi Geometri.



Misalkan koordinat $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$.
Karena PQRS adalah persegi maka koordinat titik S didapat dengan merotasi titik Q sejauh 90^o berlawanan arah jarum jam dengan pusat di P. Maka koordinat $S(x_1 + y_1 - y_2, x_2 - x_1 + y_1)$
Karena T adalah pertengahan S dan Q maka koordinat $T\left(\frac{x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}, \frac{x_2 - x_1 + y_1 + y_2}{2}\right)$.



Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan titik A terletak pada (0,0) sedangkan koordinat $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ dan $D(x_D, y_D)$.
Dari penjelasan sebelumnya didapat koordinat

$K\left(\frac{x_B+y_B}{2}, \frac{-x_B+y_B}{2}\right)$, $L\left(\frac{x_C+x_B+y_C-y_B}{2}, \frac{x_B-x_C+y_B+y_C}{2}\right)$,

$M\left(\frac{x_D+x_C+y_D-y_C}{2}, \frac{x_C-x_D+y_C+y_D}{2}\right)$ dan $N\left(\frac{x_D-y_D}{2}, \frac{x_D+y_D}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{KM} = \frac{x_D+x_C-x_B+y_D-y_C-y_B}{2}\hat{i} + \frac{x_C+x_B-x_D+y_C+y_D-y_B}{2}\hat{j}$$

$$\overrightarrow{LN} = \frac{x_D-x_C-x_B-y_D-y_C+y_B}{2}\hat{i} + \frac{x_D-x_B+x_C+y_D-y_B-y_C}{2}\hat{j}$$

$$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = \frac{1}{4}(x_D+x_C-x_B+y_D-y_C-y_B)(x_D-x_C-x_B-y_D-y_C+y_B)+\frac{1}{4}(x_C+x_B-x_D+y_C+y_D-y_B)(x_D-x_B+x_C+y_D-y_B-y_C)$$

Mengingat $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ maka :

$$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = \frac{1}{4}\left((x_D-x_B-y_C)^2-(x_C+y_D-y_B)^2\right)+\frac{1}{4}\left((x_C+y_D-y_B)^2-(x_D-x_B-y_C)^2\right) = 0$$

Karena $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = 0$ maka KM tegak lurus LN (terbukti)

8. Misalkan k_i adalah banyaknya kenalan peserta i dan K = $\sum_{i=1}^{90} k_i$ adalah penjumlahan banyaknya kenalan masing-masing peserta.
Jika peserta A berkenalan dengan B maka banyaknya kenalan A bertambah 1 begitu juga dengan B. Jelas bahwa K akan bernilai genap.
Andaikan bahwa paling banyak tiga orang siswa akan memiliki jumlah kenalan sama banyaknya.
Karena $k_i \geq 60$ maka $k_i \in \{60, 61, 62, 63, \cdots, 89\}$. Banyaknya kemungkinan nilai k_i ada 30.
Karena 90/3 = 30 maka terdapat tepat masing-masing 3 peserta memiliki kenalan sebanyak 60 orang, 61 orang, 62 orang, ⋯, 89 orang.
Maka $K = 3 \cdot 60 + 3 \cdot 61 + 3 \cdot 62 + \cdots + 3 \cdot 89$
Di antara 60, 61, 62, 63, ⋯, 89 terdapat 15 bilangan ganjil dan 15 bilangan genap. Mengingat bahwa penjumlahan sejumlah ganjil dari bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil maka :
$K = 3 \cdot 60 + 3 \cdot 61 + 3 \cdot 62 + \cdots + 3 \cdot 89$ merupakan bilangan ganjil (kontradiksi dengan kenyatan semula bahwa K bernilai genap).
Maka pengandaian bahwa paling banyak tiga orang siswa akan memiliki jumlah kenalan sama banyaknya tidak terbukti.
∴ **Terbukti bahwa setidaknya terdapat 4 peserta yang banyak** kenalannya sama.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2006

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2007

Bidang Matematika

Waktu : 3,5 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2006

OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2006

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih dari 50 adalah
   A. 169 B. 171 C. 173 D. 175 E. 177

2. Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola secara bersamaan, peluang memperoleh dua bola berwarna sama adalah
   A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{21}$ D. $\frac{10}{21}$ E. $\frac{11}{21}$

3. Jika $X = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$, maka X =
   A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{9}{4}$ E. $\frac{12}{5}$

4. Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Maka titik E membagi sisi BC dalam perbandingan
   A. 1 : 4 B. 1 : 3 C. 2 : 5 D. 4 : 11 E. 3 : 8

5. Dalam suatu pertemuan terjadi 28 jabat tangan (salaman). Setiap dua orang salaing berjabat tangan paling banyak sekali. Banyaknya orang yang hadir dalam pertemuan tersebut paling sedikit adalah
   A. 28 B. 27 C. 14 D. 8 E. 7

6. Gaji David lebih banyak 20% daripada gaji Andika. Ketika Andika memperoleh kenaikan gaji, gajinya menjadi lebih banyak 20% daripada gaji David. Persentase kenaikan gaji Andika adalah
   A. 0,44 B. 20 C. 44 D. 144 E. tidak bisa dipastikan

7. Misalkan T adalah himpunan semua titik pada bidang-xy yang memenuhi $|x| + |y| \le 4$. Luas daerah T adalah
   A. 4 B. 8 C. 12 D. 16 E. 32

8. Definisikan a*b = a + b + 1 untuk semua bilangan bulat a, b. Jika p memenuhi a*p = a, untuk setiap bilangan bulat a, maka p =
   A. –1 B. 0 C. 1 D. 2 E. tidak ada yang memenuhi

9. Setiap dong adalah ding, dan beberapa dung juga dong.
X : Terdapat dong yang juga ding sekaligus dung
Y : Beberapa ding adalah dung
Z : Terdapat dong yang bukan dung
A. Hanya X yang benar C. Hanya Z yang benar E. X, Y dan Z semuanya salah
B. Hanya Y yang benar D. X dan Y keduanya benar

10. Banyaknya solusi pasangan bilangan bulat positif persamaan $3x + 5y = 501$ adalah
A. 33 B. 34 C. 35 D. 36 E. 37

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + 50 = 1139$. Jika a bilangan positif, maka a = ·····

12. Di antara lima orang gadis, Arinta, Elsi, Putri, Rita, dan Venny, dua orang memakai rok dan tiga orang memakai celana panjang. Arinta dan Putri mengenakan jenis pakaian yang sama. Jenis pakaian Putri dan Esi berbeda, demikian pula dengan Elsi dan Rita. Kedua gadis yang memakai rok adalah ······

13. Barisan 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ··· terdiri dari semua bilangan asli yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 barisan adalah ·····

14. Jika $f(xy) = f(x + y)$ dan $f(7) = 7$, maka $f(49)$ = ····

15. Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 tiga kali nilai suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke ······

16. Dimas membeli majalah setiap 5 hari sekali, sedangkan Andre membeli majalah setiap 8 hari sekali. Kemarin Dimas membeli majalah. Andre membeli majalah hari ini. Keduanya paling cepat akan membeli majalah pada hari yang sama ····· hari lagi.

17. Nanang mencari semua bilangan empat-angka yang selisihnya dengan jumlah keempat angkanya adalah 2007. Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari ······

18. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ memiliki puncak dengan koordinat (4, 2). Jika titik (2, 0) terletak pada parabola, maka abc = ······

19. Sebuah garis ℓ_1 mempunyai kemiringan -2 dan melalui titik $(p, -3)$. Sebuah garis lainnya ℓ_2, tegaklurus terhadap ℓ_1 di titik (a, b) dan melalui titik (6, p). Bila dinyatakan dalam p, maka a =

20. Pada segitiga ABC yang tumpul di C, titik M adalah titik tengah AB. Melalui C dibuat garis tegak lurus pada BC yang memotong AB di titik E. Dari M tarik garis memotong BC tegak lurus di D. Jika luas segitiga ABC adalah 54 satuan luas, maka luas segitiga BED adalah ·····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2006
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

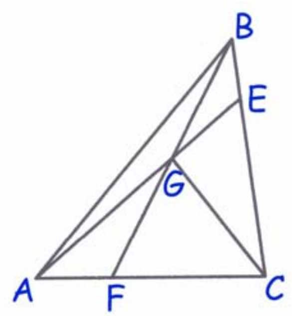
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)
   Tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 adalah 53, 59 dan 61.
   53 + 59 + 61 = 173
   ∴ Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 = **173**

2. (Jawaban : E)
   Kemungkinan kedua bola tersebut adalah keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.
   Peluang = $\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2} + \frac{{}_{10}C_2}{{}_{15}C_2}$
   ∴ Peluang = $\frac{11}{21}$

3. (Jawaban : B)
   $$X = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$$
   ∴ X = $\frac{5}{12}$

4. (Jawaban : B)



   Misalkan tanda [KML] menyatakan luas ΔKML
   Misalkan [ABC] = X. Karena AF : FC = 1 : 2 maka [ABF]= $\frac{1}{3}$[ABC] = $\frac{1}{3}$X
   Karena G pertengahan BF maka [ABG]= ½ [ABF]= $\frac{1}{6}$X = [AFG]
   Karena AF : FC = 1 : 2 maka [CGF]= 2 [AFG]= $\frac{1}{3}$X sehingga [CGB] = $\frac{1}{3}$X
   Misalkan [CGE] = P dan [EGB] = Q

$\frac{BE}{EC} = \frac{Q}{P} = \frac{Q + X / 6}{P + X / 3 + X / 6}$

6PQ + 3XQ = 6PQ + PX

$\frac{Q}{P} = \frac{1}{3}$ sehingga BE : EC = 1 : 3

∴ Titik E membagi BC dalam perbandingan = **1 : 3**

5. (Jawaban : D)

Misalkan banyaknya orang = n

${}_nC_2$ = 28, maka $\frac{n(n-1)}{2} = 28$

$n^2 - n - 56 = 0$, maka $(n - 8)(n + 7) = 0$

∴ Banyaknya orang yang hadir = **8**

6. (Jawaban : C)

Misal gaji Andika sebelum kenaikan = A dan setelah memperoleh kenaikan gaji gajinya menjadi A_x.

Gaji David sebelum kenaikan = 1,2A .

A_x = 1,2 · (1,2A) = 1,44A

Kenaikan gaji Andika = 1,44A – A = 0,44A

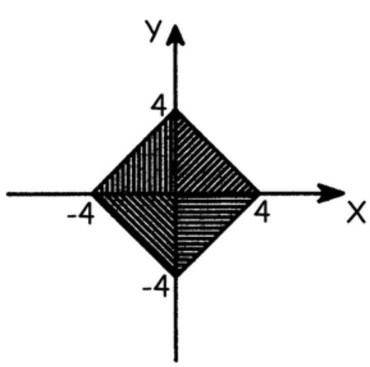
∴ Kenaikan gaji Andika adalah **44 %**

7. (Jawaban : E)

$|x| + |y| \le 4$

- Jika x dan y di kuadran I maka $|x|$ = x dan $|y|$ = y. Persamaannya adalah $x + y \le 4$
- Jika x dan y di kuadran II maka $|x|$ = –x dan $|y|$ = y. Persamaannya adalah $-x + y \le 4$
- Jika x dan y di kuadran III maka $|x|$ = –x dan $|y|$ = –y. Persamaannya adalah $-x - y \le 4$
- Jika x dan y di kuadran IV maka $|x|$ = x dan $|y|$ = –y. Persamaannya adalah $x - y \le 4$

Gambar persamaan-persamaan tersebut adalah :



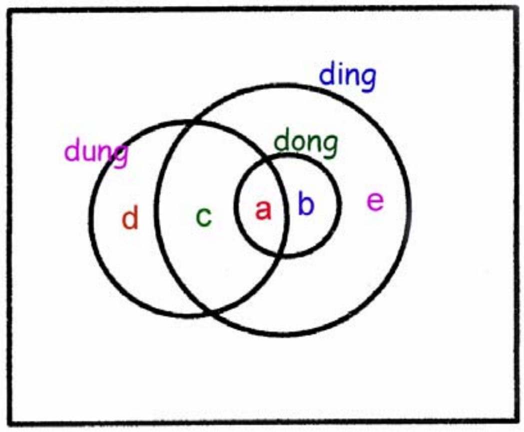
Karena panjang sisi-sisinya sama yaitu $4\sqrt{2}$ sedangkan kedua diagonalnya saling tegak lurus maka luasan berupa persegi.

Luas daerah T = $4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}$

∴ Luas daerah T = **32**

8. (Jawaban : A)
   a * b = a + b + 1
   a * p = a + p + 1
   a = a + p + 1
   ∴ p = −**1**

9. (Jawaban : D)



Karena setiap dong adalah ding maka dong merupakan himpunan bagian dari ding.
Karena beberapa dung juga dong maka dung dan dong memiliki irisan. Maka a pasti ada.
Karena a pasti ada maka a merupakan dong yang ding sekaligus dung (pernyataan X benar)
Karena a pasti ada maka a adalah merupakan ding yang sekaligus dung (pernyataan Y benar).
Dong yang bukan dung adalah b. Karena b belum pasti ada maka pernyataan Z belum dapat dibuktikan kebenarannya.
∴ **X dan Y keduanya benar.**

10. (Jawaban : A)
   3x + 5y = 501
   5y = 3(167 − x)
   Karena 3 dan 5 relatif prima maka y = 3k dan 167 − x = 5k untuk suatu k bulat positif.
   Jelas bahwa $0 < 5y \le 501$ dan $0 < 3x \le 501$, maka $0 < y \le 100$ dan $0 < x \le 167$
   Karena terdapat 100 nilai y yang memenuhi dan 167 nilai x yang memenuhi maka banyaknya nilai k yang memenuhi adalah $\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor$ = 33 atau $\left\lfloor \frac{167}{5} \right\rfloor$ = 33 yaitu $1 \le k \le 33$.
   Contoh : Jika k = 1 maka y = 3 dan x = 162 memenuhi. (k, x, y) = (2,157,6) ; (3,152,9) ; ⋯ juga memenuhi.
   ∴ Banyaknya pasangan (x, y) yang memenuhi adalah **33**

BAGIAN KEDUA

11. $a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + 50 = 1139$.
    Banyaknya bilangan a, (a + 1), (a + 2), ⋯, 50 adalah $50 - a + 1 = 51 - a$
    $\frac{1}{2}(51 - a) \cdot (a + 50) = 1139$, maka $a^2 - a - 272 = 0$ sehingga $(a - 17)(a + 16) = 0$
    ∴ **a = 17**

12. Karena pakaian Elsi baik dengan Putri maupun Rita berbeda maka Putri dan Rita memakai pakaian yang sama.
    Karena Arinta, Putri dan Rita memakai pakaian yang sama maka ketiganya tidak mungkin mamakai rok. Maka Arinta, Putri dan Rita memakai celana panjang sedangkan Elsi dan Venny memakai rok.
    ∴ Kedua gadis yang memakai rok adalah **Elsi dan Venny.**

13. Bilangan kuadrat yang sekaligus juga bilangan pangkat tiga adalah bilangan pangkat enam.
    Bilangan kuadrat ≤ 265 adalah $1^2, 2^2, \cdots, 16^2$ ada sebanyak 16 bilangan.
    Bilangan pangkat tiga ≤ 265 adalah $1^3, 2^3, \cdots, 6^3$ ada sebanyak 6 bilangan.
    Bilangan pangkat enam ≤ 265 adalah 1^6 dan 2^6 ada sebanyak 2 bilangan.
    Banyaknya bilangan yang bukan pangkat dua atau pangkat tiga yang $\leq 265 = 16 + 6 - 2 = 20$.
    Maka 265 adalah suku ke $265 - 20 = 245$.
    Lima bilangan setelah 265 yang bukan bilangan kuadrat atau pangkat tiga adalah 266, 267, 268, 269 dan 270.
    ∴ Suku ke-250 dari barisan tersebut adalah **270**

14. $f(xy) = f(x + y)$
    Jika $x = n$ dan $y = 1$ maka $f(n) = f(n + 1)$
    Maka $f(49) = f(48) = f(47) = f(46) = \cdots = f(7)$
    ∴ $f(49) =$ **7**

15. $u_{25} = 3(u_5)$, maka $a + 24b = 3(a + 4b)$ sehingga $a = 6b$
    $u_n = a + (n - 1)b = 2u_1 = 2a$
    $6b + (n - 1)b = 2(6b)$, maka $n = 7$
    ∴ Suku tersebut adalah suku ke-**7**

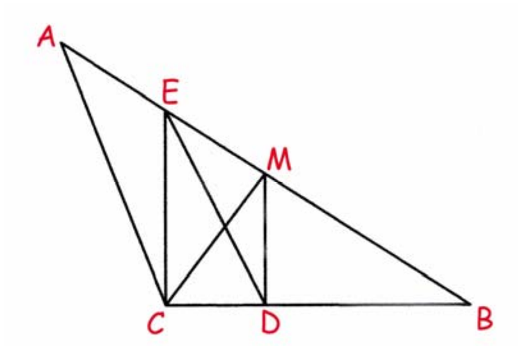
16. Misalkan hari ini adalah hari ke-0
    Karena kemarin Dimas membeli majalah sedangkan Dimas membeli setiap 5 hari sekali maka Dimas akan membeli majalah pada hari $h_1 = 5k + 4$ dengan k bilangan asli.
    Karena hari ini Andre membeli majalah sedangkan Andre membeli setiap 8 hari sekali maka Andre akan membeli majalah pada hari $h_2 = 8n$ dengan n bilangan asli.
    Mereka akan membeli majalah pada hari yang sama jika $5k + 4 = 8n$.
    Karena 4 dan 8 keduanya habis dibagi 4 maka k harus habis dibagi 4. Nilai k terkecil adalah 4.
    $h_1 = h_2 = 5(4) + 4 = 24$
    ∴ Maka mereka akan membeli majalah pada hari yang sama paling cepat **24** hari lagi.

17. Misalkan bilangan tersebut adalah 1000a + 100b + 10c + d
Maka 1000a + 100b + 10c + d − a − b − c − d = 2007
999a + 99b + 9c = 2007, maka 111a + 11b + c = 223
Karena a > 0 dan 111a < 223 maka a = 1 atau 2.
Jika a = 1 maka 11b + c = 112 > 11(9) + 9 = 108 (tidak ada nilai b dan c yang memenuhi).
Jika a = 2 maka 11b + c = 1. Nilai b dan c yang memenuhi hanya b = 0 dan c = 1.
Tripel (a, b, c) yang memenuhi hanya ada 1 kemungkinan yaitu (2, 0, 1). Nilai d yang memenuhi ada 10 kemungkinan yaitu 0, 1, 2, ··, 9.
Bilangan 4 angka tersebut yang memenuhi ada 10 yaitu 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, ···, 2019.
∴ Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari **10.**

18. Persamaan parabola yang berpuncak di (x_p, y_p) adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.
Karena titik puncak parabola di (4, 2) maka $y = a(x - 4)^2 + 2$
Karena titik (2, 0) terletak pada parabola maka :
$0 = a(2 - 4)^2 + 2$, maka $a = -½$
Persamaan parabola tersebut adalah $y = -½(x - 4)^2 + 2 = -½x^2 + 4x - 6$
a = −½ ; b = 4 dan c = −6
∴ **abc =** 12

19. Persamaan garis ℓ_1 adalah y + 3 = −2(x − p)
Karena ℓ_2 tegak lurus ℓ_1 maka gradien garis ℓ_2 adalah ½.
Persamaan garis ℓ_2 adalah y − p = ½(x − 6)
Kedua garis melalui (a, b) maka :
b + 3 = −2(a − p) dan b − p = ½(a − 6)
3 + p = −2(a − p) − ½(a − 6)
6 + 2p = −4a + 4p − a + 6
∴ $a = \frac{2}{5}\mathbf{p}$

20. Misalkan ∠ABC = β
Luas ΔABC = ½ · BA · BC sin β = 54
Karena MD sejajar EC maka ΔBMD sebangun dengan ΔBEC
$$\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC}$$
BM · BC = BD · BE
Luas ΔBED = ½ · BE · BD sin β = ½ · BM · BC sin β
Luas ΔBED = ½ (½ · BA · BC sin β)
Luas ΔBED = ½ Luas ΔABC
∴ Luas segitiga BED adalah **27 satuan luas.**



SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2006

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2006

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

BAGIAN PERTAMA

1. Hasil penjumlahan semua bilangan bulat di antara $\sqrt[3]{2006}$ dan $\sqrt{2006}$ adalah ····

2. Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar dengan DC. Sebuah lingkaran yang menyinggung keempat sisi trapesium dapat dibuat. Jika AB = 75 dan DC = 40, maka keliling trapesium ABCD = ········

3. Himpunan semua x yang memenuhi $(x - 1)^3 + (x - 2)^2 = 1$ adalah ·····

4. Bilangan prima dua angka terbesar yang merupakan jumlah dua bilangan prima lainnya adalah ····

5. Afkar memilih suku-suku barisan geometri takhingga 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ··· untuk membuat barisan geometri takhingga baru yang jumlahnya $\frac{1}{7}$. Tiga suku pertama pilihan Afkar adalah ·····

6. Luas sisi-sisi sebuah balok adalah 486, 486, 243, 243, 162, 162. Volume balok tersebut adalah ·····

7. Nilai maksimum fungsi f(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3}$ adalah ····

8. Diberikan fungsi $f(x) = \left|\,|x - 2| - a\right| - 3$. Jika grafik f memotong sumbu-x tepat di tiga titik, maka a = ····

9. Untuk bilangan asli n, tuliskan s(n) = 1 + 2 + ··· + n dan p(n) = 1 x 2 x ··· x n. Bilangan genap n terkecil yang memenuhi p(n) habis dibagi s(n) adalah ····

10. Jika $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$, maka x + y = ······

11. Sebuah himpunan tiga bilangan asli disebut *himpunan aritmatika* jika salah satu unsurnya merupakan rata-rata dari dua unsur lainnya. Banyaknya subhimpunan aritmatika dari {1,2,3,···,8} adalah ····

12. Dari setiap bilangan satu-angka a, bilangan N dibuat dengan menyandingkan ketiga bilangan a + 2, a + 1, a yaitu N = $\overline{(a+2)(a+1)a}$. Sebagai contoh, untuk a = 8, N = 1098. Kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar ·····

13. Jika $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$, maka $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} =$ ············

14. Sebuah kelas akan memilih seorang murid di antara mereka untuk mewakili kelas tersebut. Setiap murid mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih. Peluang seorang murid laki-laki terpilih sama dengan $\frac{2}{3}$ kali peluang terpilihnya seorang murid perempuan. Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah ····

15. Pada segitiga ABC, garis bagi sudut A memotong sisi BC di titik D. Jika AB = AD = 2 dan BD = 1, maka CD = ·····

16. Jika $(x - 1)^2$ membagi $ax^4 + bx^3 + 1$, maka ab = ····

17. Dari titik O ditarik dua setengah-garis (sinar) ℓ_1 dan ℓ_2 yang membentuk sudut lancip α. Titik – titik berbeda A_1, A_3, A_5 terletak pada garis ℓ_2, sedangkan titik-titik A_2, A_4, A_6 terletak di ℓ_1. Jika $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4O = OA_5 = A_5A_6 = A_6A_1$, maka α = ·····

18. Banyaknya bilangan 7-angka berbeda yang dapat dibentuk dengan cara mengubah susunan angka 2504224 adalah ····

19. Evan membuat sebuah barisan bilangan asli a_1, a_2, a_3, ··· yang memenuhi $a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1$, untuk k = 2, 3, ···, dan $a_2 - a_1 = 2$. Jika 2006 muncul dalam barisan, nilai a_1 terkecil yang mungkin adalah ·····

20. Pada segitiga ABC, garis-garis berat dari titik sudut B dan titik sudut C saling berpotongan tegak lurus. Nilai minimum ctg B + ctg C adalah ·····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2006

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2006

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan segitiga ABC siku-siku di B. Garis tinggi dari B memotong sisi AC di titik D. Jika titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah BD dan CD, buktikan bahwa $AE \perp BF$.

2. Misalkan m bilangan asli yang memenuhi $1003 < m < 2006$. Diberikan himpunan bilangan asli $S = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$, berapa banyak anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 ?

3. Misalkan $d = FPB(7n + 5, 5n + 4)$, dimana n adalah bilangan asli.
   (a) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku d = 1 atau 3.
   (b) Buktikan bahwa d = 3 jika dan hanya jika $n = 3k + 1$, untuk suatu bilangan asli k.

4. Win memiliki dua koin. Ia akan melakukan prosedur berikut berulang-ulang selama ia masih memiliki koin : lempar semua koin yang dimilikinya secara bersamaan; setiap koin yang muncul dengan sisi angka akan diberikannya kepada Albert. Tentukan peluang bahwa Win akan mengulangi prosedur ini lebih dari tiga kali.

5. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan asli. Jika semua akar ketiga persamaan
$$x^2 - 2ax + b = 0$$
$$x^2 - 2bx + c = 0$$
$$x^2 - 2cx + a = 0$$
   adalah bilangan asli, tentukan a, b dan c.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

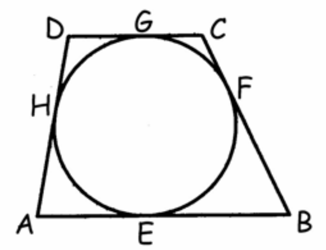
Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $12^3 = 1728$; $13^3 = 2197$; $44^2 = 1936$; $45^2 = 2025$
   $\sqrt[3]{2006} < m < \sqrt{2006}$ dapat disederhanakan menjadi $13 \le m \le 44$ untuk m bulat
   Himpunan m yang memenuhi = {13, 14, 15, ⋯, 44}
   13 + 14 + 15 + ⋯ + 44 = 912
   ∴ Penjumlahan semua bilangan yang memenuhi sama dengan **912.**

2. Jika titik P di luar lingkaran dan garis yang ditarik dari titik P menyinggung lingkaran tersebut di titik Q dan R maka PQ = PR



   Dari gambar di atas didapat DG = DH ; CG = CF ; BF = BE ; AE = AH
   Keliling = AE + AH + BE + BF + CF + CG + DG + DH = 2 (DG + CG + AE + BE)
   Keliling = 2(DC + AB) = 2(40 + 75)
   ∴ Keliling trapesium = **230**

3. $(x - 1)^3 + (x - 2)^2 = 1$
   $(x - 1)^3 = 1 - (x - 2)^2 = (1 - (x - 2))(1 + (x - 2)) = (3 - x)(x - 1)$
   $(x - 1)((x - 1)^2 - (3 - x)) = 0$
   $(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$
   $(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$
   ∴ Himpunan semua nilai x yang memenuhi adalah **{−1, 1, 2}**

4. Misalkan a, b dan c adalah ketiga bilangan prima tersebut dengan a = b + c
   Bilangan prima genap hanya ada satu yaitu 2.
   Karena a > 2 maka a pasti ganjil yang menyebabkan paritas b dan c harus berbeda.
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan $c \le b$ maka c = 2
   a = b + 2 sehingga a − b = 2
   Karena a − b = 2 maka terdapat tepat 1 bilangan asli di antara a dan b. Misalkan bilangan tersebut adalah k. Maka b, k dan a adalah 3 bilangan asli berurutan. Salah satunya harus habis dibagi 3. Karena b dan a bilangan prima lebih dari 3 maka k habis dibagi 3. Karena k juga genap maka k habis dibagi 6.
   Jika k = 16 · 6 = 96 maka b = 95 bukan prima. Jika k = 15 · 6 = 90 maka a = 91 bukan prima. Jika k = 14 · 6 = 84 maka a = 85 bukan prima. Jika k = 13 · 6 = 78 maka b = 77 bukan prima. Jika k = 12 · 6 = 72 maka a = 73 dan b = 71 yang memenuhi keduanya prima
   ∴ Bilangan prima dua angka terbesar yang memenuhi adalah **73.**

5. $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

Misalkan bilangan pertama yang dipilih Afkar adalah $(½)^a$ untuk a bilangan bulat tak negatif dan rasio, $r = (½)^b$ untuk b bilangan asli maka :

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^a}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^b} = \frac{1}{7}$$

Karena b asli maka $½ \le 1 - (½)^b < 1$

$$\frac{1}{14} \le \left(\frac{1}{2}\right)^a < \frac{1}{7}$$

Nilai a yang memenuhi hanya a = 3 sehingga b = 3

Maka 3 suku pertama yang dipilih Afkar adalah $(½)^3$, $(½)^6$ dan $(½)^9$

∴ Tiga suku pertama yang dipilih Afkar adalah $\frac{1}{8}$**,** $\frac{1}{64}$**,** $\frac{1}{512}$**.**

6. Misalkan panjang sisi-sisi balok tersebut adalah a, b dan c.

Tanpa mengurangi keumuman misalkan $ab = 486 = 2 \cdot 3^5$; $ac = 243 = 3^5$; $bc = 162 = 2 \cdot 3^4$

$(ab)(ac)(bc) = (abc)^2 = 2^2 \cdot 3^{14}$

$abc = 2 \cdot 3^7 = 4374$

∴ Volume balok = **4374**

7. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3}$, maka $f(x) = 3^{-x^2+4x-3}$

Agar f(x) maksimum maka $y = -x^2 + 4x - 3$ harus maksimum.

$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$

y maksimum = 1 saat x = 2

$f(x)_{maksimum} = 3$

∴ $f(x)_{maksimum}$ = **3**

8. $f(x) = \left|\,|x-2| - a\right| - 3$

f memotong sumbu x maka $\left|\,|x-2| - a\right| - 3 = 0$

$\left|\,|x-2| - a\right| = 3$

$|x-2| - a = 3$ atau $|x-2| - a = -3$

$|x-2| = a + 3$ atau $|x-2| = a - 3$

Jika a + 3 = 0 maka $|x-2| = 0$ hanya ada 1 penyelesaian. Sebaliknya jika $a + 3 \neq 0$ maka penyelesaian $|x-2| = a + 3$ ada 2 penyelesaian yaitu x − 2 = a + 3 atau x − 2 = −(a + 3)

Hal yang sama untuk persamaan $|x-2| = a - 3$

Maka jika a = −3 akan menyebabkan hanya ada 1 penyelesaian x untuk persamaan $|x-2| = a + 3$ namun ada dua nilai x untuk penyelesaian $|x-2| = a - 3$

Sedangkan jika a = 3 akan menyebabkan hanya ada 1 penyelesaian x untuk persamaan $|x - 2| = a - 3$ namun ada dua nilai x untuk penyelesaian $|x - 2| = a + 3$

$\therefore$ Nilai a yang membuat grafik f memotong sumbu x tepat di 3 titik adalah **a = 3 atau a = –3.**

9. s(n) = 1 + 2 + ··· + n = ½n(n + 1)

   p(n) = 1 x 2 x ··· x n

   Karena n genap maka ½n bilangan bulat.

   Karena n + 1 > 1 ; n + 1 > 2 ; ··· ; n + 1 > n maka agar p(n) habis dibagi s(n) maka n + 1 tidak boleh prima.

   Bilangan genap terkecil yang menyebabkan n + 1 bukan prima adalah 8.

   $\therefore$ Bilangan genap terkecil yang memenuhi p(n) habis dibagi s(n) adalah **8.**

10. $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$

    * Jika x dan y di kuadran I maka $|x| = x$ dan $|y| = y$
      2x + y = 10 dan x = 12 sehingga y = –14 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran I)
    * Jika x dan y di kuadran II maka $|x| = -x$ dan $|y| = y$
      y = 10 dan x = 12 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran II)
    * Jika x dan y di kuadran III maka $|x| = -x$ dan $|y| = -y$
      y = 10 dan x – 2y = 12 sehingga x = 32 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran III)
    * Jika x dan y di kuadran IV maka $|x| = x$ dan $|y| = -y$
      2x + y = 10 dan x – 2y = 12

      Nilai (x, y) yang memenuhi adalah $\left(\frac{32}{5}, -\frac{14}{5}\right)$ (memenuhi (x, y) di kuadran IV)

    $\therefore$ $x + y = \frac{32}{5} - \frac{14}{5} = \frac{18}{5}$

11. Jika a, b dan c adalah himpunan aritmatika maka 2b = a + c dengan a < c.

    - Jika b = 2 maka a + c = 4. Ada 1 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 3)
    - Jika b = 3 maka a + c = 6. Ada 2 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 5), (2, 4)
    - Jika b = 4 maka a + c = 8. Ada 3 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 7), (2, 6), (3, 5)
    - Jika b = 5 maka a + c = 10. Ada 3 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (2, 8), (3, 7), (4, 6)
    - Jika b = 6 maka a + c = 12. Ada 2 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (4, 8), (5, 7)
    - Jika b = 7 maka a + c = 14. Ada 1 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (6, 8)

    $\therefore$ Banyaknya himpunan aritmatika = 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = **12**

12. (a + 2) + (a + 1) + a = 3(a + 1)

    Maka semua bilangan yang berbentuk N = $\overline{(a+2)(a+1)a}$ habis dibagi 3 sebab penjumlahan digitnya habis dibagi 3.

    321 = 3 · 107 dengan 3 dan 107 adalah bilangan prima.

    Tetapi 432/107 bukan bilangan bulat atau 107 tidak membagi 432.

    FPB (321, 432) = 3

    $\therefore$ Maka kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar = **3**

13. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$, maka $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 47$ sehingga $x + \frac{1}{x} = 7$

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 = 7$

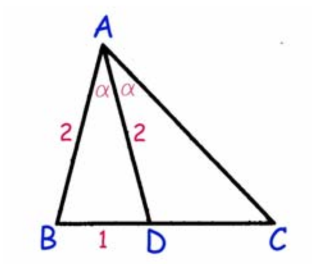
$\therefore\ \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$

14. Misalkan jumlah murid laki-laki = m dan jumlah murid perempuan = n
(m : (m + n)) : (n : (m + n)) = 2 : 3
m : n = 2 : 3, maka 3m = 2n

$\frac{m}{m+n} = \frac{2m}{2m+3m} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah **40 %**

15.



Karena α < 45 maka AC > AD sehingga AC > 2

Karena AD adalah garis bagi ΔABC maka berlaku $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ sehingga AC = 2 CD

Misalkan panjang CD = x maka AC = 2x

Pada ΔABD berlaku $\cos\alpha = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{8}$

Pada ΔABC berlaku $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{(2x)^2 + 2^2 - (1+x)^2}{2 \cdot (2x) \cdot 2}$

$\frac{34}{64} = \frac{4x^2 + 4 - (1 + 2x + x^2)}{8x}$

$17x = 12x^2 - 8x + 12$

$(4x - 3)(3x - 4) = 0$

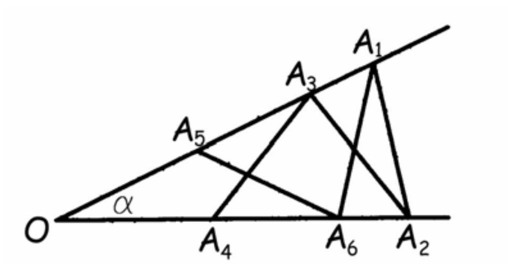
Karena AC > 2 maka x > 1

Nilai x yang memenuhi hanya x = $\frac{4}{3}$

$\therefore$ CD = $\frac{4}{3}$

16. $ax^4 + bx^3 + 1 = q(x) \cdot (x - 1)^2$
Jelas bahwa q(x) harus merupakan fungsi kuadrat.
Karena koefisien x^4 adalah a dan konstanta ruas kiri = 1 maka $q(x) = ax^2 + px + 1$
$ax^4 + bx^3 + 1 = (ax^2 + px + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)$
$ax^4 + bx^3 + 1 = ax^4 + (-2a + p)x^3 + (a - 2p + 1)x^2 + (p - 2)x + 1$
Dari persamaan di atas didapat :
Berdasarkan koefisien x maka $p - 2 = 0$ sehingga $p = 2$
Berdasarkan koefisien x^2 maka $a - 2p + 1 = 0$ sehingga $a = 3$
Berdasarkan koefisien x^3 maka $b = -2a + p$ sehingga $b = -4$
$\therefore$ ab = **–12**

17.

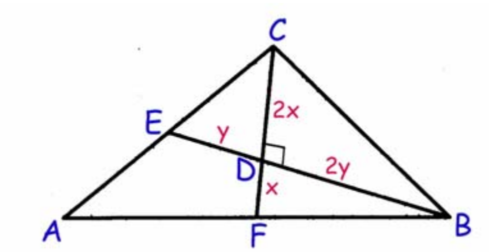


Karena $A_4O = A_3A_4$ maka ΔOA_4A_3 sama kaki sehingga $\angle OA_3A_4 = \alpha$ dan $\angle A_3A_4A_6 = 2\alpha$
Pada $\Delta A_4A_3A_2$ sama kaki berlaku $\angle A_3A_2A_4 = 2\alpha$, maka $\angle A_4A_3A_2 = 180^o - 4\alpha$ sehingga $\angle A_2A_3A_1 = 3\alpha$
Pada $\Delta A_1A_2A_3$ sama kaki berlaku $\angle A_2A_1A_3 = 3\alpha$, maka $\angle A_1A_2A_3 = 180^o - 6\alpha$
$\angle A_1A_2A_6 = \angle A_3A_2A_4 + \angle A_1A_2A_3 = 180^o - 4\alpha$
Pada $\Delta A_1A_2A_6$ sama kaki berlaku $\angle A_1A_6A_2 = \angle A_1A_2A_6 = 180^o - 4\alpha$, maka $\angle A_6A_1A_2 = 8\alpha - 180^o$
$\angle A_5A_1A_6 = \angle A_2A_1A_3 - \angle A_6A_1A_2 = 3\alpha - (8\alpha - 180^o) = 180^o - 5\alpha$
Pada $\Delta A_1A_6A_5$ sama kaki berlaku $\angle A_6A_5A_1 = \angle A_5A_1A_6 = 180^o - 5\alpha$, maka $\angle A_6A_5O = 5\alpha$
Pada ΔOA_5A_6 sama kaki berlaku $\angle OA_6A_5 = \angle A_5OA_6 = \alpha$
Pada ΔOA_5A_6 berlaku $\angle A_5OA_6 + \angle OA_5A_6 + \angle OA_6A_5 = 180^o$
$\alpha + 5\alpha + \alpha = 180^o$
$\therefore \quad \alpha = \frac{180°}{7}$

18. Banyaknya susunan 7 angka dengan 3 buah angka 2 yang sama dan 2 buah angka 4 yang sama adalah $\frac{7!}{3!\cdot 2!}$ = 420. Tetapi 420 bilangan tersebut termasuk bilangan dengan angka 0 pada angka pertama.
Banyaknya bilangan dengan 0 pada angka pertama adalah $\frac{6!}{3!\cdot 2!}$ = 60
$\therefore$ Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk adalah 420 – 60 = **360.**

19. $a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1$
Misalkan $a_2 - a_1 = 2 = u_1$
$a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1) - 1 = 2u_1 - 1 = u_2$
$a_4 - a_3 = 2(a_3 - a_2) - 1 = 2u_2 - 1 = u_3$
$\vdots$
$a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1 = 2u_{k-1} - 1 = u_k$
Jumlahkan seluruh persamaan di atas didapat :
$a_{k+1} - a_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$
Karena a_1, a_2, a_3, ⋯ semuanya asli maka $a_{k+1} > u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$
Misalkan $a_{k+1} = 2006$
Agar didapat $(a_1)_{minimal}$ maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$ harus paling dekat dengan 2006 namun kurang dari 2006
$u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$; $u_4 = 9$; $u_5 = 17$; $u_6 = 33$; $u_7 = 65$; $u_8 = 129$; $u_9 = 257$; $u_{10} = 513$ dan $u_{11} = 1025$.
$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10} = 1033$ sedangkan $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{11} = 2058 > 2006$
maka $2006 = a_{11}$
$a_{11} - a_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10} = 1033$
$(a_1)_{minimum} = 2006 - 1033$
$\therefore$ $(a_1)_{minimum} = \mathbf{973}$

20.



CF dan BE adalah garis berat yang berpotongan di titik D. Maka CD : DF = 2 : 1 dan BD : DE = 2 : 1
Misalkan DF = x maka CD = 2x dan jika DE = y maka BD = 2y

tan B = tan (∠CBD + ∠FBD) = $\dfrac{\tan \angle CBD + \tan \angle FBD}{1 - \tan \angle CBD \cdot \tan \angle FBD}$

$$\tan B = \frac{\frac{2x}{2y} + \frac{x}{2y}}{1 - \frac{2x}{2y} \cdot \frac{x}{2y}} = \frac{3xy}{2y^2 - x^2}$$, maka $ctgB = \dfrac{2y}{3x} - \dfrac{x}{3y}$

tan C = tan (∠BCD + ∠ECD) = $\dfrac{\tan \angle BCD + \tan \angle ECD}{1 - \tan \angle BCD \cdot \tan \angle ECD}$

$$\tan C = \frac{\frac{2y}{2x} + \frac{y}{2x}}{1 - \frac{2y}{2x} \cdot \frac{y}{2x}} = \frac{3xy}{2x^2 - y^2}$$, maka $ctgC = \dfrac{2x}{3y} - \dfrac{y}{3x}$

$$ctgB + ctgC = \frac{x}{3y} + \frac{y}{3x}$$

Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka :

$$ctgB + ctgC \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y} \cdot \frac{y}{3x}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ Maka nilai minimum ctg B + ctg C adalah $\frac{2}{3}$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

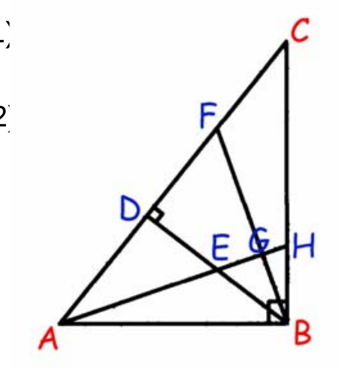
BAGIAN KEDUA

1. Alternatif 1 :

Misalkan $\angle GAF = \alpha$ dan $\angle GFA = \gamma$

$\tan A = \frac{BD}{AD}$ sedangkan $\tan \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{BD}{2AD} = \frac{\tan A}{2}$ .... (1)

$\tan C = \frac{BD}{CD}$ sedangkan $\tan \gamma = \frac{BD}{FD} = \frac{2BD}{CD} = 2\tan C$ .... (2)



$A + C = 90^o$, maka $\tan A = \tan (90^o - C) = \text{ctg } C$ sehingga $\tan A \tan C = 1$

$\tan \alpha \cdot \tan \gamma = \tan A \cdot \tan C = 1$

$\tan(\alpha + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \gamma}$

Karena $\tan \alpha \cdot \tan \gamma = 1$ maka $\alpha + \gamma = 90^o$

Pada ΔAGF berlaku $\angle AGF = 180^o - (\alpha + \gamma) = 90^o$

Karena $\angle AGF = 90^o$ maka AG tegak lurus FG

$\therefore$ **Terbukti bahwa AE $\perp$ BF**

Alternatif 2 :

Misalkan $\angle BAC = \theta$ maka $\angle ABD = 90^o - \theta$

Jelas bahwa $\angle DBC = \theta$. Karena ΔBCD siku-siku di D maka $\angle BCD = 90^o - \theta$.

Akibatnya ΔABD sebangun dengan ΔBCD.

Karena E pertengahan BD dan F pertengahan CD maka ΔEAD sebangun dengan ΔBDF.

Misalkan $\angle GAF = \alpha$. Karena ΔEAD sebangun dengan ΔBDF, maka $\angle FBD = \alpha$.

Karena ΔAED siku-siku di D maka $\angle DEA = \angle GEB = 90^o - \alpha$.

Pada ΔBEG berlaku :

$\angle BEG + \angle FBD + \angle EGB = 180^o$

$(\alpha) + (90^o - \alpha) + \angle EGB = 180^o$

$\angle EGB = 90^o$

Karena $\angle EGB = 90^o$ maka garis AG tegak lurus BF.

Jadi garis AE tegak lurus BF (terbukti).

$\therefore$ **Terbukti bahwa AE $\perp$ BF**

2. Dibuat subhimpunan {1, 2005}, {2, 2004}, {3, 2003}, ···, {1002, 1004}, {1003}

Jika diambil satu bilangan dari masing-masing subhimpunan tersebut maka terdapat 1003 bilangan yang tidak ada sepasang di antaranya yang berjumlah 2006.

Jika ditambahkan satu bilangan lagi selain 1003 bilangan tersebut maka dapat dipastikan terdapat sepasang bilangan yang berjumlah 2006.

$\therefore$ Banyaknya anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 adalah **1004.**

3. d = FPB(7n + 5, 5n + 4)
   a. Maka d | 7n + 5 dan d | 5n + 4
      Karena d membagi 7n + 5 maka d juga membagi 5(7n + 5)
      Karena d membagi 5n + 4 maka d juga membagi 7(5n + 4)
      Akibatnya d juga membagi 7(5n + 4) − 5(7n + 5) = 3
      Karena d | 3 maka d = 1 atau 3 (terbukti)
   b. Sebuah bilangan akan termasuk ke dalam salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2
      Jika n = 3k maka 7n + 5 = 21k + 5 ≡ 2 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 4 ≡ 1 (mod 3)
      Jika n = 3k + 1 maka 7n + 5 = 21k + 12 ≡ 0 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 9 ≡ 0 (mod 3)
      Jika n = 3k + 2 maka 7n + 5 = 21k + 19 ≡ 1 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 14 ≡ 2 (mod 3)

   ∴ **Terbukti bahwa hanya bentuk n = 3k + 1 yang menyebabkan kedua bilangan 7n + 5 dan 5n + 4 habis dibagi 3 untuk n bilangan asli.**

4. Agar Win akan mengulangi prosedur pelemparan koin lebih dari tiga kali maka pada lemparan yang ketiga masih terdapat sedikitnya satu koin yang muncul dengan sisinya bukan angka.
   Pada lemparan pertama agar hal tersebut terjadi maka sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka.
   - Jika pada lemparan pertama yang muncul adalah satu sisi angka dan satu bukan angka.
     Peluang tersebut adalah ½.
     Pada lemparan kedua dan ketiga sisi satu-satunya koin yang ia lempar harus bukan angka.

     Peluang pada masing-masing kejadian adalah ½ .

     Peluang Win akan mengulangai prosedur lebih dari tiga kali adalah ½ · ½ · ½ = $\frac{1}{8}$
   - Jika pada lemparan pertama kedua koin muncul dengan sisi bukan angka
     Peluang kejadian tersebut adalah ½ · ½ = ¼
     Agar Win akan mengulangi prosedur maka pada lemparan kedua sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka.
     - Jika pada lemparan kedua yang muncul adalah satu sisi angka dan satu bukan angka
       Peluang tersebut adalah ½.
       Pada lemparan ketiga sisi satu-satunya koin yang ia lempar tersebut harus bukan angka.
       Peluang kejadian tersebut adalah ½ .

       Peluang Win akan mengulangi prosedur lebih dari tiga kali adalah ¼ · ½ · ½ = $\frac{1}{16}$
     - Jika pada lemparan kedua, kedua koin muncul dengan sisi bukan angka
       Peluang kejadian tersebut adalah ½ · ½ = ¼
       Agar Win akan mengulangai prosedur maka pada lemparan ketiga sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka. Peluang kejadian ini adalah ¾.

       Peluang Win akan mengulangi prosedur lebih dari tiga kali adalah ¼ · ¼ · ¾ = $\frac{3}{64}$

   ∴ Maka peluang Win akan mengulangi prosedur tersebut lebih dari 3 kali adalah $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{3}{64}=\frac{15}{64}$

5. $x^2 - 2ax + b = 0$ .... (1)
$x^2 - 2bx + c = 0$ .... (2)
$x^2 - 2cx + a = 0$ .... (3)
Karena akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah bilangan asli maka diskriminannya harus merupakan kuadrat sempurna.
Dari pers (1) didapat fakta bahwa $4a^2 - 4b$ merupakan kuadrat sempurna
Maka $a^2 - b$ merupakan kuadrat sempurna .... (4)
Dengan cara yang sama untuk persamaan (2) dan (3) didapat :
$b^2 - c$ juga kuadrat sempurna .... (5)
$c^2 - a$ juga kuadrat sempurna .... (6)
Pada persamaan (4) karena a dan b bilangan asli maka $a^2 - b < a^2$ atau $a^2 - b \le (a - 1)^2$
$-b \le -2a + 1$, maka $b \ge 2a - 1$ .... (7)
Dengan cara yang sama untuk persamaan (5) dan (6) didapat :
$c \ge 2b - 1$ .... (8)
$a \ge 2c - 1$ .... (9)
Maka :
$a \ge 2c - 1 \ge 2(2b - 1) - 1 \ge 2(2(2a - 1) - 1) - 1.$
$a \ge 8a - 7$, maka $a \le 1$ sehingga $a = 1$
Dari persamaan (9) didapat $1 \ge 2c - 1$ maka $c \le 1$ sehingga $c = 1$
Dari persamaan (8) didapat $1 \ge 2b - 1$ maka $b \le 1$ sehingga $b = 1$
$\therefore$ a, b dan c yang memenuhi persamaan tersebut hanya **a = b = c = 1**

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006

SEMARANG (JAWA TENGAH), 4 – 9 SEPTEMBER 2006

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS

TAHUN 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006
4 – 9 SEPTEMBER 2006
SEMARANG, JAWA TENGAH

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

1. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi
   $x^3 - y^3 = 4(x - y)$
   $x^3 + y^3 = 2(x + y)$

2. Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan asli. Jika $30 \mid (a + b + c)$, buktikan bahwa $30 \mid (a^5 + b^5 + c^5)$
   [Catatan : $x \mid y$ menyatakan x habis membagi y.]

3. Misalkan S adalah himpunan semua segitiga ABC yang memenuhi sifat : tan A, tan B dan tan C adalah bilangan-bilangan asli. Buktikan bahwa semua segitiga anggota S sebangun.

4. Misalkan n > 2 sebuah bilangan asli tetap.
   Sebuah bidak hitam ditempatkan pada petak pertama dan sebuah bidak putih ditempatkan pada petak terakhir sebuah papan ‘catur’ berukuran 1 x n. Wiwit dan Siti lalu melangkah bergantian. Wiwit memulai permainan dengan bidak putih. Pada setiap langkah, pemain memindahkan bidaknya sendiri satu atau dua petak ke kanan atau ke kiri tanpa melompati bidak lawan. Pemain yang tidak bisa melangkah dinyatakan kalah. Pemain manakah yang memiliki cara (strategi) untuk selalu memenangkan permainan, apa pun yang dilakukan lawannya ? Jelaskan strategi pemain tersebut ?

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006

SEMARANG (JAWA TENGAH), 4 – 9 SEPTEMBER 2006

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2006

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006
4 – 9 SEPTEMBER 2006
SEMARANG, JAWA TENGAH

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

5. Pada segitiga ABC, M adalah titik tengah BC dan G adalah titik berat segitiga ABC. Sebuah garis ℓ melalui G memotong ruas garis AB di P dan ruas garis AC di Q, dimana $P \neq B$ dan $Q \neq C$. Jika [XYZ] menyatakan luas segitiga XYZ, tunjukkan bahwa

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$$

6. Setiap nomor telepon di suatu daerah terdiri dari 8 angka dan diawali dengan angka 8. Pak Edy, yang baru pindah ke daerah itu, mengajukan pemasangan sebuah telepon baru. Berapakah peluang pak Edy mendapatkan nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 5 angka berbeda ?

7. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real sehingga ab, bc, ca bilangan-bilangan rasional. Buktikan bahwa ada bilangan-bilangan bulat x, y, z yang tidak semuanya nol, sehingga $ax + by + cz = 0$.

8. Tentukan bilangan bulat 85-angka terbesar yang memenuhi sifat ; jumlah semua angkanya sama dengan hasilkali semua angkanya.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2006

SEMARANG (JAWA TENGAH), 4 – 9 SEPTEMBER 2006

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. $x^3 - y^3 = 4(x - y)$, maka $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 4(x - y)$ .... (1)
   $x^3 + y^3 = 2(x + y)$, maka $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2(x + y)$ .... (2)
   - Jika x = y
     Subtitusikan ke persamaan (2).
     $(2x)(x^2) = 4x$, maka $x(x^2 - 2) = 0$ sehingga x = 0 atau x = $\pm\sqrt{2}$
     Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0,0), $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
   - Jika x = –y
     Subtitusikan ke persamaan (1).
     $(2x)(x^2) = 8x$, maka $x(x^2 - 4) = 0$
     x = 0 , x = 2 atau x = –2
     Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0,0), (2, –2), (–2, 2)
   - Jika $x \neq y$ dan $x \neq -y$
     $x^2 + xy + y^2 = 4$ .... (3)
     $x^2 - xy + y^2 = 2$ .... (4)
     Kurangkan (3) dengan (4), maka xy = 1 dan $x^2 + y^2 = 3$
     $(x + y)^2 - 2xy = 3$, maka $(x + y)^2 = 5$
     * Jika x + y = $\sqrt{5}$
       $$x\left(\sqrt{5} - x\right) = 1$$
       $$x^2 - x\sqrt{5} + 1 = 0$$
       $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
       $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$
     * Jika x + y = $-\sqrt{5}$
       $$x\left(-\sqrt{5} - x\right) = 1$$
       $$x^2 + x\sqrt{5} + 1 = 0$$
       $x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$
       $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

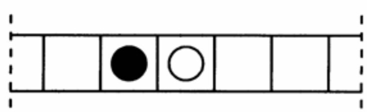
   Setelah dicek ke persamaan semula, semua pasangan (x, y) tersebut memenuhi.

   $\therefore$ **Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0,0), $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, (2, –2), (–2, 2), $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$**

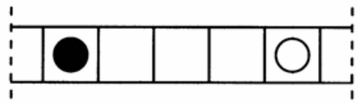
2. Akan dibuktikan bahwa $30 \mid n^5 - n$ untuk n bilangan asli.
   $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5)$
   $n^5 - n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1)$
   Karena n−2, n−1, n, n+1, n+2 adalah 5 bil. bulat berurutan maka $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ habis dibagi 5! = 120 sehingga $30 \mid (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$
   n − 1, n dan n + 1 adalah 3 bilangan bulat berurutan maka 3! = 6 membagi $(n - 1)n(n + 1)$.
   Akibatnya $30 \mid 5(n - 1)n(n + 1)$
   Maka $30 \mid n^5 - n$ untuk n bilangan asli
   $30 \mid a^5 - a + b^5 - b + c^5 - c$ untuk a, b, c bilangan asli, maka$30 \mid a^5 + b^5 + c^5 - (a + b + c)$
   $\therefore$ **Karena $30 \mid (a + b + c)$ maka $30 \mid (a^5 + b^5 + c^5)$ (terbukti)**

3. Pada segitiga ABC berlaku $A + B = 180^o - C$
   $\tan (A + B) = \tan (180^o - C)$
   $$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C$$
   $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$
   Misalkan tan A = x, tan B = y dan tan C = z untuk x, y, z $\in$ Bilangan Asli
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x \le y \le z$
   $x + y + z = xyz$, maka $3z \ge xyz$ sehingga $xy \le 3$
   Nilai (x, y) yang memenuhi adalah (1, 1), (1, 2) dan (1, 3)
   Jika x = 1 dan y = 1 maka 1 + 1 + z = z sehingga 2 + z = z (tidak ada z yang memenuhi)
   Jika x = 1 dan y = 2 maka 1 + 2 + z = 2z sehingga z = 3 (memenuhi)
   Jika x = 1 dan y = 3 maka 1 + 3 + z = 3z sehingga z = 2 (tidak memenuhi bahwa $z \ge y$)
   Maka tripel bilangan asli (tan A, tan B, tan C) yang memenuhi adalah (1, 2, 3) dan permutasinya.
   Akibatnya nilai (A, B, C) yang memenuhi hanya ada satu kemungkinan.
   $\therefore$ **Karena hanya ada satu tripel (A, B, C) yang memenuhi maka semua segitiga anggota S sebangun (terbukti)**

4. Misalkan kejadian (a) adalah kejadian dengan posisi sebagai berikut :

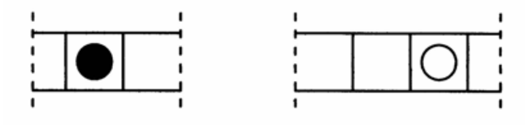


   Pemain yang melangkah terlebih dahulu setelah kejadian (a) terjadi akan kalah sebab pemain pertama tersebut hanya bisa melangkah mundur. Jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan melangkah maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama mundur satu langkah maka pemain kedua akan melangkah maju satu langkah sehingga kejadian (a) akan selalu terjaga sampai suatu saat pemain pertama tersebut tidak dapat melangkah lagi.
   Misalkan kejadian (b) adalah kejadian dengan jarak antara dua bidak sama dengan 3 petak sebagaimana posisi sebagai berikut :



   Jika pemain pertama setelah posisi (b) terjadi, melangkah mundur satu langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sedangkan jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sehingga posisi (b) akan terjaga sampai pemain pertama maju atau ia tidak dapat lagi mundur sehingga harus maju. Jika pemain pertama maju satu langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama maju dua langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sehingga posisi akan menjadi posisi (a) sehingga sesuai dengan penjelasan sebelumnya maka pemain pertama akan kalah.

Misalkan kejadian (c) adalah kejadian dengan banyaknya petak di antara dua bidak sama dengan 3k petak dengan k bilangan asli :

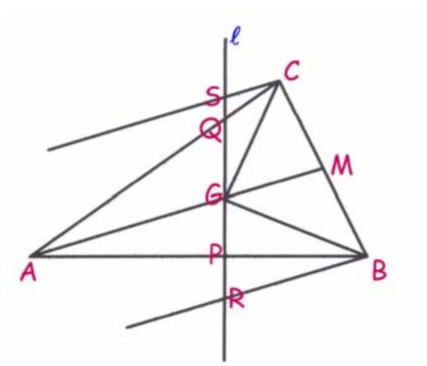


Jika pemain pertama setelah posisi (c) terjadi melangkah mundur satu langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sedangkan jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sehingga posisi (c) akan terjaga sampai pemain pertama maju atau ia tidak dapat lagi mundur sehingga harus maju. Jika pemain pertama maju satu langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama maju dua langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sehingga banyaknya petak diantara kedua bidak kedua pemain akan menjadi $3(k - 1)$ petak. Demikian seterusnya sehingga nilai k akan semakin kecil sampai suatu saat nilai k akan menjadi 1 dan sebagaimana penjelasan pada posisi (b) pemain pertama akan kalah.

Jika banyaknya petak di antara kedua bidak tidak habis dibagi 3 maka pemain pertama akan memenangkan permainan sebab ia punya kesempatan untuk membuat banyaknya petak di antara kedua bidak akan habis dibagi 3.

$\therefore$ **Maka dapat disimpulkan bahwa :**
Jika n dibagi 3 bersisa 2 maka pemain kedua (Siti) akan memenangkan permainan sedangkan jika n dibagi 3 bersisa 0 atau 1 maka pemain pertama (Wiwit) akan memenangkan permainan.

5.



Karena G adalah titik berat dan AM adalah garis berat maka AG : GM = 2 : 1.

ΔBGM dan ΔBAG adalah dua segitiga dengan alas yang sama sehingga perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan tinggi. Karena AG : GM = 2 : 1 maka [BAG] = 2[BGM].

Dengan cara yang sama maka [CMG] = 2[CGA].

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{1}{2}\left(\frac{[BAG]}{[PAG]} + \frac{[CGA]}{[QGA]}\right)$$

Segitiga BAG dan segitiga PAG adalah dua segitiga dengan tinggi yang sama maka perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas. [BAG] : [PAG] = AB : AP.

Dengan cara yang sama maka [CGA] : [QGA] = AC : AQ

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{1}{2}\left(\frac{[BAG]}{[PAG]}+\frac{[CGA]}{[QGA]}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}\right)$$

Alternatif 1 :

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{1}{2}\left(\frac{AP+BP}{AP}+\frac{AQ+CQ}{AQ}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}\right)$$

Buat garis melalui B dan C masing-masing sejajar AM. Misalkan garis yang melalui B memotong garis di R dan garis yang melalui C memotong garis ℓ di S. (Lihat gambar).

Karena AG sejajar BR maka ΔAGP sebangun dengan ΔBRP sehingga $\frac{BP}{AP}=\frac{BR}{AG}$

Karena AG sejajar CS maka ΔAGQ sebangun dengan ΔCSQ sehingga $\frac{CQ}{AQ}=\frac{CS}{AG}$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{BR}{AG}+\frac{CS}{AG}\right)$$

Mengingat bahwa BR + CS = 2 · GM maka :

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{BR+CS}{AG}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{2GM}{AG}\right)$$

Mengingat bahwa AG : GM = 2 : 1 maka :

$\therefore\ \frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{3}{2}$ **(terbukti)**

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(b, 0), C(a, c) sehingga G$\left(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3}\right)$.

Titik M adalah pertengahan BC sehingga M$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$.

Garis AC melalui (0, 0) dan gradien $\frac{c}{a}$ sehingga persamaan garis AC, $y=\frac{c}{a}x$.

Misalkan persamaan garis ℓ adalah y = mx + k. Garis ℓ melalui titik G maka :

$\frac{c}{3}=m\left(\frac{a+b}{3}\right)+k$, maka $k=\frac{c-ma-mb}{3}$. Persamaan garis ℓ adalah $y=mx+\frac{c-ma-mb}{3}$

Garis ℓ memotong AB di titik P maka $x_p=\frac{ma-mb-c}{3m}$ sehingga P$\left(\frac{ma-mb-c}{3m},0\right)$.

Garis ℓ memotong AC di Q, maka $\frac{c}{a}x_Q=mx_Q+\frac{c-ma-mb}{3}$

$x_Q=\frac{a(c-ma-mb)}{3(c-ma)}$ maka $y_Q=\frac{c(c-ma-mb)}{3(c-ma)}$.

Sehingga Q$\left(\frac{a(c-ma-mb)}{3(c-ma)},\frac{c(c-ma-mb)}{3(c-ma)}\right)$.

$|AB|=b$; $|AP|=\frac{ma+mb-c}{3m}$; $|AC|=\sqrt{a^2+c^2}$; $|AQ|=\frac{(c-ma-mb)}{3(c-ma)}\sqrt{a^2+c^2}$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]}+\frac{[CMG]}{[QGA]}=\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3mb}{ma+mb-c}+\frac{3(c-ma)}{c-ma-mb}\right)$$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{1}{2}\left(\frac{3mb - 3(c - ma)}{ma + mb - c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3(ma + mb - c)}{ma + mb - c}\right)$$

$\therefore \frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$ **(terbukti)**

6. Akan dicari nomor telepon tersebut terdiri dari sedikitnya 6 angka berbeda.
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 6 angka berbeda
     Banyaknya cara memilih 5 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_5$.
     * Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 1 angka muncul 3 kali dan 5 angka lainnya muncul 1 kali
       - Jika angka yang muncul tiga kali adalah angka 8
         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5 \cdot \frac{7!}{2!}$ = 317.520
       - Jika angka yang muncul tiga kali adalah bukan angka 8
         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5 \cdot {}_5C_1 \cdot \frac{7!}{3!}$ = 529.200
     * Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 2 angka masing-masing muncul 2 kali dan 4 angka lainnya muncul 1 kali
       - Jika salah satu angka yang muncul dua kali tersebut adalah angka 8
         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5 \cdot {}_5C_1 \cdot \frac{7!}{2!}$ = 1.587.600
       - Jika kedua angka yang muncul dua kali tersebut keduanya bukan angka 8
         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5 \cdot {}_5C_2 \cdot \frac{7!}{2!2!}$ = 1.587.600
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 7 angka berbeda
     Banyaknya cara memilih 6 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_6$.
     Satu angka akan muncul 2 kali sedangkan 6 angka lain akan muncul satu kali.
     * Jika angka yang muncul dua kali tersebut adalah angka 8
       Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_6 \cdot 7!$ = 423.360
     * Jika angka yang muncul dua kali tersebut adalah bukan angka 8
       Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_6 \cdot {}_6C_1 \cdot \frac{7!}{2!}$ = 1.270.080
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 8 angka berbeda
     Banyaknya cara memilih 7 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_7$.
     Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_7 \cdot 7!$ = 181.440

   Misalkan A adalah kejadian banyaknya nomor telepon dengan sedikitnya 6 angka berbeda.
   A = 317.520 + 529.200 + 1.587.600 + 1.587.600 + 423.360 + 1.270.080 + 181.440 = 5.896.800

   p(A) = $\frac{A}{10^7}$ = 0,58968

   $\therefore$ **Peluang bahwa pak Edy mendapatkan nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 5 angka berbeda = 1 − p(A) = 0,41032**

7. Karena ab, ac dan bc adalah bilangan rasional maka $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$, $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ adalah juga bilangan rasional.

Misalkan $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} = \frac{m}{n}$, $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{p}{q}$ untuk m, n, p, q $\in$ Bil. Bulat dan n, q $\neq$ 0

- Jika a, b, c ketiganya sama dengan 0
  Jelas bahwa berapa pun nilai (x, y, z) bulat akan memenuhi ax + by + cz = 0
- Jika dua di antara a, b, c sama dengan 0
  Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = b = 0 dan c $\neq$ 0
  Nilai z = 0 dan x, y $\neq$ 0 akan memenuhi ax + by + cz = 0
- Jika salah satu a, b atau c sama dengan 0
  Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = 0 dan b, c $\neq$ 0
  Maka untuk x $\neq$ 0, y = z = 0 akan memenuhi ax + by + cz = 0.
- Jika tidak ada a, b dan c bernilai 0

  $$ax + by + cz = c\left(\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + z\right) = c\left(\frac{p}{q}x + \frac{m}{n}y + z\right)$$

  Maka untuk x = kq, y = wn dan z = −(kp + wm) dengan k, w $\in$ Bilangan Bulat akan memenuhi ax + by + cz = 0

$\therefore$ **Terbukti bahwa ada bilangan-bilangan bulat x, y, z yang tidak semuanya nol, sehingga ax + by + cz = 0**

8. Misalkan bilangan 85-angka tersebut adalah n. Misalkan juga S(n) adalah jumlah semua angka-angka n dan P(n) adalah hasilkali semua angka-angka n.
Jika 0 adalah salah satu digit dari n maka P(n) = 0 sehingga S(n) = 0. Akibatnya semua digit dari n harus 0 yang tidak memenuhi n adalah bilangan bulat 85-angka. Maka 0 bukanlah salah satu angka n.
S(n) maksimal = 9 · 85 = 765 jika semua angka n adalah 9.
Karena 2^9 = 512 < 765 dan 2^{10} = 1024 > 765 maka paling banyak 9 angka n bukan 1 dan paling sedikit 76 angka terakhir n harus sama dengan 1. Maka S(n) maksimal = 9 · 9 + 1 · 76 = 157.
Karena 2^7 = 128 < 157 dan 2^8 = 256 > 157 maka paling banyak 7 angka n bukan 1 dan paling sedikit 78 angka terakhir n harus sama dengan 1.
P(n) terkecil saat n = 2222222111········111, maka P(n) = 128 dan S(n) = 92 sehingga P(n) $\neq$ S(n)
Jika 7 angka pertama n tidak semuanya 2 maka P(n) minimal saat n = 3222222111····111 yaitu 192. Karena S(n) maksimal = 9 · 7 + 1 · 78 = 141 < P(n) minimal. Maka tidak ada nilai n yang memenuhi. Akibatnya paling banyak 6 angka n bukan 1.
    Jika paling banyak dua angka dari n bukan 1 maka P(n) maksimal = 9 · 9 · 1 · 1 · ··· · 1 = 81 sedangkan S(n) minimal = 1 · 85 = 85. Maka sedikitnya tiga angka n bukan 1.
Maka banyaknya angka n yang bukan 1 paling sedikit 3 dan paling banyak 6.

- Jika angka pertama n adalah 9
  S(n) minimal = 9 · 1 + 2 · 5 + 1 · 79 = 98 dan S(n) maksimal = 9 · 6 + 1 · 79 = 133
  Karena P(n) habis dibagi 9 maka S(n) juga harus habis dibagi 9. Maka kemungkinan nilai P(n) adalah 99, 108, 117, 126.
  99 = 9 · 11 dan 117 = 9 · 13. Karena 11 dan 13 adalah bilangan prima dua angka maka tidak mungkin P(n) = 99 atau 117.
  Jika P(n) = 126 = 9 · 7 · 2 maka ke-85 angka n adalah 9, 7, 2 dan 1 sebanyak 82 kali.

$S(n) = 9 + 7 + 2 + 82 = 100$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$).
Jika $P(n) = 108 = 9 \cdot 2^2 \cdot 3$ maka kemungkinan angka-angka n adalah :
* Ke-85 angka n adalah 9, 4, 3 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 9 + 4 + 3 + 82 = 98$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)
* Ke-85 angka n adalah 9, 6, 2 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 9 + 6 + 2 + 82 = 99$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)
* Ke-85 angka n adalah 9, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali.
  $S(n) = 9 + 3 + 2 + 2 + 81 = 97$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)

Maka tidak ada nilai n dengan angka pertama adalah 9 yang memenuhi.

- Jika angka pertama n adalah 8
  $S(n)$ minimal $= 8 + 1 \cdot 84 = 92$ dan $S(n)$ maksimal $= 8 \cdot 6 + 1 \cdot 79 = 127$
  Karena $P(n)$ habis dibagi 9 maka $S(n)$ juga harus habis dibagi 8. Maka kemungkinan nilai $P(n)$ adalah 96, 104, 112, 120.
  Jika $P(n) = 120 = 8 \cdot 5 \cdot 3$ maka maka ke-85 angka n adalah 8, 5, 3 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 8 + 5 + 3 + 82 = 98$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$).
  Jika $P(n) = 112 = 8 \cdot 7 \cdot 2$ maka maka ke-85 angka n adalah 8, 7, 2 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 8 + 7 + 2 + 82 = 99$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$).
  Jika $P(n) = 104 = 8 \cdot 13$. Karena 13 adalah bilangan prima dua angka maka tidak ada n yang memenuhi.
  Jika $P(n) = 96 = 8 \cdot 2^2 \cdot 3$ maka kemungkinan angka-angka n adalah :

* Ke-85 angka n adalah 8, 4, 3 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 8 + 4 + 3 + 82 = 97$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)
* Ke-85 angka n adalah 8, 6, 2 dan 1 sebanyak 82 kali. $S(n) = 8 + 6 + 2 + 82 = 98$ (tidak memenuhi $P(n) = S(n)$)
* Ke-85 angka n adalah 8, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali.
  $S(n) = 8 + 3 + 2 + 2 + 81 = 96$ (memenuhi)

Karena angka-angka n adalah 8, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali maka n terbesar yang memenuhi adalah 83221111⋯111.

∴ Dapat disimpulkan bahwa nilai n terbesar yang memenuhi adalah **8322111⋯⋯111**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2008

Bidang Matematika

Waktu : 3,5 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2007

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan bilangan real x, maka $\left\lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \right\rfloor^2$ =
   A. –1 B. 0 C. 1 D. 9 E. 81

2. Bilangan $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ merupakan bilangan
   A. bulat negatif B. bulat positif C. pecahan
   D. irrasional positif E. irrasional negatif

3. Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini bertambah tepat 40% dibandingkan dengan yang dikerjakannya kemarin.Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini paling sedikit ada
   A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. tidak bisa ditentukan

4. Misalkan H adalah himpunan semua faktor positif dari 2007.Banyaknya himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah
   A. 6 B. 31 C. 32 D. 63 E. 64

5. Misalkan N sebuah bilangan asli dua-angka dan M adalah bilangan asli yang diperoleh dengan mempertukarkan kedua angka N.Bilangan prima yang selalu habis membagi N – M adalah
   A. 2 B. 3 C. 7 D. 9 E. 11

6. Sebuah sampel diperoleh dari lima pengamatan. Jika rataan hitung(mean) sampel sama dengan 10 dan median sampel sama dengan 12, maka nilai terkecil jangkauan sampel sama dengan
   A. 2 B. 3 C. 5 D. 7 E. 10

7. Peluang menemukan di antara tiga orang ada paling sedikit dua orang yang lahir dalam bulan yang sama adalah
   A. $\frac{17}{72}$ B. $\frac{33}{72}$ C. $\frac{39}{72}$ D. $\frac{48}{72}$ E. $\frac{55}{72}$

8. Keliling sebuah segitiga adalah 8. Jika panjang sisi-sisinya adalah bilangan bulat,maka luas segitiga tersebut sama dengan
   A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4 E. $4\sqrt{2}$

9. Sepotong kawat dipotong menjadi 2 bagian,dengan perbandingan panjang 3:2. Masing-masing bagian kemudian dibentuk menjadi sebuah persegi. Perbandingan luas kedua persegi adalah
A. 4 : 3 B. 3 : 2 C. 5 : 3 D. 9 : 4 E. 5 : 2

10. Untuk setiap bilangan real x berlaku $\dfrac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x} =$
A. sec x + sin x B. sec x – sin x C. cos x + csc x
D. cos x – csc x E. cos x + sin x

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Misalkan f(x) = 2x - 1, dan g(x) = $\sqrt{x}$. Jika f(g(x)) = 3, maka x = ·····

12. Pengepakan buah “Drosophila” akan mengemas 44 apel ke dalam beberapa kotak. Ada dua jenis kotak yang tersedia, yaitu kotak untuk 10 apel dan kotak untuk 6 apel. Banyak kotak yang diperlukan adalah ······

13. Semua pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi x + y = xy – 1 dan x $\le$ y, adalah ····

14. Jika n adalah bilangan asli sehingga 3^n adalah faktor dari 33!, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah ····

15. Sebuah ruas garis mulai dari titik $\left(3, 2\frac{1}{5}\right)$ dan berakhir di $\left(99, 68\frac{3}{5}\right)$. Banyaknya titik dengan koordinat bilangan bulat yang dilalui garis tersebut adalah ······

16. Pada segitiga PQR samasisi diberikan titik-titik S dan T yang terletak berturut-turut pada sisi QR dan PR demikian rupa,sehingga $\angle$SPR = 40° dan $\angle$TQR = 35°. Jika titik X adalah perpotongan garis-garis PS dan QT,maka $\angle$SXT = ·········

17. Pada segitiga ABC yang siku-siku di C, AE dan BF adalah garis-garis berat (median). Maka $\dfrac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2}$ = ······

18. Diketahui empat titik pada bidang dengan koordinat A(1,0), B(2008,2007), C(2007,2007), D(0,0). Luas jajaran genjang ABCD sama dengan ······

19. Sebuah lingkaran berjari-jari 1. Luas maksimal segitiga samasisi yang dapat dimuat di dalam lingkaran adalah ······

20. Sebuah daerah persegi dibagi menjadi 2007 daerah kecil dengan menarik garis-garis lurus yang menghubungkan dua sisi berbeda pada persegi. Banyak garis lurus yang harus ditarik paling sedikit ada ·····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)
$\sqrt{3} \approx 1{,}7 \quad ; \quad \sqrt{5} \approx 2{,}2$
$\sqrt{3} - \sqrt{5} \approx -0{,}5$ sehingga $\lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor = -1$. Maka $\lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor^2 = 1$
$\therefore \ \lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor^2 =$ **1**

2. (Jawaban : B)
Misalkan $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = X$
$X^3 = \left(\sqrt{5}+2\right) - \left(\sqrt{5}-2\right) - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)$
$X^3 = 4 - 3\left(\sqrt[3]{5-4}\right)(X)$
$X^3 + 3X - 4 = 0$
$(X - 1)(X^2 + X + 4) = 0$
Akar-akar persamaan $X^2 + X + 4 = 0$ tidak real. Maka X = 1
$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$
$\therefore \ \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ merupakan bilangan **bulat positif**.

3. (Jawaban : C)
Misalkan banyaknya soal yang dikerjakan Amin kemarin y maka banyaknya soal yang dikerjakan hari ini adalah n = $\frac{7}{5}$ y dengan y dan n keduanya asli.
$\frac{n}{y} = \frac{7}{5}$
Maka y = 5k dan n = 7k untuk suatu bilangan asli k.
Nilai n terkecil adalah saat k = 1 sehingga n = 7
$\therefore$ Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini paling sedikit ada **7.**

4. (Jawaban : D)
$2007 = 3^2 \cdot 223^1$
Banyaknya faktor positif dari 2007 adalah (2 + 1)(1 + 1) = 6
Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah $2^6 - 1 = 63$.
$\therefore$ Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah $2^6 - 1 =$ **63.**

5. (Jawaban : B)
Misalkan N = 10a + b maka M = 10b + a
N − M = 9(a − b) sehingga $9 \mid (N - M)$
$\therefore$ Maka bilangan prima yang selalu membagi N − M adalah **3.**

6. (Jawaban : C)
   Misalkan bilangan tersebut adalah $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$.
   Maka $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ dan $x_3 = 12$.
   Agar jangkauan minimal maka x_5 harus sekecil mungkin dan x_1 harus sebesar mungkin.
   Jelas bahwa $x_1 < 10$ dan $x_5 \geq 12$.
   Jika $x_1 = x_2 = 9$ maka $x_4 + x_5 = 20$. Tidak mungkin $x_5 \geq x_4 \geq 12$.
   Jika $x_5 = x_4 = 12$ maka $x_1 + x_2 = 36$. Nilai terbesar x_1 adalah saat $x_1 = x_2 = 7$.
   Kelima bilangan tersebut adalah 7, 7, 12, 12, 12.
   $\therefore$ Jangkauan = 12 − 7 = **5.**

7. (Jawaban : A)
   Alternatif 1 :
   Misalkan A adalah kejadian sedikitnya 2 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama. Maka A' adalah kejadian 3 orang lahir pada bulan yang berbeda.
   Banyaknya kemungkinan tripel 3 orang lahir adalah 12x12x12 kemungkinan.
   Banyaknya 3 orang lahir pada bulan yang berbeda adalah 12x11x10
   $$p(A') = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{55}{72}$$
   Maka $p(A) = 1 - \frac{55}{72} = \frac{17}{72}$
   Alternatif 2 :
   Banyaknya kemungkinan tripel 3 orang lahir adalah 12x12x12 kemungkinan.
   Banyaknya kemungkinan tepat 2 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama = ${}_3C_2$ x 12x1x11 = 3x12x1x11
   Banyaknya kemungkinan tepat 3 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama = ${}_3C_3$ x 12x1x1 = 1x12x1x1
   Peluang paling sedikit dua orang lahir dalam bulan yang sama = $\frac{3x\,12x\,1x\,11 + 1x\,12x\,1x\,1}{12x\,12x\,12} = \frac{17}{72}$
   $\therefore$ Peluang di antara tiga orang ada paling sedikit dua orang lahir dalam bulan yang sama = $\frac{17}{72}$

8. (Jawaban : A)
   a + b + c = 8 dengan a, b, dan c semuanya bilangan asli.
   Syarat : panjang salah satu sisi selalu kurang dari jumlah kedua sisi yang lain, Dengan memperhatikan syarat tersebut maka panjang sisi-sisi segitiga yang memenuhi adalah 2, 3, 3.
   s = ½ (a + b + c) = 4
   Dengan rumus Heron, Luas Δ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ = 2√2
   $\therefore$ Luas Δ = **2√2**

9. (Jawaban : D)
   Misalkan panjang kawat semula 20a maka kawat akan terbagi dua dengan panjang 12a dan 8a.
   Panjang sisi persegi pertama = 3a dan panjang sisi persegi kedua = 2a.
   Perbandingan luas = $3^2 : 2^2 = 9 : 4$.
   $\therefore$ Perbandingan luas kedua persegi adalah **9 : 4**.

10. (Jawaban : B)

$$\frac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x} = \frac{\sec^2 x - 1 + 1 - \sin^2 x}{\sin x + \sec x} = \frac{\sec^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \sec x} = \sec x - \sin x$$

$\therefore \quad \dfrac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x} = \sec x - \sin x$

BAGIAN KEDUA

11. $f\left(\sqrt{x}\right) = 3$

$2\sqrt{x} - 1 = 3$

$\therefore$ x = **4**

12. Misalkan banyaknya keranjang berisi 10 apel = x dan keranjang berisi 6 apel = y dengan x dan y keduanya bulat tak negatif.
Maka 10x + 6y = 44 sehingga 5x + 3y = 22
5x $\leq$ 22
Nilai x yang mungkin adalah 0, 1, 2, 3 atau 4.
Setelah dicek satu-satu, nilai x yang memenuhi hanya x = 2 yang membuat y = 4
Maka x + y = 6
$\therefore$ Banyak kotak yang diperlukan adalah **6**

13. xy – x – y – 1 = 0 sehingga (x – 1)(y – 1) = 2
Maka (x – 1) $|$ 2. Nilai x – 1 yang mungkin adalah –1, 1, –2, 2
Untuk x – 1 = –1 maka x = 0 dan y = –1
Untuk x – 1 = 1 maka x = 2 dan y = 3
Untuk x – 1 = –2 maka x = –1 dan y = 0
Untuk x – 1 = 2 maka x = 3 dan y = 2
Setelah dicek satu-satu pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan dan berlaku x $\leq$ y adalah (–1, 0) dan (2, 3)
$\therefore$ Semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi adalah **(–1, 0), (2, 3)**

14. Alternatif 1 :

n terbesar = $\left\lfloor \frac{33}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{33}{3^4} \right\rfloor + \cdots$

n terbesar = 11 + 3 + 1 + 0 + 0 + ···
n terbesar = 15

Alternatif 2 :

Bilangan dari 1 sampai dengan 33 yang memiliki faktor 3 ada 11 yaitu 3, 6, 9, 12, 15, 18, ···, 33
Di antara 11 bilangan tersebut yang habis dibagi 3^3 = 27 ada 1 yaitu 27.

Di antara 11 bilangan tersebut yang habis dibagi 3^2 = 9 tetapi tidak habis dibagi 3^3 = 27 ada 2 yaitu 9, 18.
Sisanya adalah 8 bilangan yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 9 maupun 27.
Maka nilai n terbesar yang membagi 33! = 3x1 + 2x2 + 1x8 = 15.
$\therefore$ Nilai n terbesar yang mungkin adalah **15**.

15. Persamaan garis yang melalui $\left(3,2\frac{1}{5}\right)$ dan $\left(99,68\frac{3}{5}\right)$ adalah 120y = 83x + 15.
15(8y − 1) = 83x
Karena 15 tidak membagi 83 maka 15 membagi x.
Nilai x yang mungkin adalah 15, 30, 45, 60, 75 atau 90.
Setelah dicek satu-satu maka nilai x bulat yang memenuhi y juga bulat hanyalah x = 75 yang membuat y = 52
$\therefore$ Banyaknya titik dengan koordinat bilangan bulat yang dilalui garis tersebut adalah **1.**

16. Pada ΔQRT berlaku $\angle$RTQ = $180^o - 60^o - 35^o = 85^o$
Pada ΔPRS berlaku $\angle$PSR = $180^o - 60^o - 40^o = 80^o$
Pada segiempat RSXT berlaku $360^o = 60^o$ + $\angle$RTQ + $\angle$PSR + $\angle$SXT
$\angle$SXT = 135^o.
$\therefore$ $\angle$SXT = **135^o.**

17. Misalkan AC = b dan BC = a maka $AB^2 = a^2 + b^2$
$AE^2 = (0,5a)^2 + b^2$ dan $BF^2 = a^2 + (0,5b)^2$
$AE^2 + BF^2 = 1,25(a^2 + b^2)$
$\therefore \quad \frac{AE^2 + BF^2}{AB^2} = \frac{5}{4}$

18. Diketahui A = (1, 0), B(2008, 2007), C(2007, 2007) dan D(0, 0)
Alternatif 1 :
Misalkan E(0, 2007) dan F(2008, 0)
Luas jajaran genjang = Luas persegi panjang DFBE − Luas ΔDCE − Luas ΔAFB.
Luas jajaran genjang = 2008 · 2007 − ½ · 2007 · 2007 − ½ · 2007 · 2007 = 2007
Alternatif 2 :
Panjang alas = $|DA|$ = 1
Tinggi = 2007 − 0 = 2007
Luas jajaran ganjang = alas x tinggi
Luas jajaran genjang = 2007
$\therefore$ Luas jajaran genjang = **2007**

19. Misalkan segitiga tersebut adalah ΔABC. Agar luas segitiga maksimum maka ketiga titik sudut segitiga sama sisi tersebut harus terletak pada lingkaran.

$R = \frac{abc}{4[ABC]}$ dengan [ABC] menyatakan luas segitiga ABC.

Karena ΔABC sama sisi maka abc = a^3

$1 = \frac{a^3}{2a^2 \sin 60^\circ}$

$a = \sqrt{3}$

Luas ΔABC = ½ a^2 sin 60^o

∴ Luas ΔABC = $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

20. Misalkan r_n adalah banyaknya region maksimal yang terjadi akibat terdapat n buah garis lurus. Banyaknya region akan maksimal apabila tidak ada sedikitnya dua garis sejajar dan tidak ada sedikitnya tiga garis yang bertemu di satu titik.

Jelas bahwa $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 7$, $r_4 = 11$ dan seterusnya.

Ini dirumuskan dengan $r_n = r_{n-1} + n$

$r_2 - r_1 = 2$

$r_3 - r_2 = 3$

$r_4 - r_3 = 4$

⋮

$r_n - r_4 = n$

Jumlahkan semua persamaan didapat :

$r_n - r_1 = \frac{n-1}{2}(2+n)$

Karena $r_1 = 2$ maka $r_n = \frac{n^2+n+2}{2}$

Jika n = 62 maka $r_n = 1954 < 2007$

Jika n = 63 maka $r_n = 2017 > 2007$

Maka banyaknya garis minimal adalah 63.

∴ Banyaknya garis lurus yang harus ditarik paling sedikit ada **63.**

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2007

BAGIAN PERTAMA

1. Bilangan ganjil 4-angka terbesar yang hasil penjumlahan semua angkanya bilangan prima adalah

2. Sejumlah uang terdiri dari koin pecahan Rp. 500, Rp. 200, dan Rp. 100 dengan nilai total Rp. 100.000. Jika nilai uang pecahan 500-an setengah dari nilai uang pecahan 200-an, tetapi tiga kali nilai uang pecahan 100-an, maka banyaknya koin adalah ⋯⋯

3. Panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku sama dengan dua kali panjang sisi terpendeknya, sedangkan panjang sisi ketiga 1 satuan panjang lebih panjang dari panjang sisi terpendeknya. Luas segitiga itu adalah ⋯⋯⋯⋯ satuan luas.

4. Di antara bilangan-bilangan 2006, 2007 dan 2008, bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah ⋯⋯⋯

5. Seorang pedagang mobil bekas menjual dua buah mobil dengan harga sama. Ia merugi 10% untuk mobil pertama, tetapi impas (kembali modal) untuk kedua mobil. Persentase keuntungan pedagang itu untuk mobil kedua adalah ⋯⋯

6. Dona menyusun lima buah persegi yang kongruen menjadi sebuah bangun datar. Tidak ada persegi yang menindih persegi lainnya. Jika luas bangun yang diperoleh Dona adalah 245 cm^2, keliling bangun tersebut paling sedikit adalah ⋯⋯ cm.

7. Empat tim sepakbola mengikuti sebuah turnamen. Setiap tim bertanding melawan masing-masing tim lainnya sekali. Setiap kali bertanding, sebuah tim memperoleh nilai 3 jika menang, 0 jika kalah dan 1 jika pertandingan berakhir seri. Di akhir turnamen salah satu tim memperoleh nilai total 4. Jumlah nilai total ketiga tim lainnya paling sedikit adalah ⋯⋯

8. Untuk bilangan asli n, didefinisikan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Dalam bentuk sederhana, $1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n =$ ⋯⋯⋯

9. Titik P terletak di kuadran I pada garis y = x. Titik Q terletak pada garis y = 2x demikian sehingga PQ tegak lurus terhadap garis y = x dan PQ = 2. Maka koordinat Q adalah ⋯⋯

10. Himpunan semua bilangan asli n sehingga 6n + 30 adalah kelipatan 2n + 1 adalah ⋯⋯

11. Suku konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah ⋯⋯⋯

12. Absis titik potong garis ℓ dengan sumbu-x dan ordinat titik potong ℓ dengan sumbu-y adalah bilangan-bilangan prima. Jika ℓ juga melalui titik (3, 4), persamaan ℓ adalah ⋯⋯

13. Tujuh belas permen dikemas ke dalam kantong-kantong sehingga banyak permen dalam setiap dua kantong berselisih paling banyak 1. Banyaknya cara mengemas permen tersebut ke dalam paling sedikit dua kantong adalah ····

14. Jika nilai maksimum x + y pada himpunan $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6, 3x + y \leq a\}$ adalah 4, haruslah a = ·····

15. Sebuah kubus berukuran 5 x 5 x 5 disusun dari 125 kubus satuan. Permukaan kubus besar lalu dicat. Rasio sisi (permukaan) ke-125 kubus satuan yang dicat terhadap yang tidak dicat adalah ···

16. Sebuah papan persegi dibagi ke dalam 4 x 4 petak dan diwarnai seperti papan catur. Setiap petak diberi nomor dari 1 hingga 16. Andi ingin menutup petak-petak pada papan dengan 7 kartu seukuran 2 x 1 petak. Agar ke-7 kartunya dapat menutupi papan, ia harus membuang dua petak. Banyak cara ia membuang dua petak adalah ····

17. Bilangan-bilangan asli 1, 2, ···, n dituliskan di papan tulis, kemudian salah satu bilangan dihapus. Rata-rata aritmatika bilangan yang tertinggal adalah $35\frac{7}{17}$. Bilangan n yang memungkinkan ini terjadi adalah ·····

18. Diberikan segitiga ABC siku-siku di A, titik D pada AC dan titik F pada BC. Jika AF ⊥ BC dan BD = DC = FC = 1, maka AC = ····

19. Di antara semua solusi bilangan asli (x, y) persamaan $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54$, solusi dengan x terbesar adalah (x, y) = ······

20. Misalkan V adalah himpunan titik-titik pada bidang dengan koordinat bilangan bulat dan X adalah himpunan titik tengah dari semua pasangan titik pada himpunan V. Untuk memastikan bahwa ada angota X yang juga memiliki koordinat bilangan bulat, banyak anggota V paling sedikit harus ·····

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE MATEMATIKA
TINGKAT PROVINSI TAHUN 2007

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan ABCD sebuah segiempat dengan AB = BC = CD = DA.
   (a) Buktikan bahwa titik A harus berada di luar segitiga BCD.
   (b) Buktikan bahwa setiap pasangan sisi berhadapan pada ABCD selalu sejajar.

2. Misalkan a dan b dua bilangan asli, yang satu bukan kelipatan yang lainnya. Misalkan pula KPK(a,b) adalah bilangan 2-angka, sedangkan FPB(a,b) dapat diperoleh dengan membalik urutan angka pada KPK(a,b). Tentukan b terbesar yang mungkin.
   [KPK : Kelipatan Persekutuan terKecil; FPB : Faktor (pembagi) Persekutuan terBesar]

3. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

4. Pada segitiga lancip ABC, AD, BE dan CF adalah garis-garis tinggi, dengan D, E, F berturut-turut pada sisi BC, CA, dan AB. Buktikan bahwa

$$DE + DF \leq BC$$

5. Bilangan-bilangan 1, 2, 3, ⋯, 15, 16 disusun pada persegi 4 x 4. Untuk i = 1, 2, 3, 4, misalkan b_i adalah jumlah bilangan-bilangan pada baris ke-i dan k_i adalah jumlah bilangan-bilangan pada kolom ke-i. Misalkan pula d_1 dan d_2 adalah jumlah bilangan-bilangan pada kedua diagonal. Susunan tersebut dapat disebut *antimagic* jika b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2 dapat disusun menjadi sepuluh bilangan berurutan. Tentukan bilangan terbesar di antara sepuluh bilangan berurutan ini dapat diperoleh dari sebuah *antimagic*.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. Penjumlahan semua angkanya maksimal = 36. Tetapi 36, 35, 34, 33 dan 32 bukan bilangan prima. Maka penjumlahan maksimal semua angkanya = 31.
   Dua angka pertama harus sebesar mungkin, yaitu 99. Jika angka ke-3 juga 9 maka angka ke-4 harus 4, tetapi 9994 bukanlah bilangan ganjil. Maka angka ketiga haruslah 8 dengan angka keempat adalah 5 yang merupakan bilangan ganjil.
   ∴ Bilangan ganjil 4-angka yang memenuhi adalah **9985.**

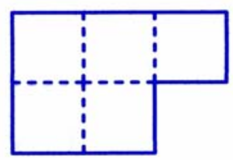
2. Misalkan nilai uang pecahan 100-an = x
   Maka nilai uang pecahan 500-an = 3x dan nilai uang pecahan 200-an = 6x
   Karena (x) + (3x) + (6x) = 100.000 maka x = 10.000
   Banyaknya koin 100-an = 10000 : 100 = 100
   Banyaknya koin 200-an = (6 · 10000) : 200 = 300
   Banyaknya koin 500-an = (3 · 10000) : 500 = 60
   ∴ Banyaknya koin = 100 + 300 + 60 = **460.**

3. Misalkan panjang sisi miring segitiga tersebut = r, sisi terpendek = x dan sisi lainnya = y
   Diketahui bahwa r = 2x dan y = x + 1
   $x^2 + y^2 = r^2$ maka $x^2 + (x + 1)^2 = (2x)^2$
   $2x^2 - 2x - 1 = 0$ maka $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$
   Ambil nilai x yang positif maka $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ sehingga $y = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$
   Luas segitiga = ½ · x · y
   ∴ Luas segitiga = $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{4}$

4. $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$; $2007 = 3^2 \cdot 223$; $2008 = 2^3 \cdot 251$
   Banyaknya fakor prima dari 2006 = 3
   Banyaknya fakor prima dari 2007= 2
   Banyaknya fakor prima dari 2008= 2
   ∴ Maka bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah **2006.**

5. Misalkan ia menjual mobil masing-masing seharga y. Misalkan juga modal mobil pertama adalah x. Maka agar impas modal mobil kedua haruslah 2y − x.
   $\frac{x - y}{x} = \frac{1}{10}$ sehingga 10y = 9x
   Keuntungan mobil kedua = $\frac{y - (2y - x)}{2y - x} = \frac{x - y}{2y - x} = \frac{10x - 9x}{18x - 10x} = \frac{1}{8}$
   ∴ Persentase keuntungan pedagang untuk mobil kedua = **12,5 %**

6. Karena tidak ada yang tumpang tindih maka luas persegi = 245 : 5 = 49 cm^2.
Panjang sisi persegi = 7.
Agar kelilingnya kecil maka harus semakin banyak sisi-sisi persegi yang menempel dengan sisi-sisi yang lain.



$\therefore$ Keliling persegi = 10 x panjang sisi persegi = **70 cm**

7. Apabila pertandingan dua tim berakhir seri maka total nilai yang didapat kedua tim adalah 2 sedangkan apabila pertandingan dua buah tim berakhir dengan kemenangan salah satu tim maka total nilai kedua tim sama dengan 3.
Total pertandingan = ${}_4C_2$ = 6.
Nilai 4 hanya didapat jika tim tersebut menang satu kali, seri satu kali dan kalah satu kali.
Agar jumlah nilai ketiga tim lainnya paling sedikit maka haruslah tiga pertandingan lainnya berakhir seri.
Maka dari 6 pertandingan terdapat 4 pertandingan yang berakhir seri.
Nilai total keempat tim = 2 · 4 + 3 · 2 = 14
Maka total nilai ketiga tim lainnya = 14 − 4 = 10.
$\therefore$ Maka total nilai ketiga tim lainnya paling sedikit = 14 − 4 = **10**.

8. 1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = 1!(2 − 1) + 2!(3 − 1) + 3!(4 − 1) + ··· + n!((n + 1) − 1)
1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = (2! − 1!) + (3! − 2!) + (4! − 3!) + ··· + (n + 1)! − n!
1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = (n + 1)! − 1!
$\therefore$ 1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = **(n + 1)! − 1**

9. Misalkan koordinat $Q(x_Q, y_Q)$ dan $P(x_P, y_P)$
Alternatif 1 :
Karena P di kuadran I maka Q pun akan di kuadran I. Karena $y_Q = 2x_Q$ maka $y_Q \geq x_Q$
Jarak Q ke garis y = x adalah PQ = 2.
Jarak $Q(x_Q, y_Q)$ ke garis Ax + By + C = 0 dirumuskan dengan :
$$d = \left|\frac{Ax_Q + By_Q + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$
Maka :
$$d = \left|\frac{y_Q - x_Q}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = 2$$. Maka $y_Q - x_Q = 2\sqrt{2}$ .... (1)
Karena garis y = 2x melalui Q maka $y_Q = 2x_Q$ ······ (2)
Dari persamaan (1) dan (2) didapat $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

Alternatif 2 :

Gradien garis y = x adalah m = 1. Maka gradien garis yang melalui PQ adalah $m_{PQ} = -1$

$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -1$. Maka $2x_Q - x_P = x_P - x_Q$ sehingga $3x_Q = 2x_P$ .... (3)

$\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = 2$ sehingga $(x_Q^2 - 2x_Qx_P + x_P^2) + (4x_Q^2 - 4x_Qx_P + x_P^2) = 4$

$5x_Q^2 - 6x_Qx_P + 2x_P^2 = 4$ .... (4)

Subtitusikan persamaan $3x_Q = 2x_P$ ke persamaan (4)

$10x_Q^2 - 18x_Q^2 + 9x_Q^2 = 8$

Karena Q di kuadran I maka $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

∴ Koordinat Q adalah $\left(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$**.**

10. 6n + 30 = k(2n + 1) untuk suatu k dan n bilangan asli.
    $(k - 3)(2n + 1) = 27 = 3^3$
    Nilai 2n + 1 yang memenuhi hanya jika 2n + 1 = 3, 9 atau 27
    Jika 2n + 1 = 3 maka k – 3 = 9 sehingga n = 1 dan k = 12
    Jika 2n + 1 = 9 maka k – 3 = 3 sehingga n = 4 dan k = 6
    Jika 2n + 1 = 27 maka k – 3 = 1 sehingga n = 13 dan k = 4
    ∴ Nilai n asli yang memenuhi 6n + 30 adalah kelipatan 2n + 1 adalah **n = 1, 4, 13.**

11. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 = {}_9C_0(2x^2)^9(-\frac{1}{x})^0 + \cdots + {}_9C_k(2x^2)^k(-\frac{1}{x})^{9-k} + \cdots$
    Untuk mencari suku konstanta maka harus dipenuhi $x^{2k} \cdot x^{k-9} = x^0$ sehingga k = 3
    ${}_9C_3(2x^2)^3(x)^{3-9} = 672$
    ∴ Maka konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah **672**.

12. Misalkan persamaan garis ℓ adalah y = mx + c
    Karena titik potongnya dengan sumbu y bilangan prima maka c adalah bilangan prima.
    Titik potong dengan sumbu x jika y = 0. Maka mx + c = 0 sehingga $x = -\frac{c}{m}$ adalah bilangan prima.
    Karena c prima maka $-\frac{c}{m}$ akan prima hanya jika m = –1. Maka y = –x + c
    Karena garis melalui titik (3, 4) maka 4 = –3 + c. Akibatnya c = 7 dan y = –x + 7
    ∴ Persamaan garis ℓ adalah **y = –x + 7.**

13. Karena dalam setiap dua kantong berselisih paling bayak 1, maka banyaknya permen hanya akan ada 2 jenis, yaitu m dan m + 1.
    Pendapat 1 :
    Karena 17 ≡ 1 (mod 2) maka untuk dua kantong akan terdapat dua kemungkinan yaitu satu kantong berisi 8 permen sedangkan kantong lainnya 9 permen dan sebaliknya.

Karena 17 ≡ 2 (mod 3) maka untuk tiga kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari dua kantong berisi 6 permen dan satu kantong lagi berisi 5 permen. Banyaknya cara mengemas permen pada kasus ini adalah $\frac{3!}{2!\cdot 1!}$ = 3 cara.

Karena 17 ≡ 1 (mod 4) maka untuk empat kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari satu kantong berisi 5 permen dan tiga kantong lagi berisi 4 permen. Banyaknya cara mengemas permen pada kasus ini adalah $\frac{4!}{1!\cdot 3!}$ = 4 cara. Demikian seterusnya.

Misalkan Banyaknya cara = N maka :

$$N = \frac{2!}{1!\cdot 1!}+\frac{3!}{2!\cdot 1!}+\frac{4!}{1!\cdot 3!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}+\frac{6!}{5!\cdot 1!}+\frac{7!}{3!\cdot 4!}+\frac{8!}{1!\cdot 7!}+\frac{9!}{8!\cdot 1!}+\frac{10!}{7!\cdot 3!}+\frac{11!}{6!\cdot 5!}+\frac{12!}{5!\cdot 7!}+\frac{13!}{4!\cdot 9!}+\frac{14!}{3!\cdot 11!}+\frac{15!}{2!\cdot 13!}+\frac{16!}{1!\cdot 15!}+\frac{17!}{0!\cdot 17!}$$

Banyaknya cara = 2 + 3 + 4 + 10 + 6 + 35 + 8 + 9 + 120 + 462 + 792 + 715 + 364 + 105 + 16 + 1

∴ Banyaknya cara mengemas permen = **2652**

Pendapat 2 :

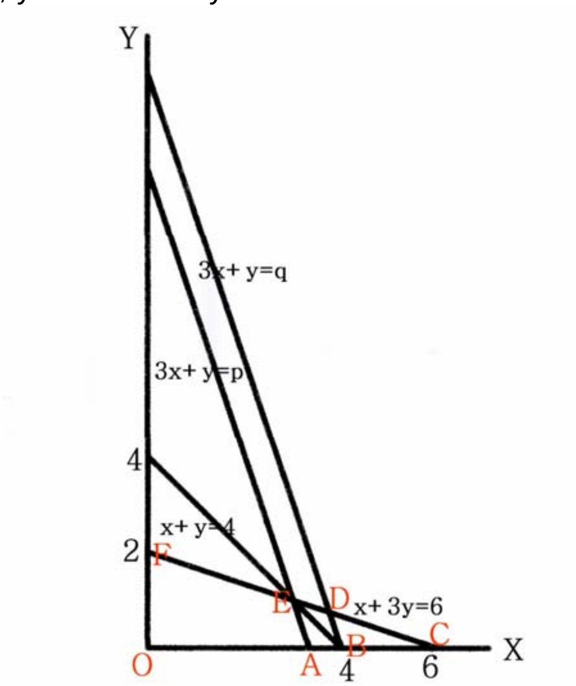
Karena banyaknya permen pada masing-masing kantong adalah m atau m + 1 maka pada masing-masing banyaknya kantong hanya akan ada 1 kemungkinan cara mengemas permen.

∴ Karena kemungkinan banyaknya kantong ada 16, maka banyaknya cara mengemas permen ada **16.**

Catatan : Pendapat 1 didasarkan asumsi bahwa kantong-kantong tersebut semuanya berbeda sehingga 8 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 9 permen dimasukkan ke kantong kedua akan berbeda dengan bila 9 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 8 permen dimasukkan ke kantong kedua. Sedangkan Pendapat 2 didasarkan asumsi bahwa kantong-kantong tersebut semuanya identik sehingga 8 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 9 permen dimasukkan ke kantong kedua akan sama dengan bila 9 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 8 permen dimasukkan ke kantong kedua. Solusi Panitia Pusat adalah sesuai dengan pendapat 2.

14. Alternatif 1 :

Digambar daerah x ≥ 0, y ≥ 0 dan x + 3y ≤ 6.



Daerah yang memenuhi $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $x + 3y \leq 6$ adalah OCF.
Dibuat garis $x + y = 4$
Perpotongan garis $x + 3y = 6$ dengan $x + y = 4$ adalah di E(3, 1).
Perpotongan garis $y = 0$ dengan $x + y = 4$ adalah di B(4, 0).
Dibuat garis $3x + y = p$ yang melalui E(3, 1) dan $3x + y = q$ yang melalui B(4, 0).
Maka akan didapat nilai p = 10 dan q = 12.

Garis $3x + y = 12$ memotong garis $x + 3y = 6$ di $D\left(\frac{15}{4}, \frac{3}{4}\right)$ yang membuat $x + y > 4$.

Garis $3x + y = 10$ memotong garis $y = 0$ di $A\left(\frac{10}{3}, 0\right)$ yang membuat $x + y < 4$.

Karena nilai $x + y$ yang diminta dalam soal adalah nilai maksimum maka persamaan $3x + y \leq a$ yang memenuhi adalah $3x + y \leq 10$.

$\therefore$ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a = 10.**

Alternatif 2 :

Karena $x + 3y \leq 6$ dan $3x + y \leq a$ maka $4(x + y) \leq 6 + a$
Karena maks(x + y) = 4 maka haruslah dipenuhi $4 \cdot 4 = 6 + a$
a = 10

$\therefore$ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a = 10.**

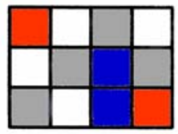
15. Banyaknya sisi dapat dinyatakan dalam luasan.
Luasan yang dicat = 6 x 5 x 5 = 150.
Luasan keseluruhan = 125 buah x 6 x 1 x 1 = 750
Luasan yang tidak dicat = 750 – 150 = 600

$\therefore$ Rasio sisi yang dicat terhadap yang tidak dicat = 150 : 600 = **1 : 4.**

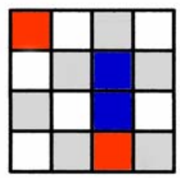
16. Jika satu kartu ditaruh pada papan maka kartu tersebut akan menutupi satu petak warna hitam dan satu petak warna putih. Maka jelas bahwa dua petak yang dibuang agar dipenuhi bahwa sisa petak dapat ditutupi oleh 7 buah kartu harus memenuhi bahwa kedua petak tersebut berbeda warna.
Akan dibuktikan bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu.
Dalam satu baris 4 x 1 petak maupun dalam satu kolom 1 x 4 petak, jelas dapat ditutupi oleh dua buah kartu.

- Jika dua petak yang dibuang berada pada satu baris
Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-1 dan 2 atau kolom 3 dan 4 maka sisanya dapat ditutupi oleh 1 buah kartu. Tiga baris sisa akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu. Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-2 dan 3 maka jelas baris tersebut dan baris didekatnya dapat ditutupi oleh 3 buah kartu. Sedangkan 2 baris sisanya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu lagi.
- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-n sedangkan satu lagi di baris ke-(n+1)
Jelas juga bahwa dua baris tersebut dapat ditutupi oleh tiga buah kartu. Dua baris lainnya sesuai dengan keterangan sebelumnya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu.

- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-n sedangkan satu lagi di baris ke-(n+2) Taruh sebuah kartu dalam arah vertikal sedemikian sehingga terdapat satu baris berisi satu petak yang dibuang dan satu petak lagi merupakan salah satu petak dari kartu yang ditaruh dengan warna kedua petak tersebut berbeda. Maka akan terbentuk 2 bagian. Satu bagian terdiri dari 2 baris dengan 2 petak "dibuang" dan satu baris sisanya terdiri 2 petak yang 'dibuang'. Sesuai dengan keterangan sebelumnya maka sisa petak akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu.



- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-1 sedangkan satu lagi di baris ke-4 Taruh sebuah kartu vertikal dengan kedua petaknya terletak pada baris ke-2 dan ke-3 sedemikian sehingga dua petak pada baris ke-1 dan ke-2 yang tidak dapat ditaruh kartu lagi akan berbeda warna. Maka sesuai dengan keterangan sebelumnya pada baris ke-1 dan ke-2 dapat ditutupi oleh tiga buah kartu lagi. Demikian juga dengan baris ke-3 dan ke-4.



Terbukti bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu..
Banyaknya petak hitam dan putih masing-masing ada 8. Maka banyaknya cara memilih dua petak agar dapat dipenuhi adalah 8 x 8 = 64.
∴ Banyaknya cara memilih dua petak = **64.**
(Catatan : Persoalan persegi panjang dengan ukuran yang lebih umum pernah dibahas di www.olimpiade.org. Pembuktian dapat dilakukan dengan induksi matematika)

17. Misalkan bilangan yang dihapus adalah k.

$\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} = \frac{602}{17}$ maka $\frac{n}{2} + \frac{n-k}{n-1} = 35\frac{7}{17}$

Karena k ≥ 1 maka n − k ≤ n − 1 sehingga $0 \le \frac{n-k}{n-1} \le 1$

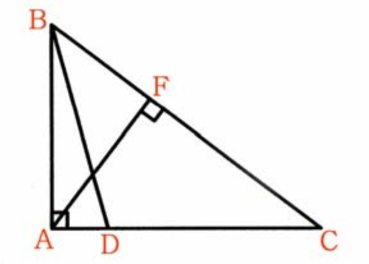
$34\frac{7}{17} \le \frac{n}{2} \le 35\frac{7}{17}$ sehingga 68 < n ≤ 70

Jika n = 70 maka $k = (1+2+3+\cdots+70) - \frac{602}{17}\cdot 69$. Karena 17 tidak membagi 69 maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

Jika n = 69 maka $k = (1+2+3+\cdots+69) - \frac{602}{17}\cdot 68 = 7$

∴ Maka **n = 69**

18. Misalkan panjang AC = x maka AD = x − 1



Pada ΔAFC berlaku AC cos C = FC maka cos C = $\frac{1}{x}$

Karena DC = DB maka ΔCDB sama kaki sehingga ∠DBC = C.
Akibatnya ∠BDA = 2C
Pada ΔBDA berlaku :
BD cos ∠BDA = AD. Maka 1 · cos 2C = x − 1 sehingga 2cos ^{2} C − 1 = x − 1

$\frac{2}{x^2} = x$

$x = \sqrt[3]{2}$

∴ Maka AC = $\sqrt[3]{2}$

19. $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54$. Maka $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 108$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6\sqrt{3}$

Karena x dan y keduanya bilangan asli maka x dan y keduanya harus berbentuk $3k^2$.
Agar didapat solusi x terbesar maka y haruslah minimal. Nilai terkecil y adalah y = 3.
Maka didapat $\sqrt{x} = 5\sqrt{3}$ sehingga x = 75.
∴ Maka solusi dengan x terbesar adalah (x, y) = **(75, 3)**.

20. Misal koordinat $V_1(x_1, y_1)$ dan $V_2(x_2, y_2)$ dengan titik tengah V_1 dan V_2 adalah X_{12}.
Maka koordinat X_{12} adalah (½(x_1 + x_2), ½(y_2 + y_2)).
Jika X_{12} memiliki koordinat bilangan bulat maka haruslah $x_1 + x_2$ dan $y_1 + y_2$ genap.
Syarat itu terjadi haruslah x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama dan y_1 dan y_2 juga memiliki paritas yang sama.
Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap,ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).
Agar dapat dipastikan bahwa ada anggota X yang memiliki koordinat bilangan bulat maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka haruslah terdapat sekurang-kurangnya 5 buah titik letis.
∴ Maka anggota V paling sedikit harus **5**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2007

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

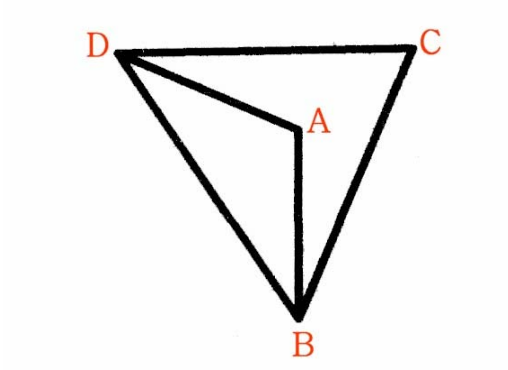
Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

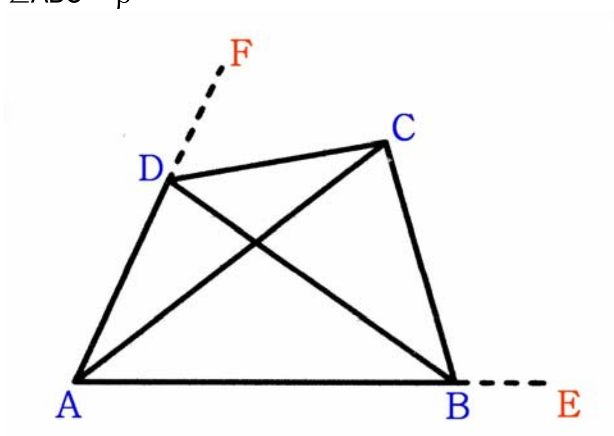
1. (a) Andaikan A berada di dalam segitiga BCD.



Karena panjang sisi-sisi ΔBAD dan ΔBDC sama maka ΔBAD dan ΔBCD kongruen dan karena sisi BD berhimpit serta AB = AD = BC = CD maka titik A haruslah berhimpit dengan C. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa ABCD adalah segiempat.

$\therefore$ **Terbukti bahwa A haruslah berada di luar segitiga BDC.**

(b) Misalkan $\angle BAD = \alpha$ dan $\angle ABC = \beta$



Pada ΔBAD dan ΔBDC berlaku :

$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cos \angle BAD$

$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2 \cdot CD \cdot CB \cos \angle BCD$

Karena AD = AB = CD = CB maka $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$

Pada ΔABC dan ΔADC berlaku :

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cos \angle ABC$

$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2 \cdot DA \cdot DC \cos \angle ADC$

Karena BA = BC = DA = DC maka $\angle ABC = \angle ADC = \beta$

Akibatnya $\alpha + \beta = 180^o$

Karena $\alpha + \beta = 180^o$ dan $\angle ABC = \beta$ maka $\angle CBE = \alpha$

Karena $\angle DAE = \angle CBE = \alpha$ maka haruslah AD sejajar BC

Karena $\alpha + \beta = 180^o$ dan $\angle ADC = \beta$ maka $\angle CDF = \alpha$

Karena $\angle BAF = \angle CDF = \alpha$ maka haruslah AB sejajar DC

$\therefore$ **Terbukti bahwa setiap pasangan sisi berhadapan pada ABCD selalu sejajar.**

2. Misalkan FPB(a, b) = d = 10p + q maka KPK(a, b) = 10q + p

Pendapat 1 :

a = dx dan b = dy untuk suatu bilangan asli d, x, y serta FPB(x, y) = 1 dan x, y $\neq$ 1
Karena a dan b simetri dan diinginkan b maksimum maka b > a sehingga y > x
Jelas bahwa KPK(a, b) = dxy
(10p + q)xy = (10q + p)
Karena 10p + q dan 10q + p keduanya bilangan asli dua angka maka xy < 10
Karena x, y $\neq$ 1 dan FPB(x, y) = 1 maka pasangan (x, y) yang memenuhi hanya x = 2 dan y = 3.
6(10p + q) = 10q + p sehingga 59p = 4q
Karena 59 adalah bilangan prima maka q haruslah kelipatan 59. Tetapi q bilangan asli satu angka. Maka tidak ada nilai q yang memenuhi.
$\therefore$ **Tidak ada nilai b yang memenuhi.**

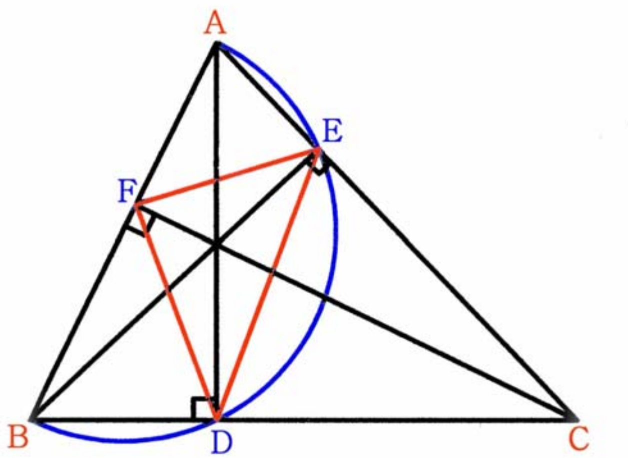
Pendapat 2 :

Jika p $\geq$ 1.
Karena 10p + q $|$ 10q + p maka 10p + q $|$ 10(q + 10p) $-$ 99p sehingga 10p + q $|$ 99p
Jika 11 tidak membagi q + 10p maka 10p + q $|$ 9p tetapi 0 < 9p < q + 10p. Kontradiksi.
Jika 11 $|$ 10p + q maka 11 $|$ 11p + q $-$ p sehingga 11 $|$ q $-$ p
Karena 0 $\leq$ q $-$ p $\leq$ 9 maka q $-$ p = 0 sehingga KPK (a, b) = FPB (a, b). Akibatnya a = b. Kontradiksi.
Jadi p = 0
KPK (a, b) = 10q dan FPB (a, b) = q.
Misalkan a = xq dan b = yq dengan FPB (x, y) = 1.
Karena KPK (a, b) = 10q maka KPK (x, y) = 10.
Maka y = 10, 5, 2, 1.
Jika y = 10 maka x = 1. Akibatnya x $|$ y sehingga a $|$ b. Kontradiksi.
Jika y = 5 maka x = 2. Akibatnya karena 1 $\leq$ q $\leq$ 9 maka b_{maks} = yq = 45 dan a = 18.
b = 45 dan a = 18 memenuhi syarat pada soal.
Untuk 1 $\leq$ y $\leq$ 5 maka karena 1 $\leq$ q < 9 maka b = yq $\leq$ 45
$\therefore$ Nilai maksimum b yang memenuhi adalah b_{maks} = **45.**

Pendapat 1 memiliki pendapat sebagai berikut. Pada soal diketahui bahwa KPK(a, b) adalah bilangan 2-angka, sedangkan FPB(a, b) dapat diperoleh dengan membalik urutan angka pada KPK(a, b). Artinya jika KPK(a, b) = xy maka FPB(a, b) = yx. Jika KPK(a, b) = 90 maka FPB(a, b) = 09. Dari pengertian ini maka KPK(a, b) tidak boleh berakhiran dengan angka 0 sebab akan menyebabkan penulisan FPB(a, b) akan dimulai dengan angka 0 sehingga hal ini tidak lazim.
Pendapat 2 memiliki pendapat sebagai berikut. Berdasarkan soal maka hanya KPK (a, b) yang harus merupakan bilangan dua angka sedangkan FPB(a, b) tidak harus merupakan bilangan dua angka. Membalik urutan angka bukan merupakan fungsi satu-satu. Ekspresi matematika haruslah kita tuliskan dalam bentuk yang paling sederhana walaupun dari mana asalnya. 009, 09, dan 9 mempunyai arti yang sama kalau mereka kita artikan sebagai bilangan. Dengan demikian mereka merupakan satu kelas dan cukup diwakili oleh 9 (sebagai ekspresi yang paling sederhana).
Solusi dari Panitia Pusat adalah sesuai dengan pendapat 2.

3. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$
   $(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - x^2 = 0$
   $((x - 1)^2)^2 - x^2 = 0$
   Mengingat $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ maka :
   $(x^2 - 2x + 1 - x)(x^2 - 2x + 1 + x) = 0$
   $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$
   Karena $(-1)^2 - 4(1)(1) < 0$ maka tidak ada x real yang memenuhi $x^2 - x + 1 = 0$.
   Untuk $x^2 - 3x + 1 = 0$ dipenuhi oleh $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(1)}}{2 \cdot 1}$ sehingga $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
   $\therefore$ Maka nilai x real yang memenuhi adalah $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ **atau** $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

4. Misalkan $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ dan $\angle ACB = \gamma$



Karena ΔAEB siku-siku di E dan ΔADB siku-siku di D maka dengan AB sebagai diameter, dapat dibuat sebuah lingkaran yang melalui A, E, D dan B. Maka AEDB adalah segiempat talibusur.
Karena AEDB adalah segiempat talibusur maka $\angle ABD + \angle AED = 180^o$
$(\beta) + (90^o + \angle BED) = 180^o$ sehingga $\angle BED = 90^o - \beta$. Maka $\angle DEC = \beta$
Dengan cara yang sama ACDF adalah segiempat talibusur.
Karena ACDF segiempat talibusur maka $\angle ACD + \angle DFA = 180^o$
$(\gamma) + (90^o + \angle CFD) = 180^o$ sehingga $\angle CFD = 90^o - \gamma$. Maka $\angle BFD = \gamma$
Karena ΔBFC siku-siku di F maka $\angle BCF = 90^o - \beta$
Karena ΔBEC siku-siku di E maka $\angle EBC = 90^o - \gamma$

Pada ΔBDF berlaku $\frac{DF}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\gamma}$ ………………… (1)

Pada ΔCDF berlaku $\frac{DF}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{DC}{\sin(90^\circ - \gamma)}$ sehingga $\frac{DF}{\cos\beta} = \frac{DC}{\cos\gamma}$ ………………… (2)

Pada ΔCDE berlaku $\frac{DE}{\sin\gamma} = \frac{DC}{\sin\beta}$ ………………… (3)

Pada ΔBDE berlaku $\frac{DE}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \beta)}$ sehingga $\frac{DE}{\cos\gamma} = \frac{BD}{\cos\beta}$ ………………… (4)

Dari persamaan (1) dan (4) didapat :

$$DE + DF = BD\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right)$$

Mengingat sin 2x = 2 sin x cos x maka :

$2 \sin\gamma \cos\beta\ (DE + DF) = BD\ (\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ .... (5)

Dari persamaan (2) dan (3) didapat :

$$DE + DF = DC\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)$$

Mengingat sin 2x = 2 sin x cos x maka :

$2 \sin\beta \cos\gamma\ (DE + DF) = DC\ (\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ .... (6)

Mengingat $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta + \gamma)$ dan $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$ maka :

Persamaan (5) + Persamaan (6) :

$2 \sin(\beta + \gamma)(DE + DF) = 2\ (BD + DC) \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma)$

$DE + DF = BC \cos(\beta - \gamma)$

Mengingat $\cos(\beta - \gamma) \le 1$ maka $DE + DF \le BC$ (terbukti)

Tanda kesamaan terjadi apabila $\beta - \gamma = 0$ atau $\beta = \gamma$ sehingga ΔABC sama kaki dengan AB = AC yang berakibat D adalah pertengahan BC.

$\therefore$ Terbukti bahwa **DE + DF ≤ BC**

5. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 16 = 136$. Jelas bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 136$.

Misalkan m = min $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$ dan M = maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$

Misalkan juga $S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2 \cdot 136 = 272$

Alternatif 1 :

Andaikan bahwa $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$ dapat disusun menjadi 8 bilangan berurutan, maka haruslah terdapat nilai n bulat sehingga memenuhi :

$(n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + (n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 2 \cdot 136 = 272$

Karena $8n - 4 = 272$ maka tidak ada n bulat yang memenuhi.

Maka harus terdapat sedikitnya salah satu d_1 atau d_2 yang memenuhi $m < d_i < M$.

- Jika $m < d_1 < M$ dan $d_2 > M$

  Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = d_2$ dan $M = m + 8$ dan $d_2 = m + 9$

  $(m) + (m + 1) + \cdots + (m + 6) + (m + 8) \le S \le (m) + (m + 2) + (m + 3) + \cdots + (m + 8)$

  $8m + 29 \le 272 \le 8m + 35$ sehingga $29 < m \le 30$. Maka nilai m yang mungkin hanya m = 30

  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + d_1 = 30 + 31 + 32 + \cdots + 38 = 306$

  $d_1 = 306 - 272 = 34$ sehingga $d_2 = m + 9 = 39$

  Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$

  Contoh *antimagic* yang memenuhi nilai maksimumnya = 39

	15	2	12	4	33
	1	14	10	5	30
	8	9	3	16	36
	11	13	6	7	37
34	35	38	31	32	39

- Jika $m < d_1 < d_2 < M$

  Maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = M$ dan $M = m + 9$

  $(m) + (m + 1) + \cdots + (m + 6) + (m + 9) \le S \le (m) + (m + 3) + (m + 4) + \cdots + (m + 9)$

  $8m + 30 \le 272 \le 8m + 42$ sehingga $28 < m \le 30$. Maka nilai m yang mungkin hanya m = 29 atau 30

  Karena ingin dicapai nilai M maksimum maka dipilih m = 30 sehingga M = m + 9 = 39

Alternatif 2 :

Nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2)$ semakin besar apabila m semakin besar.

Jika $m \ge 31$ maka $31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 \le S$ sehingga $276 \le 272$ (tidak memenuhi)

Maka tidak mungkin min $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4) \ge 31$ sehingga $m \le 30$

Jika m = 30 maka $30 + 31 + 32 + \cdots + 37 \le S \le 32 + 33 + 34 + \cdots + 39$ sehingga $268 \le 272 \le 284$

Ada kemungkin terdapat *antimagic* yang memenuhi m = 30.

Jika ada *antimagic* yang memenuhi untuk m = 30 maka maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = 39$.

Contoh *antimagic* yang memenuhi untuk m = 30.

	15	2	12	4	33
	1	14	10	5	30
	8	9	3	16	36
	11	13	6	7	37
34	35	38	31	32	39

Untuk m < 30 tidak perlu dicari sebab nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2)$ akan semakin kecil.

$\therefore$ Nilai maks $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = \mathbf{39}$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007

SURABAYA (JAWA TIMUR), 3 - 8 SEPTEMBER 2007

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007
3 – 8 SEPTEMBER 2007
SURABAYA, JAWA TIMUR

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

1. Misalkan ABC segitiga dengan $\angle ABC = \angle ACB = 70^o$. Misalkan titik D pada sisi BC sehingga AD garis tinggi, titik E pada sisi AB sehingga $\angle ACE = 10^o$, dan titik F adalah perpotongan AD dan CE. Buktikan bahwa CF = BC.

2. Untuk setiap bilangan asli n, b(n) menyatakan banyaknya faktor positif n dan p(n) menyatakan hasil penjumlahan semua faktor positif n. Sebagai contoh, b(14) = 4 dan p(14) = 24. Misalkan k sebuah bilangan asli yang lebih besar dari 1.
   a. Buktikan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $b(n) = k^2 - k + 1$.
   b. Buktikan bahwa ada berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.

3. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real positif yang memenuhi ketaksamaan $5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab+bc+ca)$.
   Buktikan bahwa ketiga ketaksamaan berikut berlaku : $a + b > c$, $b + c > a$, dan $c + a > b$

4. Suatu susunan 10-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dikatakan cantik jika (i) saat dibaca dari kiri ke kanan, 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik, sedangkan 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun, dan (ii) angka 0 tidak berada pada ujung kiri. Sebagai contoh, 9807123654 adalah susunan cantik. Tentukan banyaknya susunan cantik.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007

SURABAYA (JAWA TIMUR), 3 - 8 SEPTEMBER 2007

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 180 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2007

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007
3 – 8 SEPTEMBER 2007
SURABAYA, JAWA TIMUR

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

5. Misalkan r,s dua bilangan asli dan P sebuah `papan catur' dengan r baris dan s lajur. Misalkan M menyatakan banyak maksimal benteng yang dapat diletakkan pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang.
   a. Tentukan M.
   b. Ada berapa cara meletakkan M buah benteng pada pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang ?

6. Tentukan semua tripel bilangan real (x,y,z) yang memenuhi ketiga persamaan berikut sekaligus
   $x = y^3 + y - 8$
   $y = z^3 + z - 8$
   $z = x^3 + x - 8$

7. Titik-titik A,B,C,D terletak pada lingkaran S demikian rupa, sehingga AB merupakan garis tengah S, tetapi CD bukan garis tengah S. Diketahui pula bahwa C dan D berada pada sisi yang berbeda terhadap AB. Garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P. Titik-titik Q dan R berturut-turut adalah perpotongan garis AC dengan garis BD dan garis AD dengan garis BC.
   a. Buktikan bahwa P,Q dan R segaris.
   b. Buktikan bahwa garis QR tegak lurus terhadap garis AB.

8. Misalkan m dan n dua bilangan asli. Jika ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k sehingga $k^2 + 2kn + m^2$ adalah bilangan kuadrat sempurna, buktikan bahwa $m = n$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007

SURABAYA (JAWA TIMUR), 3 – 8 SEPTEMBER 2007

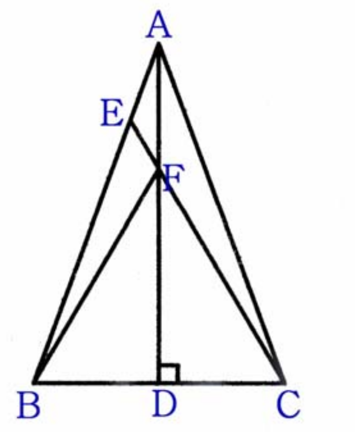
Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Karena $\angle ABC = \angle ACB = 70^o$ maka ΔABC sama kaki.



Alternatif 1 :

Karena AD adalah garis tinggi dan ΔABC sama kaki maka AD akan memotong pertengahan BC.
Karena FD memotong pertengahan BC dan FD garis tinggi ΔBFC maka ΔBFC sama kaki dengan FB = FC.
$\angle FCB = 70^o - 10^o = 60^o$. Maka $\angle FBC = \angle FCB = 60^o$. Akibatnya $\angle BFC = 60^o$.
Maka ΔFBC adalah segitiga sama sisi.
$\therefore$ Jadi CF = BC (terbukti)

Alternatif 2 :

$\angle BAC = 180^o - 70^o - 70^o = 40^o$. Karena AD garis tinggi maka $\angle FAC = 20^o$ sehingga $\angle AFC = 150^o$.
Karena $\angle ACF = 10^o$ maka pada ΔAFC berlaku $\frac{CF}{\sin 20^\circ} = \frac{AC}{\sin 150^\circ}$
Sehingga $CF = 2\ AC \sin 20^o$ .... (1)
Pada ΔABC berlaku $\frac{BC}{\sin 40^\circ} = \frac{AC}{\sin 70^\circ}$
Mengingat $\sin 70^o = \cos 20^o$ dan $\sin 40^o = 2 \sin 20^o \cos 20^o$ maka
$BC = 2\ AC \sin 20^o$ .... (2)
$\therefore$ Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa CF = BC (terbukti)

2. Misalkan $n = p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot p_3^{d3} \cdot \cdots \cdot p_n^{dn}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ adalah bilangan prima maka banyaknya faktor positif dari n adalah $(d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1) \cdots (d_n + 1)$

   a. Dengan mengambil $n = p^{k^2-k}$ maka banyaknya faktor positif $n = b(n) = k^2 - k + 1$
   $\therefore$ Karena ada tak berhingga bilangan prima maka ada tak berhingga n yang memenuhi banyaknya faktor positif $n = b(n) = k^2 - k + 1$ (terbukti).

   b. Untuk n > 1 maka n memiliki sedikitnya 2 faktor positif.
   Untuk $n > 1$ maka $p(n) \ge 1 + n > 2$
   $k^2 - k + 1 \ge 1 + n > 2$
   $1 < n \le k^2 - k$
   Karena n terletak pada suatu selang tertentu maka tidak mungkin ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.
   $\therefore$ Maka berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.

3. $5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab+bc+ca)$ .... (1)

Alternatif 1 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

$5ac + 5bc - 5c^2 - a^2 - ab + ac - ab - b^2 + bc > 4a^2 - 8ab + 4b^2$

$(5c - a - b)(a + b - c) > (2a - 2b)^2$

Karena bilangan kudrat tidak mungkin negatif maka

$(5c - a - b)(a + b - c) > 0$ .... (2)

Karena maks (a, b, c) = c maka $5c - a - b > 0$

Maka agar ketaksamaan (2) terpenuhi maka haruslah $a + b > c$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$

$\therefore$ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

Ketaksamaan (1) ekuivalen dengan

$4(a + b)(a + b - c) > 4(a - b)^2 + 5(a + b - c)^2$

Karena bilangan kudrat tidak mungkin negatif maka

$4(a + b)(a + b - c) > 0$ .... (3)

Karena a dan b positif maka ketaksamaan (3) akan terpenuhi bila $a + b > c$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$

$\therefore$ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 3 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

$5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab+bc+ca)$

$(b + c - a)^2 + (a +c - b)^2 + (a + b - c)^2 < 4(ab + ac + bc) - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2((b + c - a)(c + a - b) + (b + c - a)(a + b - c) + (c + a - b)(a + b - c))$

Misalkan $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ dan $z = a + b - c$.

$x^2 + y^2 + z^2 < 2(xy + xz + yz)$ .... (4)

Jelas bahwa karena maks (a, b, c) = c maka $x > 0$ dan $y > 0$. Akan dibuktikan bahwa $z > 0$

Jika $z \le 0$ maka

$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) = (x - y)^2 + z^2 - 2z(x + y)$

Karena $z \le 0$ maka $2z(x + y) \le 0$ maka $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) \ge 0$. Kontradiksi dengan ketaksamaan (4).Maka haruslah terpenuhi $z > 0$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 4 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan c = maks (a, b, c)

Ketaksamaan (1) ekuivalen dengan

$5(a + b + c)(a + b - c) > 10a^2 + 10b^2 + 4ab - 6ac - 6bc$ .... (5)

Misalkan $x = a + b - c$, $y = a + c - b$, $z = b + c - a$ maka $2a = x + y$, $2b = x + z$ dan $2c = y + z$

Ketaksamaan (5) akan menjadi

$10(x + y + z)x > 5(x + y)^2 + 5(x + z)^2 + 2(x + y)(x + z) - 3(x + y)(y + z) - 3(x + z)(y + z)$

$10(x + y + z)x > 12x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6xy + 6xz - 4yz$

$10(x + y + z)x > 6x^2 + 6x(x + y + z) + 2(y - z)^2$

$4(x + y + z)x > 6x^2 + 2(y - z)^2$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

$4(x + y + z)x > 0$

Karena $a + b + c > 0$ maka $x + y + z > 0$ sehingga $x > 0$. Jadi $a + b - c > 0$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

4. Karena saat dibaca dari kiri ke kanan, 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik, sedangkan 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun maka jelas bahwa angka paling kiri haruslah 0 atau 9. Tetapi karena 0 tidak berada di ujung kiri maka angka paling kiri haruslah 9.

   Alternatif 1 :

   Misalkan ujung paling kiri adalah tempat pertama. Maka angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan berada di 9 tempat lainnya. Banyaknya cara memilih 4 dari 9 tempat lainnya tersebut = ${}_9C_4$ = 126. Angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan ditempatkan di 4 tempat tersebut. Karena angka-angka 5, 6, 7, 8 tersebut telah ditentukan urutannya maka hanya ada 1 cara menempatkan angka-angka 5, 6, 7, dan 8 pada ke-4 tempat tersebut.

   Lima tempat tersisa akan diisi oleh angka-angka 0, 1, 2, 3 dan 4. Karena angka-angka 0, 1, 2, 3, dan 4 tersebut telah ditentukan urutannya maka hanya ada 1 cara menempatkan angka-angka 0, 1, 2, 3 dan 4 pada 5 tempat tersisa tersebut.

   ∴ Maka banyaknya susunan cantik = ${}_9C_4$ x 1 x 1 = 126 susunan.

   Alternatif 2 :

   Angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan ditempatkan pada 4 dari 9 tempat.

   Misalkan x_1 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 9 dan 8.
   x_2 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 8 dan 7.
   x_3 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 7 dan 6.
   x_4 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 6 dan 5.
   x_5 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di sebelah kanan angka 5.

   Jelas bahwa x_1, x_2, x_3, x_4 dan x_5 adalah bilangan bulat tak negatif dan kurang dari 6 serta memenuhi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$.

   Banyaknya pasangan bulat tak negatif (x_i, x_j) yang memenuhi $x_i + x_j = m$ adalah m + 1, yaitu (0, m), (1, m − 1), (2, m − 2), ⋯, (m, 0).

   Misalkan $x_i + x_j + x_k = n$. Karena x_k adalah bilangan bulat tak negatif maka banyaknya tripel bilangan bulat tak negatif (x_i, x_j, x_k) yang memenuhi adalah merupakan penjumlahan banyaknya pasangan (x_i, x_j) yang memenuhi $x_i + x_j = p$ dengan p = 0, 1, 2, ⋯, n.

   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 0$ ada 1.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 1$ ada 2.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 2$ ada 3.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 3$ ada 4.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 4$ ada 5.
   Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 5$ ada 6.
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 0$ ada 1.
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 1$ ada 1 + 2 = 3
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 2$ ada 1 + 2 + 3 = 6
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 3$ ada 1 + 2 + 3 + 4 = 10
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 4$ ada 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
   Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 5$ ada 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21

   Maka banyaknya susunan cantik = $1 \cdot 21 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1$

   ∴ Maka banyaknya susunan cantik = 126.

5. Misalkan p = min (r, s) dan q = maks (r, s)

   Agar tidak ada dua benteng yang saling menyerang maka tidak boleh ada sedikitnya dua benteng terletak pada baris maupun lajur yang sama.

a. Jika M > min (r, s)

Jika min (r, s) = r maka sesuai dengan *Pigeon Hole Principle* maka akan ada sedikitnya dua benteng terletak pada satu baris yang sama. Maka akan terdapat dua benteng yang saling menyerang.

Jika min (r, s) = s maka sesuai dengan *Pigeon Hole Principle* maka akan ada sedikitnya dua benteng terletak pada satu lajur yang sama. Maka akan terdapat dua benteng yang saling menyerang.

Jadi, jelas bahwa $M \le \min(r, s)$.

Misalkan $x_{i,j}$ menyatakan petak catur pada baris ke-i dan lajur ke-j.

Jika p = min (r, s) buah benteng diletakkan pada petak $x_{k,k}$ dengan k = 1, 2, 3, ⋯, p maka p buah benteng ini tidak akan saling menyerang.

∴ Maka M = min (r, s).

b. Jika min (r, s) = r

Cara meletakkan benteng pada baris ke-1 ada s cara.

Karena benteng pada baris ke-1 dan ke-2 tidak boleh pada satu lajur maka banyaknya cara meletakkan benteng pada baris ke-2 ada s − 1 cara.

Cara meletakkan benteng pada baris ke-3 ada s − 2 cara. Dan seterusnya.

Cara meletakkan benteng pada baris ke-r ada s − r + 1

Maka banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot \cdots \cdot (s-r+1)$

Banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $\frac{s!}{(s-r)!} = \frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s) - \min(r,s))!}$

Jika min (r, s) = s

Cara meletakkan benteng pada lajur ke-1 ada r cara.

Karena benteng pada lajur ke-1 dan ke-2 tidak boleh pada satu baris maka banyaknya cara meletakkan benteng pada lajur ke-2 ada r − 1 cara.

Cara meletakkan benteng pada lajur ke-3 ada r − 2 cara. Dan seterusnya.

Cara meletakkan benteng pada lajur ke-s ada r − s + 1

Maka banyaknya cara meletakkan s benteng tersebut = $r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \cdots \cdot (r-s+1)$

Banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $\frac{r!}{(r-s)!} = \frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s) - \min(r,s))!}$

∴ Dapat disimpulkan bahwa banyaknya cara meletakkan M buah benteng pada pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang = $\frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s) - \min(r,s))!}$

6. $x = y^3 + y - 8$ .... (1)

$y = z^3 + z - 8$ .... (2)

$z = x^3 + x - 8$ .... (3)

Alternatif 1 :

Jika x < 0, berdasarkan persamaan (3) maka z < 0. Sedangkan jika z < 0, berdasarkan persamaan (2) maka y < 0 serta jika y < 0, berdasarkan persamaan (1) maka x < 0.

Maka dapat disimpulkan bahwa jika salah satu x, y atau z negatif maka x, y dan z semuanya negatif.

- Jika y > x

  $y - x = (z^3 - y^3) + (z - y)$

  Maka $(z - y)(z^2 + yz + y^2 + 1) > 0$

Karena jika salah satu dari y atau z negatif akan menyebabkan y dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $z^2 + yz + y^2 + 1 > 0$. Akibatnya $z > y$.
Karena $z > y$ maka $z - y = (x^3 - z^3) + (x - z) > 0$
Maka $(x - z)(x^2 + xz + z^2 + 1) > 0$
Karena jika salah satu dari x atau z negatif akan menyebabkan x dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $x^2 + xz + z^2 + 1 > 0$. Akibatnya $x > z$.
Maka dapat disimpulkan bahwa $x > z > y > x$. Kontradiksi.

- Jika $y < x$
  $y - x = (z^3 - y^3) + (z - y)$
  Maka $(z - y)(z^2 + yz + y^2 + 1) < 0$
  Karena jika salah satu dari y atau z negatif akan menyebabkan y dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $z^2 + yz + y^2 + 1 > 0$. Akibatnya $z < y$.
  Karena $z < y$ maka $z - y = (x^3 - z^3) + (x - z) < 0$
  Maka $(x - z)(x^2 + xz + z^2 + 1) < 0$
  Karena jika salah satu dari x atau z negatif akan menyebabkan x dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $x^2 + xz + z^2 + 1 < 0$. Akibatnya $x < z$.
  Maka dapat disimpulkan bahwa $x < z < y < x$. Kontradiksi.
- Jika $y = x$
  Berdasarkan persamaan (1) maka $x^3 - 8 = 0$ sehingga $x = y = 2$.
  $z = 2^3 + 2 - 8 = 2$

$\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

Alternatif 2 :

Perhatikan bahwa fungsi $f(t) = t^3 + t - 8$ adalah fungsi monoton naik.
Andaikan bahwa $x \neq y$.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x < y$.
Karena f(t) merupakan fungsi monoton naik maka $z = f(x) < f(y) = x$.
Karena $z < x$ maka $y = f(z) < f(x) = z$ sehingga $y < z < x$ yang merupakan kontradiksi dengan pengandaian bahwa $x < y$.
Jadi $x = y$.
Dengan cara yang sama akan diperoleh bahwa $y = z$.
Dengan demikian $x = y = z$.
Maka $x = x^3 + x - 8$ sehingga $x^3 = 8$.
$x = y = z = 2$.
Setelah diuji ke persamaan (1), (2) dan (3) ternyata tripel (2, 2, 2) memenuhi ketiga persamaan tersebut.
Jadi (2, 2, 2) merupakan penyelesaian persamaan pada soal.

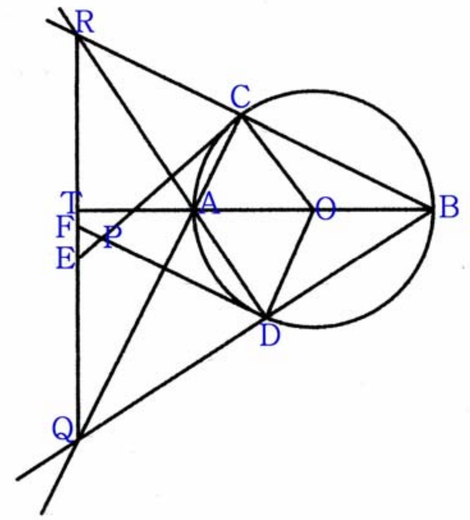
$\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

Alternatif 3 :

Jumlahkan persamaan (1), (2) dan (3) diperoleh
$x^3 + y^3 + z^3 = 24$ .... (4)
Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x \geq y, z$.
Jadi $3x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 = 24$ sehingga $x \geq 2$.
Akibatnya $z = x^3 + x - 8 \geq 2$ dan $y = z^3 + z - 8 \geq 2$.
Karena $x \geq 2$, $y \geq 2$ dan $z \geq 2$ maka $x^3 + y^3 + z^3 \geq 24$.
Agar memenuhi persamaan (4) maka haruslah $x = y = z = 2$.
Setelah diuji ke persamaan (1), (2) dan (3) ternyata $x = y = z = 2$ memenuhi ketiga persamaan tersebut.

$\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

7.



Alternatif 1 :

b. Karena AB diameter dan C terletak pada lingkaran S maka $\angle ACB = 90^o$ sehingga QC tegak lurus BR.
Karena AB diameter dan D terletak pada lingkaran S maka $\angle ADB = 90^o$ sehingga RD tegak lurus BQ.
Karena RD dan QC merupakan garis tinggi dan keduanya melalui titik A maka perpanjangan BA haruslah merupakan garis tinggi ΔBRQ.
$\therefore$ Terbukti bahwa QR tegak lurus terhadap garis AB.

a. Misalkan $\angle CBA = \alpha$ dan $\angle ABD = \beta$ serta perpotongan AB dengan RQ adalah titik T.
Karena BT tegak lurus RQ maka $\angle ERB = 90^o - \alpha$
Karena O pusat lingkaran maka $\angle OCB = \alpha$ sedangkan $CQ \perp BC$ maka $\angle QCO = 90^o - \alpha$
EC adalah garis singgung di titik C maka FC tegak lurus CO sehingga $\angle ECQ = \alpha$
Karena QC tegak lurus CR maka $\angle ECR = 90^o - \alpha$.
Karena $\angle ERC = \angle ECR$ maka ER = EC.
Karena BT tegak lurus RQ maka $\angle FQD = 90^o - \beta$
Karena O pusat lingkaran maka $\angle ODB = \beta$ sedangkan $DR \perp BD$ maka $\angle RDO = 90^o - \beta$
FD adalah garis singgung di titik D maka ED tegak lurus DO sehingga $\angle EDA = \beta$
Karena RD tegak lurus DQ maka $\angle FDQ = 90^o - \beta$.
Karena $\angle FQD = \angle FDQ$ maka FD = FQ.
Karena RC tegak lurus CQ dan $\angle QRC = 90^o - \alpha$ maka $\angle EQC = \alpha$ sehingga ΔEQC sama kaki dengan EQ = EC = ER. Karena $\angle QCR = 90^o$ maka E adalah pusat lingkaran yang melalui titik Q, C dan R dengan QR adalah diameter sehingga E adalah pertengahan QR.
Karena QD tegak lurus DR dan $\angle RQD = 90^o - \beta$ maka $\angle FRD = B$ sehingga ΔFRD sama kaki dengan FR = FD = FQ. Karena $\angle RDQ = 90^o$ maka F adalah pusat lingkaran yang melalui titik Q, D dan R dengan QR adalah diameter sehingga F adalah pertengahan QR.
Akibatnya haruslah E dan F berhimpit. Tetapi garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P, maka P = E = S sehingga P adalah pertengahan QR.
$\therefore$ Terbukti bahwa P, Q dan R segaris.

Alternatif 2 :

a. Karena AB diameter maka $\angle ACB = \angle ADB = 90^o$ sehingga $\angle CQB = \angle BRD = 90^o - \angle DBC$.
Misalkan O adalah pusat lingkaran S.
$\angle CPD = 180^o - \angle DOC = 180^o - 2\angle CAD = 2\angle CQB = 2\angle CQD$.

Karena $\angle CPD = 2\angle CQD$ maka titik C, D dan Q terletak pada satu lingkaran dengan P adalah pusat lingkaran tersebut.
Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa P juga merupakan pusat lingkaran yang melalui titik C, D dan R.
Karena P adalah pusat sebuah lingkaran yang melalui titik-titik Q, D, C dan R maka ΔPCR dan ΔPQD keduanya adalah segitiga sama kaki.
$\angle DPQ + \angle RPC = (180^o - 2\angle PDQ) + (180^o - 2\angle PCR) = 2((90^o - \angle PDQ) + (90^o - \angle PCR))$
Karena RD tegak lurus BQ dan QC tegak lurus BR maka
$\angle DPQ + \angle RPC = 2(\angle RDP + \angle PCQ)$
Karena $\angle ADB = \angle ACB = 90^o$ maka $\angle RDP = \angle ODB$ dan $\angle PCQ = \angle OCB$.
Karena ΔOCB dan ΔODB keduanya sama kaki maka $\angle ODB = \angle OBD$ dan $\angle OCB = \angle OBC$.
$\angle DPQ + \angle RPC = 2(\angle OBD + \angle OBC) = 2\angle DBC = \angle DOC = 180^o - \angle CPD$
Sehingga didapat $\angle DPQ + \angle RPC + \angle CPD = 180^o$.
$\therefore$ Akibatnya haruslah titik-titik R, P dan Q segaris (terbukti).

b. Karena AB diameter dan C terletak pada lingkaran S maka $\angle ACB = 90^o$ sehingga QC tegak lurus BR.
Karena AB diameter dan D terletak pada lingkaran S maka $\angle ADB = 90^o$ sehingga RD tegak lurus BQ.
Karena RD dan QC merupakan garis tinggi dan keduanya melalui titik A maka perpanjangan BA haruslah merupakan garis tinggi ΔBRQ.
$\therefore$ Terbukti bahwa QR tegak lurus terhadap garis AB.

8. Alternatif 1 :

* Jika $m^2 \neq n^2$
Untuk suatu bilangan bulat $a > |m^2 - n^2|$ tidak mungkin merupakan faktor dari $m^2 - n^2$.
Misalkan t adalah faktor dari $m^2 - n^2$ maka jelas bahwa $-|m^2 - n^2| \leq t \leq |m^2 - n^2|$.
Maka berhingga banyaknya kemungkinan t yang memenuhi.
Misalkan $k^2 + 2kn + m^2 = p^2$ untuk suatu bilangan asli p.
$(k + n)^2 + m^2 - n^2 = p^2$
$m^2 - n^2 = (p + k + n)(p - (k + n))$
Maka $p + k + n$ adalah faktor dari $m^2 - n^2$.
Misalkan $p + k + n = t$ untuk suatu bilangan bulat tak nol t maka $p - (k + n) = \frac{m^2 - n^2}{t}$.
Jika kedua persamaan tersebut dikurangkan akan didapat $k = -n + \frac{t}{2} - \frac{m^2 - n^2}{2t}$
Karena berhingga banyaknya kemungkinan nilai t maka akan berhingga juga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi. Kontradiksi karena dinyatakan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.
* Jika $m^2 = n^2$
$k^2 + 2kn + m^2 = (k + n)^2$
Maka berapapun bilangan bulat k akan menyebabkan $k^2 + 2kn + m^2$ merupakan bilangan kuadrat sempurna untuk suatu bilangan asli m dan n.
Sehingga ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.

Maka didapat bahwa $k^2 + 2kn + m^2$ akan merupakan bilangan kuadrat sempurna jika $m^2 = n^2$.
$\therefore$ Karena m dan n keduanya bilangan asli maka $k^2 + 2kn + m^2$ akan merupakan bilangan kuadrat sempurna jika m = n (terbukti).

Alternatif 2 :

Andaikan $m \neq n$ sehingga $m^2 - n^2 \neq 0$.

Misalkan k_1, k_2, $\cdots$ dan s_1, s_2, $\cdots$ adalah barisan-barisan bilangan bulat demikian sehingga $k_i^2 + 2k_in + m^2 = s_i^2$ untuk semua i = 1, 2, $\cdots$

Maka $m^2 - n^2 = s_i^2 - k_i^2 + 2k_in - n^2$

$m^2 - n^2 = s_i^2 - (k_i + n)^2$

$m^2 - n^2 = (s_i - k_i - n)(s_i + k_i + n)$

Akibatnya

$\left|m^2 - n^2\right| \geq s_i + k_i + n$ dan $\left|m^2 - n^2\right| \geq -(s_i - k_i - n)$

Sehingga

$2\left|m^2 - n^2\right| \geq (s_i + k_i + n) - (s_i - k_i - n) = 2k_i + 2n$

$\left|m^2 - n^2\right| \geq k_i + n$

$\left|m^2 - n^2\right| - n \geq k_i$ untuk semua I = 1, 2, $\cdots$

Karena m dan n adalah suatu nilai tetap maka hanya ada 1 nilai k_i untuk semua i = 1, 2, $\cdots$ kontradiksi dengan kenyataan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.

Jadi haruslah m = n.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2009

Bidang Matematika

Waktu : 3,5 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2008

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika a bilangan real, maka $\sqrt{a^2}$ =

   A. $-|a|$ B. $-a$ C. $\pm a$ D. a E. $|a|$

2. Banyaknya faktor positif dari 5! adalah

   A. 4 B. 5 C. 16 D. 24 E. 120

3. Banyaknya susunan huruf B, I, O, L, A sehingga tidak ada dua huruf hidup (vowel) yang berturutan adalah

   A. 8 B. 10 C. 12 D. 14 E. 16

4. Lingkaran T merupakan lingkaran luar bagi segitiga ABC dan lingkaran dalam bagi segitiga PQR. Jika ABC dan PQR keduanya segitiga samasisi, maka rasio keliling ΔABC terhadap keliling ΔPQR adalah

   A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2 E. 4

5. Jumlah empat bilangan asli berturutan senantiasa habis dibagi p. Maka nilai p terbesar adalah

   A. 1 B. 2 C. 4 D. 5 E. 7

6. Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah

   A. 3 B. 4 C. 8 D. 16 E. 32

7. Segitiga ABC sama kaki, yaitu AB = AC, dan memiliki keliling 32. Jika panjang garis tinggi dari A adalah 8, maka panjang AC adalah

   A. $9\frac{1}{3}$ B. 10 C. $10\frac{2}{3}$ D. $11\frac{1}{3}$ E. 12

8. Jika f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x^2 \neq 1$, f(–x) =

   A. $\frac{1}{f(-x)}$ B. –f(–x) C. –f(x) D. f(x) E. $\frac{1}{f(x)}$

9. Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar sisi DC dan rasio luas segitiga ABC terhadap luas segitiga ACD adalah 1/3. Jika E dan F berturut-turut adalah titik tengah BC dan DA, maka rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. 1 D. $\frac{5}{3}$ E. 3

10. Diketahui bahwa a, b, c dan d adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan c < a. Jika b $\neq$ 1 dan c $\neq$ d, maka

A. $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$ B. $\frac{b-a}{d-c} < \frac{a}{c}$ C. $\frac{a}{c} < \frac{b(d-1)}{d(b-1)}$

D. $\frac{b(d-1)}{d(b-1)} < \frac{a}{c}$ E. $\frac{a+b}{c+d} < \frac{a}{c}$

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Suatu pertujukan dihadiri oleh sejumlah penonton. Setiap penonton dewasa membayar tiket seharga 40 ribu rupiah, sedangkan setiap penonton anak-anak membayar tiket 15 ribu rupiah. Jika jumlah uang penjualan tiket adalah 5 juta rupiah, dan banyaknya penonton dewasa adalah 40 % dari seluruh penonton, maka banyaknya penonton anak-anak adalah ··········

12. Diketahui FPB (a, 2008) = 251. Jika a > 2008 maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah ·····

13. Setiap dung adalah ding. Ada lima ding yang juga dong. Tidak ada dung yang dong. Jika banyaknya ding adalah 15, dan tiga di antaranya tidak dung dan tidak dong, maka banyaknya dung adalah ···········

14. Dua buah dadu identik (sama persis) dilemparkan bersamaan. Angka yang muncul adalah a dan b. Peluang a dan b terletak pada sisi-sisi yang bertolak belakang (di dadu yang sama) adalah ····

15. Bilangan 4-angka dibentuk dari 1, 4, 7 dan 8 dimana masing-masing angka digunakan tepat satu kali. Jika semua bilangan 4-angka yang diperoleh dengan cara ini dijumlahkan, maka jumlah ini mempunyai angka satuan ·······

16. Titik A dan B terletak pada parabola $y = 4 + x - x^2$. Jika titik asal O merupakan titik tengah ruas garis AB, maka panjang AB adalah ·····

17. Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$, maka b = ··········

18. Kubus ABCDEFGH dipotong oleh bidang yang melalui diagonal HF, membentuk sudut 30^o terhadap diagonal EG dan memotong rusuk AE di P. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, maka panjang ruas AP adalah ············

19. Himpunan semua bilangan asli yang sama dengan enam kali jumlah angka-angkanya adalah ⋯⋯

20. Diketahui bahwa a dan b adalah besar dua sudut pada sebuah segitiga. Jika sin a + sin b = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan cos a + cos b = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$, maka sin (a + b) = ⋯⋯⋯⋯

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

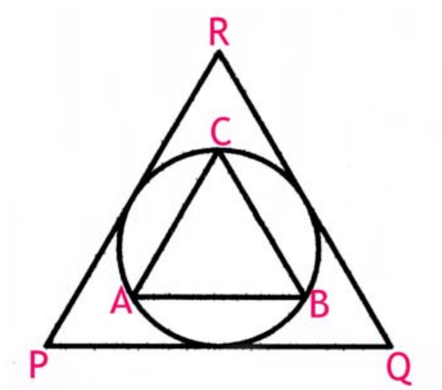
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)
   Akar dari suatu bilangan positif adalah juga bilangan positif, maka
   $\sqrt{a^2} = a$ jika a bilangan real positif
   $\sqrt{a^2} = -a$ jika a bilangan real negative
   $\therefore$ Karena a bilangan real maka $\sqrt{a^2}$ = $|\mathbf{a}|$

2. (Jawaban : C)
   $5! = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
   Banyaknya faktor positif = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16
   $\therefore$ Banyaknya faktor positif dari 5! adalah **16**.

3. (Jawaban : C)
   Agar huruf hidup tidak berdekatan maka ketiga huruf hidup tersebut harus berada pada urutan ke-1, ke-3 dan ke-5. Sisanya harus diisi oleh huruf konsonan.
   Maka banyaknya susunan = $3! \cdot 2! = 12$
   $\therefore$ Banyaknya susunan = **12**.

4. (Jawaban : C)



Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah R, sisi ΔABC = x dan sisi ΔPQR = y.

$\frac{x}{\sin 60^\circ}$ = 2R sehingga $3x = 3R\sqrt{3}$

Luas ΔPQR = ½ · R · (3y)

$\frac{1}{2} y^2 \sin 60^o = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 3y$ sehingga $3y = 6R\sqrt{3}$

Keliling ΔABC : Keliling ΔPQR = 3x : 3y = 1 : 2

$\therefore$ Rasio keliling ΔABC terhadap keliling ΔPQR adalah $\frac{1}{2}$.

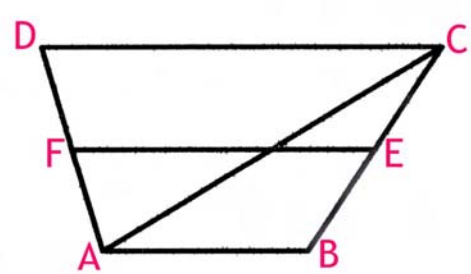
5. (Jawaban : B)
   (n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 2(2n + 3)
   2n + 3 adalah bilangan ganjil.
   $\therefore$ Maka nilai p terbesar adalah **2**.

6. (Jawaban : C)
   $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   X terdiri dari sedikitnya 2 unsur dan maksimal 5 unsur dengan 2 unsur di antaranya haruslah 1 dan 2. Sedangkan sisanya dipilih dari unsur-unsur 3, 4 atau 5.
   Jika X terdiri dari 2 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_0$ = 1
   Jika X terdiri dari 3 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_1$ = 3
   Jika X terdiri dari 4 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_2$ = 3
   Jika X terdiri dari 5 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_3$ = 1
   Banyaknya himpunan X = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.
   $\therefore$ Banyaknya himpunan X yang memenuhi adalah **8**.

7. (Jawaban : B)
   Misalkan panjang AB = AC = x maka panjang BC = $2\sqrt{x^2 - 64}$ maka
   $x + \sqrt{x^2 - 64}$ = 16
   $x^2 - 64 = (16 - x)^2 = x^2 - 32x + 256$
   32x = 320
   x = 10
   Panjang AC = 10
   $\therefore$ Panjang AC adalah **10**.

8. (Jawaban : E)
   $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
   $f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{f(x)}$
   $\therefore$ $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

9. (Jawaban : D)



ΔABC dan ΔACD memiliki tinggi yang sama maka perbandingan luas keduanya dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas.
AB : DC = 1 : 3
Misalkan panjang sisi AB = x maka panjang sisi DC = 3x.
E adalah pertengahan BC dan F pertengahan DA sehingga FE sejajar AB dan DC.
Maka FE = ½ (x + 3x) = 2x
Misalkan tinggi trapesium = t.
Luas ABEF = $\frac{(AB+FE)}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{3tx}{4}$
Luas EFDC = $\frac{(FE+DC)}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{5tx}{4}$
Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC = 3 : 5.
$\therefore$ Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah $\frac{3}{5}$.

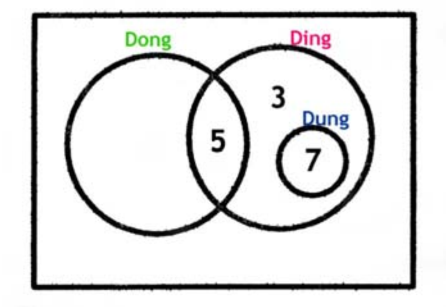
10. (Jawaban : A)
Karena $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.
$\frac{b-a}{a} > \frac{d-c}{c}$ sehingga $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$
$\therefore$ $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$

BAGIAN KEDUA

11. Misal penonton dewasa = x dan penonton anak-anak = y maka
40.000x + 15.000y = 5.000.000
8x + 3y = 1000 ·················· (1)
x = 40% (x + y)
3x = 2y ························ (2)
Subtitusikan persamaan (2) ke (1)
16y + 9y = 3000
y = 120
$\therefore$ Banyaknya penonton anak-anak adalah **120**

12. 2008 = 8 · 251 dan a = 251 · k dengan k dan 8 relatif prima serta k bilangan asli.
Karena k > 8 dan dua bilangan asli berurutan akan relatif prima maka k_{min} = 9.
a minimum = k_{min} · 251
a minimum = 9 · 251 = 2259.
$\therefore$ Nilai a terkecil yang mungkin adalah **2259**.

13. Kalau persoalan tersebut digambarkan dalam diagram venn maka



$\therefore$ Maka banyaknya dung adalah **7**.

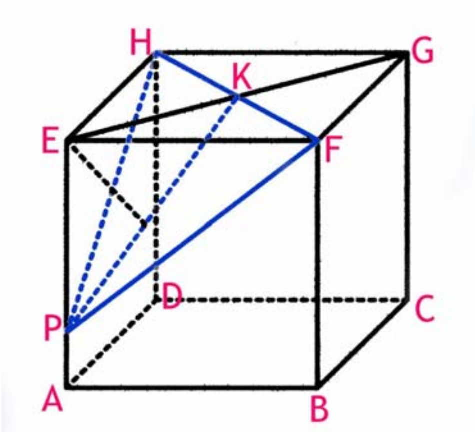
14. Pasangan bilangan yang muncul adalah 1 dan 6 atau 2 dan 5 atau 3 dan 4.
Banyaknya pasangan yang mungkin ada 6.
$\therefore$ Peluang = $\frac{6}{36}$

15. Banyaknya bilangan yang mungkin ada 4! = 24.
Masing-masing angka 1, 4, 7 dan 8 akan muncul 6 kali sebagai angka satuan.
Angka satuan bilangan tersebut = angka satuan $6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 8$
$\therefore$ Angka satuan bilangan tersebut adalah **0**.

16. Misalkan koordinat A adalah (p, q) maka karena pertengahan AB adalah titik (0, 0) maka koordinat B adalah (–p, –q).
Titik A dan B terletak pada parabola maka
$q = 4 + p - p^2$ .... (1)
$-q = 4 - p - p^2$ .... (2)
Jumlahkan persamaan (1) dan (2) didapat
$0 = 8 - 2p^2$ sehingga $p = \pm 2$
Jika p = 2 maka $q = 4 + 2 - 2^2 = 2$
Jika p = –2 maka $q = 4 - 2 - 2^2 = -2$
Koordinat A dan B adalah (2, 2) dan (–2, –2)
Panjang AB = $\sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-2))^2}$
$\therefore$ Panjang AB = **$4\sqrt{2}$.**

17. Karena koefisien x^3 adalah a dan konstantanya adalah 1 maka haruslah
$(ax^3 + bx^2 + 1) = (x^2 - x - 1)(ax - 1)$
$(ax^3 + bx^2 + 1) = ax^3 - (a + 1)x^2 + (1 - a)x + 1$
Maka $1 - a = 0$ sehingga $a = 1$
$b = -(a + 1)$ sehingga
$b = -(1 + 1) = -2$
$\therefore$ Nilai b yang memenuhi adalah **b = 2**.

18. Perhatikan gambar.



Perpotongan bidang yang melalui HF tersebut dengan kubus adalah segitiga PFH.
Misalkan panjang AP = x maka PE = 1 − x.
E.PFH adalah bangunan prisma dengan alas berbentuk segitiga sama kaki.
Karena PF = PH dan FE = HE maka proyeksi E pada bidang PFH akan berada pada garis tinggi PK.
Sudut antara garis EG dengan bidang PFH adalah ∠EKP.

EK = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Pada ΔKEP siku-siku di E.

tan ∠EKP = $\frac{EP}{EK}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1-x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

AP = $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

∴ Panjang ruas AP adalah $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$.

19. Misalkan bilangan tersebut adalah N.
Misalkan N adalah bilangan n angka dengan angka-angka N adalah x_1, x_2, x_3, ⋯, x_n.
$N \geq 10^{n-1}$ dan $N = 6(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leq 54n$
Lemma :
Akan dibuktikan bahwa jika terbukti $54k < 10^{k-1}$ maka $54(k + 1) < 10^k$ untuk k bilangan asli ≥ 3.
Andaikan bahwa $54k < 10^{k-1}$.
Karena k ≥ 3 maka $54 < 9 \cdot 10^{k-1}$ sehingga
$54k + 54 < 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-1}$
$54(k + 1) < 10^k$
Terbukti bahwa untuk k asli ≥ 3 maka jika $54k < 10^{k-1}$ maka $54(k + 1) < 10^k$.
Pembuktian di atas sama saja dengan membuktikan bahwa untuk k ≥ 3 maka jika tidak ada N yang terdiri dari k angka yang memenuhi nilainya sama dengan 6 kali jumlah angka-angkanya maka tidak akan ada juga N terdiri dari k + 1 angka yang memenuhi nilainya sama dengan 6 kali jumlah angka-angkanya.

- Jika N terdiri dari 1 angka
  N = x_1 = 6(x_1) sehingga tidak ada N asli yang memenuhi.
- Jika bilangan tersebut adalah bilangan dua angka
  N = 10x_1 + x_2 = 6(x_1 + x_2)
  4x_1 = 5x_2
  Karena x_1 dan x_2 asli maka pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi hanya (5,4).
  Bilangan yang memenuhi hanya 54.
- Jika N terdiri dari 3 angka
  Misalkan N = 100x_1 + 10x_2 + x_3 = 6(x_1 + x_2 + x_3)
  94x_1 + 4x_2 = 5x_3
  Karena $x_1 \geq 1$ maka tidak ada tripel (x_1, x_2, x_3) yang memenuhi.

Sesuai dengan lemma maka untuk n ≥ 3 maka tidak ada N yang memenuhi nilainya sama dengan 6 angka jumlah angka-angkanya.
Himpunan semua bilangan yang memenuhi hanya {54}.
∴ Himpunan semua bilangan yang memenuhi adalah **{54}**.

20. $(\sin a + \sin b)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b = \frac{1}{2}$ .... (1)

$(\cos a + \cos b)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = \frac{3}{2}$

$\cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cos b = \frac{3}{2}$ .... (2)

Jumlahkan (1) dan (2) dan dengan mengingat $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka
$2 + 2 (\sin a \sin b + \cos a \cos b) = 2$
$\sin a \sin b + \cos a \cos b = 0$
$\cos (a - b) = 0$ .... (3)

$(\sin a + \sin b)(\cos a + \cos b) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin a \cos a + \sin b \cos b + \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} (\sin 2a + \sin 2b) + \sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin (a + b) \cos (a - b) + \sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Mengingat $\cos (a - b) = 0$ maka $\sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

∴ $\sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Catatan :
Jika yang dicari adalah nilai a dan b.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan a ≥ b.

Berdasarkan cos (a – b) = 0 maka
$a - b = 90^o$ .... (4)

Karena sin (a + b) = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka :

- $a + b = 60^o$ .... (5)
  Berdasarkan (4) dan (5) maka didapat $a = 75^o$ dan $b = -15^o$ yang tidak memenuhi bahwa a dan b adalah besar dua sudut pada sebuah segitiga.
- $a + b = 120^o$
  Berdasarkan (4) dan (6) maka didapat $a = 115^o$ dan $b = 15^o$.
  Tetapi bila $a = 115^o$ dan $b = 15^o$ disubtitusikan ke persamaan sin a + sin b = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan persamaan cos a + cos b = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ ternyata tidak memenuhi keduanya.

Dapat disimpulkan bahwa tidak ada pasangan (a, b) yang memenuhi.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Waktu : 90 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

SELEKSI TINGKAT PROVINSI CALON
PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008
MATEMATIKA SMA

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya pembagi positif dari 2008 adalah ⋯⋯

2. Cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan ada sebanyak ⋯⋯⋯⋯

3. Jika $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$, maka $\frac{a+b}{a-b}$ = ⋯⋯⋯

4. Dua dari panjang garis tinggi segitiga ABC lancip, berturut-turut sama dengan 4 dan 12. Jika panjang garis tinggi yang ketiga dari segitiga tersebut merupakan bilangan bulat, maka panjang maksimum garis tinggi segitiga tersebut adalah ⋯⋯

5. Dalam bidang XOY, banyaknya garis yang memotong sumbu X di titik dengan absis bilangan prima dan memotong sumbu Y di titik dengan ordinat bilangan bulat positif serta melalui titik (4, 3) adalah ⋯⋯

6. Diberikan segitiga ABC, AD tegak lurus BC sedemikian rupa sehingga DC = 2 dan BD = 3. Jika $\angle BAC = 45^o$, maka luas segitiga ABC adalah ⋯⋯

7. Jika x dan y bilangan bulat yang memenuhi $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$, maka $3x^2y^2$ = ⋯⋯⋯

8. Diberikan segitiga ABC, dengan BC = a, AC = b dan $\angle C = 60^o$. Jika $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$, maka besarnya sudut B adalah ⋯⋯

9. Seratus siswa suatu Provinsi di Pulau Jawa mengikuti seleksi tingkat Provinsi dan skor rata-ratanya adalah 100. Banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi tersebut 50% lebih banyak dari siswa kelas III, dan skor rata-rata siswa kelas III 50% lebih tinggi dari skor rata-rata siswa kelas II. Skor rata-rata siswa kelas III adalah ⋯⋯

10. Diberikan segitiga ABC, dengan BC = 5, AC = 12, dan AB = 13. Titik D dan E berturut-turut pada AB dan AC sedemikian rupa sehingga DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama. Panjang minimum DE adalah ⋯⋯

11. Misalkan a, b, c dan d bilangan rasional. Jika diketahui persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mempunyai 4 akar real, dua di antaranya adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2008}$. Nilai dari a + b + c + d adalah ⋯

12. Diberikan segitiga ABC dengan sisi-sisi a, b, dan c. Nilai $a^2 + b^2 + c^2$ sama dengan 16 kali luas segitiga ABC. Besarnya nilai ctg A + ctg B + ctg C adalah ·····

13. Diberikan $f(x) = x^2 + 4$. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$. Nilai minimum dari x + y adalah ······

14. Banyak bilangan bulat positif n kurang dari 2008 yang mempunyai tepat $\frac{n}{2}$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n adalah ·······

15. Suatu polinom f(x) memenuhi persamaan $f(x^2) - x^3f(x) = 2(x^3 - 1)$ untuk setiap x bilangan real. Derajat (pangkat tertinggi x) f(x) adalah ······

16. Anggap satu tahun 365 hari. Peluang dari 20 orang yang dipilih secara acak ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah ·······

17. Tiga bilangan dipilih secara acak dari {1,2,3, ···,2008}. Peluang jumlah ketiganya genap adalah ···

18. Misalkan $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X. Jika $|A \cup B|$ = 10 dan $|A|$ = 4, maka nilai yang mungkin untuk $|B|$ adalah ······

19. Diketahui AD adalah garis tinggi dari segitiga ABC, ∠DAB = ∠ACD, AD = 6, BD = 8. Luas segitiga ABC adalah ·····

20. Nilai dari $\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$ = ·······

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Waktu : 120 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

SELEKSI TINGKAT PROVINSI CALON
PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008
MATEMATIKA SMA

BAGIAN KEDUA

1. Carilah semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 40$$

2. Diberikan polinom real $P(x) = x^{2008} + a_1x^{2007} + a_2x^{2006} + \cdots + a_{2007}x + a_{2008}$ dan $Q(x) = x^2 + 2x + 2008$. Misalkan persamaan $P(x) = 0$ mempunyai 2008 selesaian real dan $P(2008) \leq 1$. Tunjukkan bahwa persamaan $P(Q(x)) = 0$ mempunyai selesaian real.

3. Lingkaran dalam dari segitiga ABC, menyinggung sisi-sisi BC, CA, dan AB berturut-turut di D, E, dan F. Melalui D, ditarik garis tegak lurus EF yang memotong EF di G. Buktikan bahwa

$$\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$$

4. Bilangan 1, 2, 3, ⋯, 9 disusun melingkar secara acak. Buktikan bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.

5. Tentukan banyaknya bilangan positif 5-angka palindrom yang habis dibagi 3. Palindrom adalah bilangan/kata yang sama jika dibaca dari kiri ke kanan atau sebaliknya. Sebagai contoh 35353 adalah bilangan palindrom, sedangkan 14242 bukan.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Pertama

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $2008 = 2^3 \cdot 251$
   Banyaknya pembagi positif dari 2008 = (3 + 1)(1 + 1)
   $\therefore$ Banyaknya pembagi positif dari 2008 = **8**.

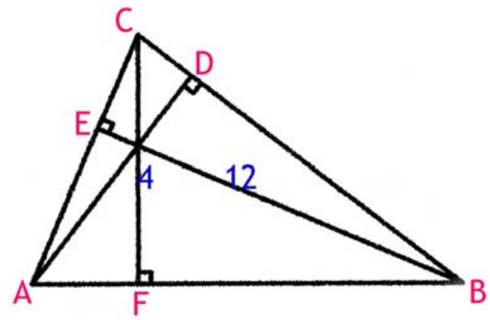
2. Alternatif 1 :
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA adalah $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$ = 151200
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan syarat kedua T berdekatan adalah sama dengan banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMAIKA, yaitu $\frac{9!}{3!\cdot 2!}$ = 30240
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah = 151200 − 30240 = 120960.
   $\therefore$ Banyaknya cara menyusun = **120960**.
   Alternatif 2 :
   Karena T tidak boleh berdekatan maka kedua huruf T hanya dapat ditempatkan ke dalam 9 dari 10 tempat. Banyaknya cara memilih 9 tempat = ${}_9C_2$ = 36 cara
   Ke-8 tempat yang lain akan diisi oleh ke-8 uruf tersisa yang terdiri dari 2 huruf M, 3 huruf A dan masing-masing satu huruf yaitu E, I dan K. Banyaknya cara = $\frac{8!}{2!\cdot 3!}$ = 3360 cara.
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah = 36 x 3360 = 120960.
   $\therefore$ Banyaknya cara menyusun = **120960**.

3. Karena 0 < b < a maka $\frac{a+b}{a-b}$ akan bernilai positif.

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{6ab+2ab}{6ab-2ab} = 2$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$$

4. Misalkan panjang sisi-sisi segitiga ABC adalah BC = a, AC = b dan AB = c.



Misalkan juga panjang garis tinggi dari A adalah x dengan x bilangan asli.
Ada dua kemungkinan pemahaman terhadap pertanyaan pada soal.

i) Yang ditanyakan adalah maks (x, 4, 12).
[ABC] = ½ · AC · 12 = ½ · AB · 4
b · 12 = AB · 4
AB = 3b
[ABC] = ½ · a · x = ½ · 4 · 3b
a x = 12b .... (1)
Akan dibuktikan bahwa x ≤ 12 sehingga panjang maksimum dari garis tinggi segitiga ABC adalah 12.
Andaikan bahwa x > 12.
Dari persamaan (1) akan didapat bahwa a < b .... (2)
Pada segitiga siku-siku ACF jelas bahwa AC = b > AF
Karena AB = 3b maka FB > 2b
Pada segitiga siku-siku BCF berlaku bahwa BC > FB
Karena BC = a < b sedangkan FB > 2b maka ketaksamamaan tidak mungkin terjadi. Kontradiksi dengan pengandaian awal.
Jadi, x ≤ 12.
Maka panjang maksimum garis tinggi segitiga ABC adalah **12**.

ii) Yang ditanyakan adalah panjang maksimum dari garis tinggi yang ketiga dari segitiga ABC
Panjang garis tinggi-garis tinggi yang berturut-turut sepadan dengan sisi-sisi a, b dan c adalah x, 12 dan 4.
Dengan rumus luas segitiga ABC didapat hubungan
xa = 12b = 4c
Dengan ketaksamaan segitiga didapat
c < a + b sehingga $1 < \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
$1 < \frac{4}{x} + \frac{1}{3}$ sehingga didapat x < 6.
Jika x = 5 maka 5a = 12b = 4c
a : b : c = $\frac{1}{5} : \frac{1}{12} : \frac{1}{4}$ = 12 : 5 : 15
Karena $12^2 + 5^2 < 15^2$ maka segitiga tersebut tumpul. Kontradiksi.
Jika x = 4 maka 4a = 12b = 4c
a : b : c = $\frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{1}{4}$ = 3 : 1 : 3
Segitiga tersebut adalah segitiga lancip sebab $3^2 + 1^2 > 3^2$.
Jadi, panjang maksimum garis tinggi yang ketiga dari segitiga ABC adalah **4**.

∴ Dari dua kemungkinan ini Penulis lebih cenderung pada kemungkinan pertama yang sesua dengan kata-kata pada soal. Panjang maksimum garis tinggi dari segitiga ABC adalah **12**.

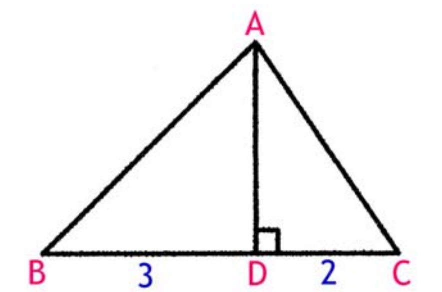
5. Misalkan persamaan garis tersebut adalah y = mx + c
Misalkan juga garis memotong sumbu X di (p, 0) dan sumbu Y di (0, q) dengan p adalah bilangan prima dan q adalah bilangan bulat positif.
Karena garis memotong sumbu X di (p, 0) dan sumbu Y di (0, q) maka persamaan garis tersebut adalah $y = -\frac{q}{p}x + c$.

Garis melalui (0, q) maka c = q. Jadi persamaan garis tersebut adalah $y = -\frac{q}{p}x + q$

Karena garis melalui (4, 3) maka berlaku
3p = –4q + pq
(p – 4)(q – 3) = 12
* Jika p genap maka p = 2 sehingga q = –3. Tidak memenuhi q bulat positif.
* Jika p ganjil maka p – 4 ganjil. Nilai p – 4 yang mungkin memenuhi adalah ±1 atau ±3.
    - Jika p – 4 = –1 maka p = 3 dan q = –9. Tidak memenuhi q bulat positif.
    - Jika p – 4 = 1 maka p = 5 dan q = 15. Jadi persamaan garis adalah y = –3x + 15 yang melalui titik (4, 3)
    - Jika p – 4 = –3 maka p = 1 yang tidak memenuhi bahwa p adalah bilangan prima.
    - Jika p – 4 = 3 maka p = 7 dan q = 7. Jadi persamaan garis adalah y = –x + 7 yang melalui titik (4, 3)

Persamaan garis yang memenuhi adalah y = –3x + 15 dan y = –x + 7.
∴ Banyaknya garis yang memenuhi ada **2**.

6. Perhatikan gambar. Diketahui dari soal ∠BAC = 45°.



Alternatif 1 :
Misalkan luas segitiga ABC = [ABC]
Dengan dalil pitagoras didapat :
$AC^2 = AD^2 + 4$ ……………… (1)
$AB^2 = AD^2 + 9$ ……………… (2)
Persamaan (2) jumlahkan dengan (1) didapat
$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 13$ ……………… (3)
[ABC] = ½ BC · AD
Karena BC = 5 maka AD = $\frac{2[ABC]}{5}$ ……………… (4)
Pada segitiga ABC berlaku
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ AC \cos 45^\circ = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ AC \sin 45^\circ$
$25 = 2\ AD^2 + 13 - 4[ABC]$ ……………… (5)
Subtitusikan persamaan (4) ke (5)
$$12 = \frac{8[ABC]^2}{25} - 4[ABC]$$
(2[ABC] + 5)([ABC] – 15) = 0
Maka [ABC] = 15
∴ Luas segitiga ABC adalah **15**.

Alternatif 2 :

Misalkan AD = t

$\angle BAD + \angle CAD = 45^o$

1 = tan 45^o = $\frac{\tan\angle BAD + \tan\angle CAD}{1 - \tan\angle BAD \cdot \tan\angle CAD}$

$1 = \frac{\frac{3}{t}+\frac{2}{t}}{1-\frac{3}{t}\cdot\frac{2}{t}}$ yang ekivalen dengan

(t − 6)(t + 1) = 0

[ABC] = ½ · BC · AD = ½ · 5 · 6

∴ Luas segitiga ABC adalah **15**.

7. Persamaan tersebut dapat diubah menjadi $(3x^2 + 1)(y^2 - 10) = 507 = 3 \cdot 13^2$

Karena $3x^2 + 1$ bulat positif maka $y^2 - 10$ juga bilangan bulat positif. Faktor positif dari 507 ada 6 yaitu 1, 3, 13, 39, 169 dan 507.

$y^2 - 10$ adalah faktor dari 507 maka y^2 = 11, 13, 23, 49, 179 atau 517 dan yang merupakan bilangan kuadrat sempurna hanya 49. Maka $y^2 = 49$.

Sehingga $3x^2 + 1 = 13$.

∴ $3x^2y^2 = 12 \times 49$ **= 588.**

8. Alternatif 1 :

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dengan dalil cosinus

$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B}$ sehingga $\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{a}{b} = 2+\sqrt{3}$

$$\sin\angle A = \left(2+\sqrt{3}\right)\sin\angle B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Karena $\angle C = 60^o$ maka $\angle A = 120^o - \angle B$

$\sin\angle A = \sin(120^o - \angle B) = \sin 120^o \cos\angle B - \cos 120^o \sin\angle B$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\sin\angle B = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\angle B + \frac{1}{2}\sin\angle B$$

$$\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\sin\angle B = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\angle B$$

$$\tan\angle B = \frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = \tan 15^o$$

∴ Besarnya sudut B adalah **15°**.

Alternatif 2 :

Misal AB = c dan dengan dalil cosinus didapat

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$

Subtitusikan $a = (2+\sqrt{3})b$ yang didapat dari soal.

$c^2 = (2+\sqrt{3})^2 b^2 + b^2 - 2(2+\sqrt{3})b \cdot b \cdot \frac{1}{2}$

$c^2 = (6+3\sqrt{3})b^2$

Dengan dalil sinus didapat

$$\frac{c^2}{(\sin\angle C)^2} = \frac{b^2}{(\sin\angle B)^2}$$

$$\frac{(6+3\sqrt{3})b^2}{\frac{3}{4}} = \frac{b^2}{\sin^2\angle B}$$

$$\sin^2\angle B = \frac{1}{4(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

$\angle$B = 15^o

$\therefore$ Besarnya sudut B adalah **15^o**.

9. Karena banyaknya siswa = 100 orang sedangkan banyaknya siswa kelas II 50% lebih banyak dari siswa kelas III maka banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi = 60 orang sedangkan siswa kelas III = 40 orang.

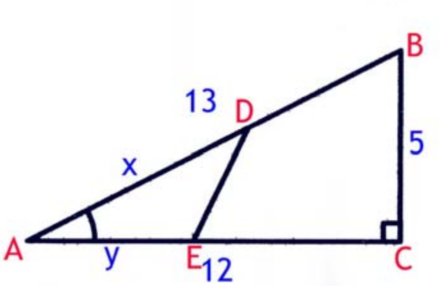
Misalkan skor rata-rata kelas III adalah x maka skor rata-rata kelas II adalah $\frac{2}{3}$x.

$$100 = \frac{60 \cdot \frac{2}{3}x + 40 \cdot x}{100}$$

x = 125

$\therefore$ Skor rata-rata siswa kelas III adalah **125**.

10. Misalkan panjang AD = x dan panjang AE = y



Luas ΔABC = $\frac{1}{2}$(5)(12) = 30 dan sin A = $\frac{5}{13}$ serta cos A = $\frac{12}{13}$

Luas ΔADE = $\frac{1}{2}$xy sin A = 15. Maka xy = 78.

Sesuai dalil cosinus pada ΔADE maka :

DE^2 = x^2 + y^2 – 2xy cos A = x^2 + y^2 – 144

Dengan AM-GM maka

DE^2 $\geq$ 2xy – 144 = 12

DE^2 akan minimum sama dengan 12 jika x = y = $\sqrt{78}$

$\therefore$ DE$_{\text{minimum}}$ = $2\sqrt{3}$

11. Misalkan ke-4 akar tersebut adalah x_1, x_2, x_3 dan x_4 dengan $x_1 = \sqrt{2}$ dan $x_2 = \sqrt{2008} = 2\sqrt{502}$.

Alternatif 1 :

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$ yang merupakan bilangan rasional. Maka ada 2 kemungkinan nilai x_3 dan x_4.

- $x_3 = p - \sqrt{2} - 2\sqrt{502}$ dan $x_4 = q$ untuk p dan q bilangan rasional.
  $x_1x_2x_3x_4 = d$ yang merupakan bilangan rasional.
  $\left(\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{502}\right)\left(p - \sqrt{2} - 2\sqrt{502}\right)(q)$ = bilangan rasional untuk p, q rasional
  $4p\sqrt{251} - 4\sqrt{251} - 2008\sqrt{2}$ = bilangan rasional.
  Maka tidak ada p rasional yang memenuhi
- $x_3 = p - \sqrt{2}$ dan $x_4 = q - 2\sqrt{502}$ untuk p dan q bilangan rasional.
  $x_1x_2x_3x_4 = d$ yang merupakan bilangan rasional.
  $\left(\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{502}\right)\left(p - \sqrt{2}\right)\left(q - 2\sqrt{502}\right)$ = bilangan rasional
  $4pq\sqrt{251} - 2008p\sqrt{2} - 4q\sqrt{502} + 4016$ = bilangan rasional
  Kesamaan di atas akan terpenuhi hanya jika p = q = 0 sehingga $x_3 = -\sqrt{2}$ dan $x_4 = -\sqrt{2008}$
  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2008})(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2008})$
  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 - 2)(x^2 - 2008) = x^4 - 2010x^2 + 4016$
  Maka a = 0, b = –2010, c = 0 dan d = 4016
  a + b + c + d = 0 – 2010 + 0 + 4016

$\therefore$ Nilai a + b + c + d adalah **2006**.

Alternatif 2 :

Jika $\sqrt{2}$ disubtitusikan ke persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ didapat

$(2a + c)\sqrt{2} = -(2b + d + 4)$

Karena a, b, c dan d rasional maka kesamaan hanya mungkin terjadi jika 2a + c = 0 ·········· (1)

Sehingga 2b + d + 4 = 0 ··············· (2)

Jika $\sqrt{2008} = 2\sqrt{502}$ disubtitusikan ke persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ didapat

$(2008a + c)\sqrt{2} = -(2008b + d + 4032064)$

Karena a, b, c dan d rasional maka kesamaan hanya mungkin terjadi jika 2008a + c = 0 ········· (3)

Sehingga 2008b + d + 4032064 = 0 ··············· (4)

Dari persamaan (1) dan (3) didapat a = 0 dan c = 0

Dari persamaan (2) dan (4) didapat b = –2010 dan d = 4016

a + b + c + d = 0 – 2010 + 0 + 4016 = 2006

$\therefore$ Nilai a + b + c + d adalah **2006**.

12. Misalkan [ABC] menyatakan luas ΔABC.

Berdasarkan dalil cosinus, cos $\angle$A = $\dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

Maka ctg $\angle$A = $\dfrac{\cos\angle A}{\sin\angle A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle A} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4[ABC]}$

Dengan cara yang sama didapat :

ctg ∠B = $\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{4[ABC]}$

ctg ∠C = $\frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{4[ABC]}$

ctg ∠A + ctg ∠B + ctg ∠C = $\frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{4[ABC]} = \frac{16}{4}$

∴ ctg ∠A + ctg ∠B + ctg ∠C = **4.**

13. $f(x) = x^2 + 4$
$f(xy) = x^2y^2 + 4$
$f(y - x) = (y - x)^2 + 4$
$f(y + x) = (y + x)^2 + 4$
$f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$
$x^2y^2 + 4 + (y - x)^2 + 4 = (y + x)^2 + 4$
$x^2y^2 + y^2 + x^2 - 2xy + 4 = y^2 + x^2 + 2xy$
$x^2y^2 + 4 = 4xy$
$(xy - 2)^2 = 0$
Jadi xy = 2
Dengan ketaksamaan AM-GM maka
$x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2}$
Dengan memanfaatkan bilangan kuadrat tak mungkin negatif
$$x + y = x + \frac{2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2}$$
tanda kesamaan terjadi jika $x = y = \sqrt{2}$
∴ Nilai minimum dari x + y adalah $2\sqrt{2}$

14. Jelas bahwa n harus genap.
Misalkan $n = 2^y \cdot p_1^{x1} \cdot p_2^{x2} \cdot \cdots \cdot p_k^{xk}$ dengan p_i untuk i = 1, 2, ⋯, k semuanya bilangan prima ganjil dan x_i untuk i = i, 2, ⋯, k semuanya bilangan bulat tak negatif serta y asli.
Karena salah satu faktor dari n adalah 2 maka semua bilangan genap ≤ n tidak akan relatif prima dengan n. Banyaknya bilangan genap ≤ n ada tepat sebanyak $\frac{n}{2}$ dan banyaknya bilangan ganjil kurang dari n juga ada sebanyak $\frac{n}{2}$.
Tetapi untuk semua 1 < p_i < n dengan i = 1, 2, ⋯, k juga merupakan faktor dari n yang mengakibatkan semua 1 < p_i < n dengan i = 1, 2, ⋯, k tidak akan relatif prima dengan n.
Maka agar terpenuhi ada tepat $\frac{n}{2}$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n maka n tidak boleh memiliki faktor ganjil selain 1. Jadi p_i = 1 untuk semua i = 1, 2, ⋯, k.
Maka n = 2^y untuk suatu bilangan asli y.

Karena n < 2008 maka 2^y < 2008. Jadi y ≤ 10.
Maka nilai n yang memenuhi adalah 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.
∴ Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi ada **10**.

15. Misalkan f(x) berderajat n maka f(x^2) akan berderajat 2n.
x^3f(x) akan berderajat n + 3.
- Jika n > 3 maka 2n > n + 3 sehingga f(x^2) − x^3f(x) akan berderajat 2n > 6. Jadi, tanda kesamaan tidak mungkin terjadi.
- Jika n = 3 maka f(x^2) dan x^3f(x) akan berderajat sama yaitu 6 sehingga masih dimungkinkan f(x^2) − x^3f(x) akan berderajat 3.
  Jika f(x) = x^3 − 2 maka f(x^2) − x^3f(x) = (x^6 − 2) − x^3(x^3 − 2) = 2(x^3 − 1) yang memenuhi.
- Jika n < 3 maka 2n < n + 3 sehingga f(x^2) − x^3f(x) akan berderajat n + 3. Karena ruas kanan berderajat 3 maka n = 0.

∴ Derajat f(x) adalah **3**.

16. Banyaknya kemungkinan tanggal lahir dari 20 orang = 365^{20}.
Banyaknya kemungkinan dari 20 orang tersebut tidak ada satupun yang berulang tahun di hari yang sama = 365 · 364 · 363 · ··· · 346 = ${}_{365}P_{20}$.
Peluang yang ditanyakan pada soal dapat dicari dengan cara komplemen.
Peluang dari 20 orang yang dipilih secara acak ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah

$$1 - \frac{{}_{365}P_{20}}{365^{20}}$$

∴ Peluang dari soal = $1 - \frac{{}_{365}P_{20}}{365^{20}}$

17. Ada dua kemungkinan jumlah ketiga bilangan tersebut genap
- Ketiga bilangan tersebut semuanya genap

  Peluang = $\frac{{}_{1004}C_3}{{}_{2008}C_3} = \frac{\frac{1004 \cdot 1003 \cdot 1002}{6}}{\frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{6}} = \frac{167}{1338}$
- Ada satu bilangan genap dan dua lainnya ganjil

  $\frac{{}_{1004}C_1 \cdot {}_{1004}C_2}{{}_{2008}C_3} = \frac{1004 \cdot \frac{1004 \cdot 1003}{2}}{\frac{2008 \cdot 2007 \cdot 2006}{6}} = \frac{502}{1338}$

Peluang jumlah ketiga bilangan tersebut genap = $\frac{167}{1338} + \frac{502}{1338}$

∴ Peluang jumlah ketiga bilangan tersebut genap = $\frac{1}{2}$

18. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$10 = 4 + |B| - |A \cap B|$

$|B| - |A \cap B| = 6$

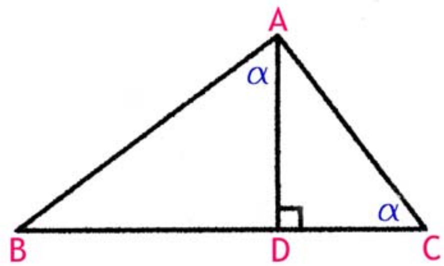
Jelas bahwa $0 \le |A \cap B| \le |A|$ sehingga $0 \le |A \cap B| \le 4$.

Jadi $6 \le |B| \le 10$

Karena $|B|$ bulat tak negatif maka $|B|$ = 6, 7, 8, 9 atau 10.

$\therefore$ $|B|$ = **6, 7, 8, 9 atau 10**.

19. Misalkan $\angle DAB = \angle ACD = \alpha$



ctg $\alpha = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$

$\frac{6}{8} = \frac{CD}{6}$ sehingga CD = $\frac{9}{2}$

Luas segitiga ABC = ½ · (BD + CD) · AD = $\frac{75}{2}$

$\therefore$ Luas segitiga ABC = $\frac{75}{2}$

20. Dengan binom Newton didapat

$$4^{1004} = (3+1)^{1004} = \binom{1004}{0}3^0 + \binom{1004}{1}3^1 + \binom{1004}{2}3^2 + \cdots + \binom{1004}{1004}3^{1004} = \sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$$

$\therefore$ $\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$ = $\mathbf{2^{2008}}$.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2008

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Bagian Kedua

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

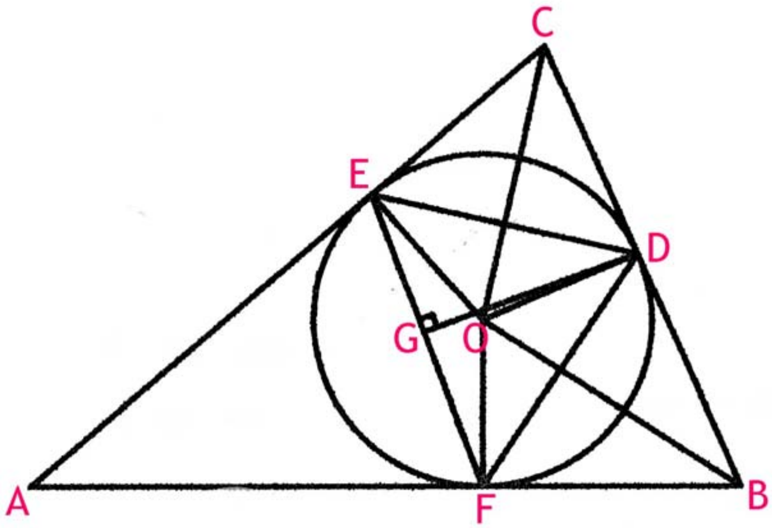
BAGIAN KEDUA

1. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 40$
   $x + x^2 + \cdots + x^n = 39$
   $x(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 39$
   Karena x dan n bilangan asli maka x merupakan faktor dari 39
   Nilai x yang mungkin memenuhi adalah 1, 3, 13 atau 39.
   - Jika x = 1 maka $1 + 1^2 + \cdots + 1^n = 39$.
     Jadi, n = 39
   - Jika x = 3
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 40$
     Untuk x = 3 maka $3^{n+1} - 1 = 80$
     Nilai n yang memenuhi adalah n = 3.
   - Jika x = 13
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 40$
     Untuk x = 13 maka $13^{n+1} - 1 = 480$
     $13^{n+1} = 481 = 13 \cdot 37$
     Karena 37 tidak habis dibagi 13 maka tidak ada n asli yang memenuhi.
   - Jika x = 39
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 40$
     Untuk x = 39 maka $39^{n+1} - 1 = 1520$
     $39^{n+1} = 1521 = 39^2$
     Nilai n yang memenuhi adalah n = 1.

   $\therefore$ Semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi adalah **(1, 39), (3, 3), (39, 1)**

2. Karena P(x) = 0 mempunyai 2008 selesaian real maka berlaku
   $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{2008})$ dengan x_i semua real untuk i = 1, 2, ⋯, 2008.
   Karena $P(2008) \leq 1$ maka tidak mungkin semua $x_i < 2007$.
   $P(Q(x)) = P(x^2 + 2x + 2008)$
   $P(Q(x)) = (x^2 + 2x + 2008 - x_1)(x^2 + 2x + 2008 - x_2)\cdots(x^2 + 2x + 2008 - x_{2008}) = 0$
   Diskriminan $x^2 + 2x + 2008 - x_i$ adalah Diskriminan = $4 - 4(2008 - x_i)$
   Diskriminan = $4(x_i - 2007)$ untuk i = 1, 2, ⋯, 2008.
   Karena tidak semua $x_i < 2007$ maka akan terdapat x_k sehingga Diskriminan = $4(x_i - 2007) \geq 0$.
   Karena diskriminan ≥ 0 maka terbukti ada sedikitnya 2 bilangan x real yang memenuhi P(Q(x))= 0
   $\therefore$ **Terbukti bahwa persamaan P(Q(x)) = 0 mempunyai selesaian real.**

3. Misalkan O adalah pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Maka garis bagi dari B dan C akan melalui titik O.



Karena CO dan BO adalah garis bagi maka ∠ECO = ∠DCO dan ∠DBO = ∠FBO
Misalkan ∠ECO = ∠DCO = γ ·········· (1) dan ∠DBO = ∠FBO = β ·········· (2)
Jelas bahwa ∠CEO = ∠CDO = 90^o sehingga ∠EOD = $180^o - 2\gamma$ ························ (3)
Jelas juga bahwa ∠BDO = ∠BFO = 90^o sehingga ∠DOF = $180^o - 2\beta$ ························ (4)
Maka ∠EOF = 360^o – ∠EOD – DOF = $2(\gamma + \beta)$ ························ (5)
Segitiga EOF adalah segitiga sama kaki sehingga ∠OEF = ∠OFE = $90^o - (\gamma + \beta)$ ························ (6)

Lingkaran dalam menyinggung segitiga ABC di D, E dan F sehingga CE = CD dan BD = BF.
Karena CE = CD dan OE = OD maka segiempat CEOD adalah layang-layang. Jadi, CO ⊥ ED.
ED = 2 CE sin γ ······················ (7)
∠CED = $90^o - \gamma$ sehingga ∠OED = γ
∠GED = ∠OEF + ∠OED = $(90^o - (\gamma + \beta)) + (\gamma) = 90^o - \beta$ ··························· (8)
EG = ED cos ∠GED = (2 CE sin γ)(cos ($90^o - \beta$)

$$\frac{EG}{CE} = 2\sin\gamma\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

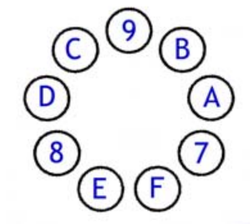
Karena BD = BF dan OD = OF maka segiempat BDOF adalah layang-layang. Jadi, BO ⊥ DF.
DF = 2 BF sin β ······················ (10)
∠BFD = $90^o - \beta$ sehingga ∠OFD = β
∠GFD = ∠OFE + ∠OFD = $(90^o - (\gamma + \beta)) + (\beta) = 90^o - \gamma$ ··························· (11)
FG = DF cos ∠GFD = (2 BF sin β)(cos ($90^o - \gamma$)

$$\frac{FG}{BF} = 2\sin\gamma\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

Dari persamaan (9) dan (12) dapat disimpulkan bahwa $\frac{FG}{BF} = \frac{EG}{CE}$ sehingga $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$.

$\therefore$ **Terbukti bahwa** $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$

4. Alternatif 1 :
Andaikan bahwa tidak ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.
Jika terdapat tiga bilangan dengan dua diantaranya adalah 7, 8 atau 9 maka ketiga bilangan tersebut akan memiliki jumlah lebih dari 15. Maka haruslah terdapat dua bilangan di antara 7, 8 dan 9. Kemungkinan susunan hanya ada 1, yaitu :



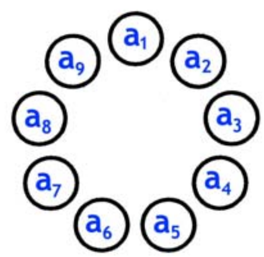
Rata-rata enam bilangan 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 adalah 3,5.
Maka maks (A + B, C + D, E + F) ≥ 7.

- Jika maks (A + B, C + D, E + F) = 7 maka A + B = C + D = E + F = 7
  Maka 9 jika dipasangkan dengan salah satu dari pasangan (A, B), (C, D) atau (E, F) akan membentuk tiga bilangan yang jumlahnya lebih dari 15. Kontradiksi dengan anggapan semula.
- Jika maks (A + B, C + D, E + F) > 7 maka maks (A + B, C + D, E + F) ≥ 8

Pasangan bilangan yang memiliki nilai maks tersebut pasti akan berdekatan dengan 8 atau 9 yang penjumlahan ketiga bilangan tersebut akan bernilai lebih besar dari 15. Kontradiksi dengan anggapan semula.

∴ **Terbukti bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.**

Alternatif 2 :
Misalkan $a_i \in \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, 9$.
Ke-9 bilangan a_i, $i = 1, 2 \cdots, 9$ disusun sebagai berikut.



Misalkan
$S_1 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_2 = a_2 + a_3 + a_4$
⋮
$S_9 = a_9 + a_1 + a_2$
Dengan demikian
$S_1 + S_2 + \cdots + S_9 = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_9) = 3 \cdot 45 = 135$
Karena $a_1 \neq a_4$ maka $S_1 \neq S_2$.
Andaikan tidak ada 3 bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15, yaitu $S_i \leq 15$ untuk semua $i = 1, 2, \cdots, 9$.
Karena $S_1 \neq S_2$ maka S_1 atau S_2 kurang dari 15. Akibatnya
$S_1 + S_2 + \cdots + S_9 < 9 \times 15 = 135$. Kontradiksi.

∴ **Terbukti bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.**

5. Sebuah bilangan akan habis dibagi 3 apabila penjumlahan angka-angkanya habis dibagi 3.
Ada 4 angka/digit yang habis dibagi 3 dan masing-masing ada 3 angka/digit yang bersisa 1 atau 2 jika dibagi 3.
Misalkan bilangan palindrom tersebut adalah abcba. Penjumlahan angka = 2(a + b) + c.
Karena angka pertama tidak boleh 0 maka banyaknya cara memilih digit a $\equiv$ 0 (mod 3) hanya ada 3 kemungkinan.
   - Jika c $\equiv$ 0 (mod 3)
   Maka 2(a + b) $\equiv$ 0 (mod 3) sehingga a + b $\equiv$ 0 (mod 3)
   Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah a $\equiv$ 0 (mod 3) dan b $\equiv$ 0 (mod 3), a $\equiv$ 1 (mod 3) dan b $\equiv$ 2 (mod 3) atau a $\equiv$ 2 (mod 3) dan b $\equiv$ 1 (mod 3)
   Banyaknya cara memilih digit c adalah 4.
   Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 0 (mod 3) = $4 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3)$
   Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 0 (mod 3) = 120.
   - Jika c $\equiv$ 1 (mod 3)
   Maka 2(a + b) $\equiv$ 2 (mod 3) sehingga a + b $\equiv$ 1 (mod 3)
   Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah a $\equiv$ 0 (mod 3) dan b $\equiv$ 1 (mod 3), a $\equiv$ 1 (mod 3) dan b $\equiv$ 0 (mod 3) atau a $\equiv$ 2 (mod 3) dan b $\equiv$ 2 (mod 3)
   Banyaknya cara memilih digit c adalah 3.
   Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 1 (mod 3) = $3 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3)$
   Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 1 (mod 3) = 90.
   - Jika c $\equiv$ 2 (mod 3)
   Maka 2(a + b) $\equiv$ 1 (mod 3) sehingga a + b $\equiv$ 2 (mod 3)
   Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah a $\equiv$ 0 (mod 3) dan b $\equiv$ 2 (mod 3), a $\equiv$ 1 (mod 3) dan b $\equiv$ 1 (mod 3) atau a $\equiv$ 2 (mod 3) dan b $\equiv$ 0 (mod 3)
   Banyaknya cara memilih digit c adalah 3.
   Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 2 (mod 3) = $3 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4)$
   Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika c $\equiv$ 2 (mod 3) = 90.

Banyaknya bilangan palindrom yang memenuhi adalah 120 + 90 + 90 = 300.
$\therefore$ Banyaknya bilangan palindrom 5-angka yang habis dibagi 3 adalah **300**.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008

MAKASSAR (SULAWESI SELATAN), 8 – 14 AGUSTUS 2008

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 4 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008
8 – 14 AGUSTUS 2008
MAKASSAR, SULAWESI SELATAN

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 4 JAM

1. Diberikan segitiga ABC. Titik-titik D, E, dan F di luar segitiga ABC sedemikian sehingga segitiga ABD, segitiga BCE, dan segitiga CAF adalah segitiga sama sisi. Buktikan bahwa ketiga lingkaran luar segitiga tersebut berpotongan di satu titik.

2. Buktikan bahwa untuk x dan y bilangan real positif, berlaku
$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}\geq\frac{2}{x+y+2}$$

3. Carilah semua bilangan asli yang dapat dinyatakan dalam bentuk
$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$
untuk suatu a, b, dan c bilangan asli dengan
FPB (a, b) = FPB (b, c) = FPB (c, a) = 1

4. Misalkan A = {1, 2, ···, 2008}
   (a) Tentukan cacah subhimpunan dari A yang hasilkali semua anggotanya habis dibagi 7.
   (b) Misalkan N(i) menyatakan cacah subhimpunan dari A yang jumlah semua anggotanya bersisa I jika dibagi 7. Buktikan bahwa
$$\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i)=0$$

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008

MAKASSAR (SULAWESI SELATAN), 8 – 14 AGUSTUS 2008

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 4 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2008

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008
8 – 14 AGUSTUS 2008
MAKASSAR, SULAWESI SELATAN

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 4 JAM

5. Misalkan m, $n > 1$ bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga n membagi $4^m - 1$ dan 2^m membagi $n - 1$. Haruskah $n = 2^m + 1$? Jelaskan.

6. Ada 21 orang berhubungan secara rahasia dengan menggunakan frekuensi gelombang radio yang berbeda. Ada pasangan dua orang yang dapat berhubungan, mungkin ada yang tidak dapat. Setiap pasang yang berhubungan hanya menggunakan satu frekuensi tertentu yang berbeda dengan frekuensi yang digunakan pasangan lain. Setiap tiga orang selalu ada dua orang di antaranya yang tidak dapat berhubungan. Tentukan banyak maksimum frekuensi berbeda yang diperlukan dan jelaskan.

7. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c. Garis-garis singgung lingkaran dalam segitiga ABC yang sejajar dengan sisi-sisi segitiga ABC membentuk tiga segitiga kecil. Pada masing-masing segitiga kecil dibuat lingkaran dalam. Buktikan bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah
$$\frac{\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$$

8. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ yang memenuhi
$$f(mn) + f(m + n) = f(m)f(n) + 1$$
untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2009

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2008

MAKASSAR (SULAWESI SELATAN), 8 - 14 AGUSTUS 2008

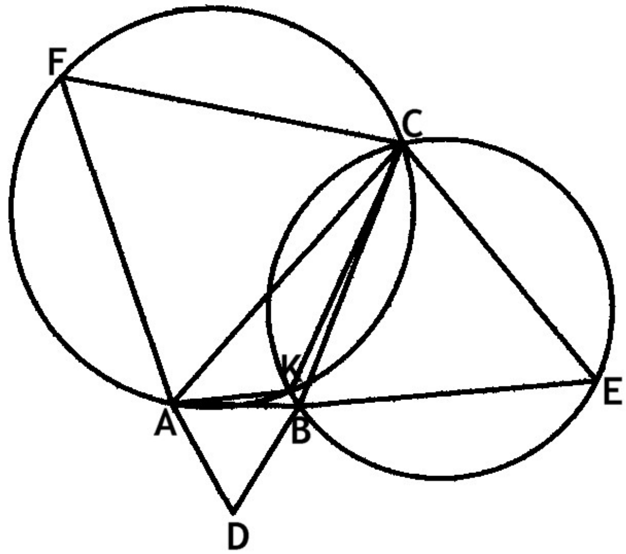
Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Misalkan lingkaran luar ΔACF dan lingkaran luar ΔBCE berpotongan di titik C dan K.



Karena terletak pada satu lingkaran, segi empat AKCF adalah segiempat tali busur.
Maka $\angle$AKC = 180^o − $\angle$AFC = 120^o.
Karena terletak pada satu lingkaran, segi empat BKCE adalah segiempat tali busur.
Maka $\angle$BKC = 180^o − $\angle$BEC = 120^o.
Jadi, $\angle$AKB = 360^o − $\angle$AKC − $\angle$BKC = 120^o.
Karena $\angle$AKB + $\angle$ADB = 120^o + 60^o = 180^o maka segiempat BKAD adalah segiempat talibusur.
Jadi ada sebuah lingkaran yang melalui titik D, B, K dan A.

Maka lingkaran luar ΔACF, lingkaran luar ΔBCE dan lingkaran luar ΔABD melalui titik K.
∴ Terbukti bahwa ketiga lingkaran luar segitiga ACF, BCE dan ABD berpotongan di satu titik

2. Alternatif 1 :
Dengan AM-GM maka

$$x+1 \geq 2\sqrt{x}$$

$$y+1 \geq 2\sqrt{y}$$

$$x+y+2 = \frac{x+y+2+(x+1)+(y+1)}{2} \geq \frac{x+y+2+2\sqrt{x}+2\sqrt{y}}{2} = \frac{(1+\sqrt{x})^2+(1+\sqrt{y})^2}{2}$$

Dengan AM-HM maka

$$x+y+2 \geq \frac{(1+\sqrt{x})^2+(1+\sqrt{y})^2}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}+\frac{1}{(1+\sqrt{y})^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}+\frac{1}{(1+\sqrt{y})^2} \geq \frac{2}{x+y+2} \quad \text{(terbukti)}$$

Alternatif 2 :

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat

$x + 1 \geq 2\sqrt{x}$ .... (1)

Tanda kesamaan terjadi jika x = 1

$\left(1 + \sqrt{x}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{x} + x \leq 2(x + 1)$ maka

$\frac{1}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2} \geq \frac{1}{2(x + 1)}$ .... (2)

Dengan cara yang sama didapat

$\frac{1}{\left(1 + \sqrt{y}\right)^2} \geq \frac{1}{2(y + 1)}$ .... (3) maka

$$\frac{1}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \sqrt{y}\right)^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1}\right)$$

Dengan ketaksamaan AM-HM didapat

$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} \geq \frac{4}{x + 1 + y + 1} = \frac{4}{x + y + 2}$ maka

$\therefore \quad \frac{1}{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \sqrt{y}\right)^2} \geq \frac{2}{x + y + 2}$ (terbukti)

3. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan a = maks (a, b, c)

Misalkan juga $\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b}$ = k untuk suatu bilangan asli k.

$\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} = \frac{ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c)}{abc}$ = k untuk suatu bilangan asli k.

Karena $c \mid ac(a + c) + bc(b + c)$ maka $c \mid ab(a + b)$

Karena FPB(a, c) = FPB(b, c) = 1 maka $c \mid (a + b)$

Dengan cara yang sama didapat

$b \mid (a + c)$

$a \mid (b + c)$

Karena $b \leq a$ dan $c \leq a$ maka $a \leq b + c \leq 2a$

- Kasus 1, b + c = a

  Karena $b \mid (a + c)$ maka $b \mid 2a - b$

  Jadi $b \mid 2a$

  Karena FPB(a, b) = 1 maka $b \mid 2$.

  Jadi, b = 1 atau 2

  Karena $c \mid (a + b)$ maka $c \mid 2a - c$

  Jadi $c \mid 2a$

  Karena FPB(a, c) = 1 maka $c \mid 2$.

  Jadi, c = 1 atau 2

- Jika b = 1 dan c = 1 maka a = 2

  $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=7$

- Jika b = 1 dan c = 2 atau b = 2 dan c = 1 maka a = 3

  $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=8$

- Jika b = 2 dan c = 2 tidak memenuhi bahwa FPB(b, c) = 1

• Kasus 2, b + c = 2a

Kesamaan hanya terjadi jika a = b dan a = c.

Karena FPB(a, b) = FPB(a, c) = FPB(b, c) = 1 maka a = b = c = 1

$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=6$

∴ Nilai dari $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ adalah **6, 7 atau 8**.

4. A = {1, 2, ···, 2008}

(a) Karena cacah anggota A sebanyak 2008 maka cacah subhimpunan A = 2^{2008}.

Jika suatu himpunan memiliki anggota yang merupakan kelipatan 7 maka hasil kali semua anggotanya merupakan kelipatan 7. Jadi agar hasil kali semua anggota dari suatu himpunan tidak habis dibagi 7 maka anggotanya tidak ada yang merupakan kelipatan 7.

Banyaknya anggota A yang merupakan kelipatan 7 ada 286, yaitu 7, 14, 28, ···, 2002.

Jadi cacah subhimpunan dari A yang hasilkali anggotanya habis dibagi 7 adalah $2^{2008} - 2^{2008-286}$

∴ Cacah subhimpunan dari A yang hasilkali anggotanya habis dibagi 7 adalah $\mathbf{2^{2008} - 2^{1722}}$.

(b) Misalkan $x_i \in$ A maka 2009 – $x_i \in$ A.

Akan dibuktikan bahwa jika ada sebanyak k bilangan yang merupakan anggota A yang memenuhi jumlah k bilangan tersebut bersisa i jika dibagi 7 maka ada sebanyak k bilangan yang juga merupakan anggota A dan memenuhi jumlah k bilangan tersebut akan bersisa 7 – i jika dibagi 7.

Misalkan ada sebanyak k bilangan yang merupakan anggota A dan memenuhi

$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 7p + i$ untuk suatu bilangan asli p.

$(2009 - x_1) + x_1 + (2009 - x_2) + x_2 + \cdots + (2009 - x_k) + x_k = 2009k = 7m$ untuk suatu m ∈ asli.

$(2009 - x_1) + (2009 - x_2) + \cdots + (2009 - x_k) = 7n + 7 - i$ untuk suatu bilangan asli n.

Jadi ada k bilangan 2009 – x_i untuk i = 1, 2, ···, k yang memenuhi jumlah k bilangan tersebut bersisa 7 – i jika dibagi 7.

Terbukti bahwa N(i) = N(7 – i)

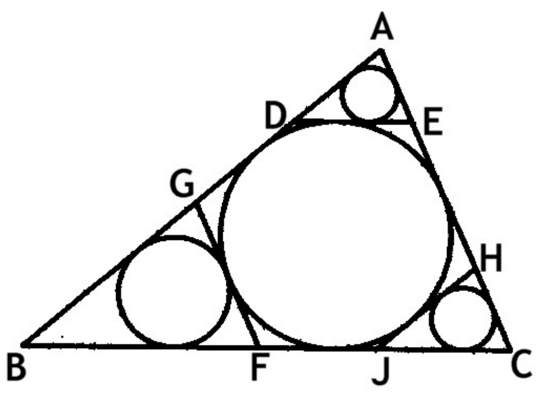
$$\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i) = N(0) - N(1) + N(2) - N(3) + N(4) - N(5) + N(6) - N(7) = 0$$

∴ Terbukti bahwa $\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i) = 0$

5. Karena $2^m \mid n - 1$ maka $n = k \cdot 2^m + 1$ untuk suatu bilangan asli k.
   Karena $n \mid 4^m - 1$ maka $n \le 4^m - 1$
   $k \cdot 2^m + 1 \le 4^m - 1 < 4^m + 1$
   Maka $k < 2^m$ .... (1)
   Karena $n \mid 4^m - 1$ maka $n \mid (4^m - 1) \cdot k^2 = (k \cdot 2^m)^2 - k^2$.
   Sehingga $n \mid (n - 1)^2 - k^2 = n^2 - 2n + 1 - k^2$.
   Karena $n \mid n^2 - 2n$ maka $n \mid k^2 - 1$. Jadi, $n \le k^2 - 1$ untuk $k \ne 1$ .... (2)
   $n \le k^2 - 1 < k^2 < k \cdot 2^m < k \cdot 2^m + 1 = n$ kontradiksi untuk $k \ne 1$.
   Jika k = 1 maka $n = 2^m + 1$ yang memenuhi $2^m \mid n - 1$ dan $n \mid 4^m - 1$.
   $\therefore$ Jadi, **haruslah $n = 2^m + 1$**.

6. Misalkan terdapat 3 orang di antaranya , yaitu A, B dan C dan memiliki hubungan tepat ada dua frekuensi di antara mereka dan yang berhubungan adalah AB dan AC.
   Tentunya kita dapat membagi ketiga orang ini menjadi dua kelompok, misalkan A kelompok merah serta B dan C pada kelompok putih sehingga ketiganya hanya berhubungan jika berbeda kelompok.
   Misalkan juga D berhubungan dengan A maka tentunya A tidak dapat berhubungan C sehingga A dapat dimasukkan ke dalam kelompok yang berbeda dengan A.
   Misalkan juga E berhubungan dengan C maka tentunya E dapat berhubungan dengan B tetapi tidak dapat berhubungan dengan A sehingga E dapat dimasukkan ke dalam kelompok yang sama dengan A.
   Jadi, kita dapat membagi 21 orang tersebut ke dalam dua kelompok sehingga yang dapat berhubungan hanya jika berbeda kelompok.
   Misalkan banyaknya anggota masing-masing kelompok adalah k dan 21 − k.
   Banyaknya frekuensi yang mungkin = $k(21 - k) = \frac{21^2}{4} - \left(k - \frac{21}{2}\right)^2$
   Karena k bilangan asli Maka banyaknya frekuensi akan maksimal adalah jika k = 10 atau 11.
   $\therefore$ Banyaknya maksimum frekuensi berbeda yang diperlukan = $10 \cdot 11$ = **110**.

7. Perhatikan gambar !



   Karena DE sejajar BC maka ΔADE sebangun dengan ΔABC.

Misalkan jari-jari lingkaran dalam ΔABC = r, jari-jari lingkaran dalam ΔADE = r_1, jari-jari lingkaran dalam ΔBFG = r_2 dan jari-jari lingkaran dalam ΔCHJ = r_3.
Misalkan juga jarak dari A ke BC = t_A dan jarak dari A ke DE = t_1.
Misalkan s = ½ (a + b + c).

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}r(a+b+c)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$$r=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{2}t_A a=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$t_A=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2a}$$

Karena jarak dari A ke DE = t_1 maka $t_1 = t_A - 2r$

Karena ΔADE sebangun dengan ΔABC maka perbandingan sisi juga merupakan perbandingan garis tinggi kedua segitiga.

$$\frac{AD}{c}=\frac{AE}{b}=\frac{DE}{a}=\frac{r_1}{r}=\frac{t_1}{t_A}=\frac{t_A-2r}{t_A}$$

Dengan rumus luas ΔABC maka $\frac{r}{t_A}=\frac{a}{a+b+c}$ sehingga $\frac{r_1}{r}=1-\frac{2a}{a+b+c}=\frac{b+c-a}{a+b+c}$

$$r_1=\frac{b+c-a}{a+b+c}r$$

Dengan cara yang sama didapat

$$r_2=\frac{a+c-b}{a+b+c}r$$

$$r_3=\frac{a+b-c}{a+b+c}r$$

Misalkan jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah L.

$$L=\pi\left(r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2\right)=\pi\left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4(a+b+c)}\right)\left(\frac{(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2}{(a+b+c)^2}\right)$$

Misalkan P = $(a + b + c)^2 + (b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2$

P = $(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)$

P = $4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

$$L=\pi\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4(a+b+c)^3}\left(4a^2+4b^2+4c^2\right)$$

$$L=\frac{\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$$

∴ Terbukti bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah $\frac{\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$

8. Jika m = n = 1 maka f(1) + f(2) = f(1)f(1) + 1 .... (1)
Jika m = 1 dan n = 2 maka f(2) + f(3) = f(1)f(2) + 1 .... (2)
Jika m = n = 2 maka 2f(4) = f(2)f(2) + 1 .... (3)
Jika m = 1 dan n = 3 maka f(3) + f(4) = f(1)f(3) + 1 .... (4)
Misalkan f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c dan f(4) = d serta subtitusikan persamaan (2) dan (3) ke (4).

$$(ab+1-b)+\left(\frac{b^2+1}{2}\right)=a(ab+1-b)+1$$

$2ab + 2 - 2b + b^2 + 1 = 2a^2b + 2a - 2ab + 2$
$2a^2b - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1 = 0$ .... (5)
Dari persamaan (1) didapat
$a + b = a^2 + 1$ .... (6)
$2a^2(a^2 - a + 1) - (a^2 - a + 1)^2 - 4a(a^2 - a + 1) + 2a + 2(a^2 - a + 1) - 1 = 0$
$(2a^4 - 2a^3 + 2a^2) - (a^4 + a^2 + 1 - 2a^3 + 2a^2 - 2a) - (4a^3 - 4a^2 + 4a) + 2a + (2a^2 - 2a + 2) - 1 = 0$
$(2a^4 - 2a^3 + 2a^2) - (a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1) - (4a^3 - 4a^2 + 4a) + 2a + (2a^2 - 2a + 2) - 1 = 0$
$a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 2a = 0$
$a(a - 1)^2(a - 2) = 0$
Karena f : N → N maka nilai f(1) yang mungkin memenuhi hanya 1 atau 2.

- Jika f(1) = 1
  Untuk n = 1 maka f(m) + f(m + 1) = f(m)f(1) + 1
  Karena f(1) = 1 maka f(m + 1) = 1
  Jadi, f(x) = 1 untuk x ∈ N.
  Jika f(x) = 1 untuk x ∈ N maka f(mn) + f(m + n) = 2 dan f(m)f(n) + 1 = 2. Memenuhi.
- Jika f(1) = 2
  Untuk n = 1 maka f(m) + f(m + 1) = f(m)f(1) + 1
  Karena f(1) = 2 maka f(m + 1) = f(m) + 1
  Jika m = 1 maka f(2) = f(1) + 1

  Jika m = 2 maka f(3) = f(2) + 1
  Jika m = 3 maka f(4) = f(3) + 1
  ⋮
  Jika m = x − 1 untuk x ∈ N maka f(x) = f(x − 1) + 1
  Jumlahkan seluruh persamaan didapat :
  f(x) = f(1) + x − 1
  Karena f(1) = 2 maka f(x) = x + 1
  Jadi, f(x) = x + 1 untuk x ∈ N.
  Jika f(x) = x + 1 untuk x ∈ N maka f(mn) + f(m + n) = mn + 1 + m + n + 1 = (m + 1)(n + 1) + 1 dan f(m)f(n) + 1 = (m + 1)(n + 1) + 1. Memenuhi.

∴ Semua fungsi f : N → N yang memenuhi adalah f(x) = 1 dan f(x) = x + 1 untuk x ∈ N.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2009
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2010

Bidang Matematika

Waktu : 2 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2009

OLIMPIADE MATEMATIKA NASIONAL
SELEKSI TINGKAT KOTA/KABUPATEN
TAHUN 2009

Isikan hanya jawaban saja pada lembar jawaban yang disediakan.

1. Banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 - y^2$ untuk suatu bilangan ganjil x dan y adalah ·······

2. Bilangan bulat positif terkecil n dengan n > 2009 sehingga
$$\sqrt{\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n}}$$
merupakan bilangan bulat adalah ·········

3. Banyaknya solusi real x dari persamaan
$$3^{\left(1/2+\log_3\left(\cos x-\sin x\right)\right)} + 2^{\left(\log_2\left(\cos x+\sin x\right)\right)} = \sqrt{2}$$
adalah ····

4. Diberikan fungsi f : R → R sedemikian hingga
$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$
untuk semua $x \in R$. Nilai f(2009) adalah ······

5. Banyaknya segitiga siku-siku yang kelilingnya 2009 dan sisi-sisinya bilangan bulat serta jari-jari lingkaran dalamnya juga bilangan bulat adalah ·······

6. Nilai eksak dari $\binom{2009}{1} + \binom{2009}{2} + \cdots + \binom{2009}{1004}$ adalah ········

7. Jika tiga pasang suami isteri akan menempati tujuh kursi yang berjajar ke samping dengan syarat semua suami isteri duduk berdekatan dan tidak ada laki-laki dan perempuan bukan suami isteri yang duduk berdekatan, maka banyak caranya adalah ·······

8. Nilai dari $\sum_{k=1}^{2009} FPB(k,7)$ adalah ········

9. Banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) sehingga $x^4 + 4y^4$ merupakan bilangan prima adalah ·····

10. Bilangan real x sehingga pernyataan

$$x^2 = x \text{ jika dan hanya jika } x^3 = x$$

bernilai salah adalah ·····

11. Diketahui ABC adalah segitiga siku-siku di A dengan AB = 30 cm dan AC = 40 cm. Misalkan AD adalah garis tinggi dari dan E adalah titik tengah AD. Nilai dari BE + CE adalah ·······

12. Suatu turnamen diikuti 20 tim, dimana setiap tim bertemu satu kali dengan semua tim yang lain. Kemenangan memperoleh poin 1, sedangkan kekalahan 0. Pada klasemen akhir, 3 tim teratas memperoleh poin yang sama, sedangkan 17 tim yang lain memperoleh poin yang berbeda-beda. Jumlah semua bilangan yang tidak muncul pada poin yang dimiliki suatu tim pada klasemen akhir adalah ········

13. Titik E terletak di dalam persegi ABCD sedemikian rupa sehingga ABE adalah segitiga sama sisi. Jika panjang AB = $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ dan F titik potong antara diagonal BD dengan segmen garis AE, maka luas segitiga ABF sama dengan ······

14. Misalkan f(x) = $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin y+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos y$. Nilai maksimum untuk $(f(y))^2$ dimana y bilangan real adalah ······

15. Diberikan persegi ABCD dengan panjang sisi 10. Misalkan E pada AB dan F pada BD dengan AE = FB = 5. Misalkan P adalah titik potong CE dan AF. Luas DFPC adalah ·········

16. Jika $x_{k+1} = x_k + \dfrac{1}{2}$ untuk k = 1, 2, ··· dan $x_1 = 1$ maka $x_1 + x_2 + \cdots + x_{400}$ = ·······

17. Diberikan segitiga ABC tumpul ($\angle ABC > 90^o$), AD dan AE membagi sudut BAC sama besar. Panjang segmen garis BD, DE dan EC berturut-turut adalah 2, 3, dan 6. Panjang terpendek dari sisi segitiga ABC adalah ······

18. Jika $10^{999999999}$ dibagi oleh 7, maka sisanya adalah ·········

19. Diketahui A adalah himpunan semua bilangan asli yang habis dibagi 3, tidak habis dibagi 5, dan tidak lebih dari 100. Banyaknya fungsi f dari himpunan semua bilangan real yang tidak nol ke dalam A yang memenuhi $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x - y\right)$ adalah ······

20. Delapan bilangan asli memiliki rata-rata 6,5. Empat dari delapan bilangan tersebut adalah 4, 5, 7, dan 8. Selisih antara bilangan terbesar dan terkecil adalah 10. Jika ke delapan bilangan diurutkan dari kecil ke besar, maka banyaknya susunan ada ········

.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2009

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Misalkan x = 2m + 1 dan y = 2n + 1
   $x^2 - y^2 = 4m(m + 1) - 4n(n + 1)$
   m(m + 1) dan n(n + 1) keduanya adalah bilangan genap maka $x^2 - y^2$ merupakan kelipatan 8.
   Selain itu, $8k = (2k + 1)^2 - (2k - 1)^2$ sehingga setiap bilangan kelipatan 8 dapat diubah menjadi selisih kuadrat dua bilangan ganjil.
   Maka banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 - y^2$ dengan x dan y adalah bilangan ganjil adalah $\frac{1000}{8} - 1$ = 124. Tanda –1 sebab 1000 tidak termasuk ke dalam bagian ini.
   ∴ Maka banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 - y^2$ dengan x dan y adalah bilangan ganjil adalah **124**.

2. $$\sqrt{\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n}} = \sqrt{n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$
   Agar $\sqrt{n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$ merupakan bilangan kuadrat maka haruslah n merupakan bilangan kuadrat sempurna.
   Bilangan kuadrat terdekat setelah 2009 adalah 45^2 = 2025.
   ∴ Nilai n > 2009 yang memenuhi $\sqrt{\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n}}$ merupakan bilangan kuadrat adalah **2025**.

3. $$3^{\left(\log_3 \sqrt{3}(\cos x - \sin x)\right)} + 2^{\left(\log_2 (\cos x + \sin x)\right)} = \sqrt{2}$$
   $$\sqrt{3}(\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) = \sqrt{2}$$
   $$\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x - \left(\sqrt{3}-1\right)\sin x = \sqrt{2}$$
   $$\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cos x - \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sin x = \frac{1}{2}$$
   sin 105° = $\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ sedangkan cos 105° = $-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$
   sin 105° cos x + cos 105° sin x = sin 30°
   sin (105° + x) = sin 30°
   105° + x = 30° + k · 360° atau 105° + x = 180° – 30° + k · 360°
   x = 285° + n · 360° atau x = 45° + k · 360°
   Untuk x = 45° + n · 360° akan menyebabkan cos x – sin x = 0 sehingga tidak memenuhi persyaratan bahwa cos x – sin x > 0. Maka :
   Tetapi saat x = 285° + n · 360° maka akan menyebabkan cos x > sin x yang menyebabkan terpenuhinya syarat cos x – sin x > 0.
   Karena ada tak berhingga nilai n yang mungkin maka banyaknya solusi real x yang memenuhi adalah tak berhingga.
   ∴ Jadi, banyaknya solusi real x yang memenuhi adalah **tak berhingga**.

4. $x^2f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$
   $k^2f(k) + f(1 - k) = 2k - k^4$ .... (1)
   $(1 - k)^2f(1 - k) + f(k) = 2(1 - k) - (1 - k)^4$ .... (2)
   Kalikan persamaan (1) dengan $(1 - k)^2$ lalu kurangkan dengan persamaan (2) didapat
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = 2k(k - 1)^2 - k^4(k - 1)^2 - 2(1 - k) + (k - 1)^4$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = 2k^3 - 4k^2 + 2k - k^4(k - 1)^2 - 2 + 2k + k^2(k - 1)^2 - 2k(k - 1)^2 + (k - 1)^2$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = 2k^3 - 4k^2 + 4k - k^4(k - 1)^2 - 2 + k^2(k - 1)^2 - 2k(k - 1)^2 + (k - 1)^2$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = 2k^3 - 4k^2 + 4k - k^4(k - 1)^2 - 2 + k^2(k - 1)^2 - 2k^3 + 4k^2 - 2k + k^2 - 2k + 1$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = k^2 - 1 - k^4(k - 1)^2 - 1 + k^2(k - 1)^2$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = (k^2(k - 1)^2 - 1)(1 - k^2)$
   $f(k) = 1 - k^2$
   $\therefore$ f(2009) = $\mathbf{1 - 2009^2}$.

5. Akan dibuktikan bahwa tidak ada segitiga siku-siku dengan sisi-sisinya bilangan bulat dan memenuhi bahwa kelilingnya merupakan bilangan ganjil.
   Alternatif 1 :
   Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b dan 2009 – a – b
   $a^2 + b^2 = (2009 - a - b)^2$
   $2ab - 4018a - 4018b + 2009^2 = 0$
   Karena $2ab - 4018a - 4018b$ genap sedangkan 2009^2 ganjil maka tidak ada bilangan bulat a dan b yang memenuhi $2ab - 4018a - 4018b + 2009^2 = 0$. Jadi tidak ada segitiga yang demikian.
   Alternatif 2 :
   Misalkan sisi-sisi siku-sikunya adalah a dan b sedangkan hipotenusa c.
   Karena 2009 ganjil maka sisi-sisi segitiga tersebut haruslah ketiga-tiganya ganjil atau tepat satu yang ganjil.
   - Jika ketiga-tiganya ganjil
     Karena $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$ maka tidak mungkin ada hipotenusa yang memenuhi.
   - Jika tepat satu yang ganjil
     Jika yang ganjil tersebut merupakan hipotenusa maka $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 4$ sehingga hipotenusa haruslah merupakan bilangan genap. Kontradiksi.
     Jika hipotenusa genap maka $a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod 4$ sehingga hipotenusa haruslah merupakan bilangan ganjil. Kontradiksi.

   Maka tidak ada segitiga siku-siku dengan sisi-sisinya bilangan bulat dan memenuhi bahwa kelilingnya sama dengan 2009.
   $\therefore$ Jadi, banyaknya segitiga yang memenuhi adalah **0**.

6. $\binom{2009}{k} = \binom{2009}{2009-k}$
   $$\binom{2009}{0} + \binom{2009}{1} + \cdots + \binom{2009}{2009} = 2^{2009}$$
   $$\binom{2009}{0} + \binom{2009}{1} + \cdots + \binom{2009}{1004} = \frac{2^{2009}}{2} = 2^{2008}$$

$$\binom{2009}{1}+\binom{2009}{2}+\cdots+\binom{2009}{1004}=2^{2008}-1$$

$\therefore$ Jadi, $\binom{2009}{1}+\binom{2009}{2}+\cdots+\binom{2009}{1004}=2^{2008}-1$

7. Misalkan penomoran kursi urut dari kiri ke kanan. Ada tiga bentuk susunan yang mungkin.
   - Susunannya berbentuk SIISSI atau ISSIIS
     Karena suami isteri harus berdekatan maka posisi kursi kosong haruslah kursi nomor 1, 3, 5 atau 7.
     Banyaknya susunan masing-masing bentuk tanpa memperhitungkan kursi kosong adalah 3!.
     Jadi, banyaknya susunan yang mungkin adalah 4 · 2 · 3! = 48.
   - Susunannya berbentuk SISIIS atau ISIISSI
     Karena tidak ada laki-laki dan perempuan yang bukan suami isteri yang duduk berdekatan serta suami isteri harus berdekatan maka posisi kursi kosong haruslah kursi nomor 3.
     Banyaknya susunan yang mungkin adalah 1 · 2 · 3! = 12
   - Susunannya berbentuk SIISIS atau ISSISI
     Bentuk di atas adalah percerminan bentuk kedua.
     Banyaknya susunan yang mungkin adalah 1 · 2 · 3! = 12

   Maka banyaknya susunan yang mungkin adalah = 48 + 12 + 12 = 72.

   $\therefore$ Maka banyaknya susunan yang mungkin adalah = **72.**

8. FPB (k, 7) = 1 jika k bukan merupakan kelipatan 7 sedangkan FPB (k, 7) = 7 jika k kelipatan 7.
   Bilangan asli dari 1 sampai 2009 yang habis dibagi 7 banyaknya ada $\lfloor 2009/7 \rfloor$ = 287.
   Bilangan asli dari 1 sampai 2009 yang tidak habis dibagi 7 banyaknya ada 2009 – 287 = 1722

   $\sum_{k=1}^{2009} FPB(k,7) = 287\cdot 7 + 1722\cdot 1$ = 3731

   $\therefore$ $\sum_{k=1}^{2009} FPB(k,7)$ = **3731**

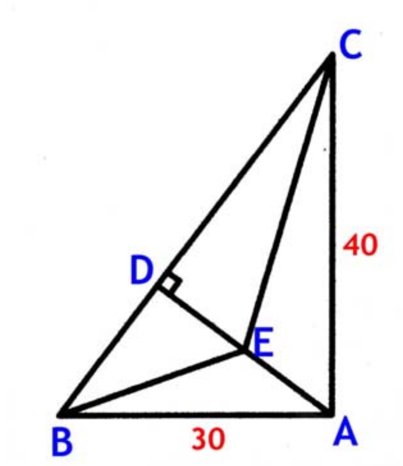
9. $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$
   $x^4 + 4y^4 = ((x - y)^2 + y^2)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$
   Suku kedua persamaan di atas selalu lebih dari satu. Agar $x^4 + 4y^4$ prima maka $(x - y)^2 + y^2 = 1$ yang terpenuhi hanya jika x = y dan y = 1.
   Maka pasangan (x, y) yang memenuhi hanya (1, 1)

   $\therefore$ Banyaknya pasangan (x, y) bilangan asli sehingga $x^4 + 4y^4$ adalah bilangan prima ada **1**.

10. Agar bernilai salah maka $x^2 = x$ benar dan $x^3 = x$ salah atau $x^2 = x$ salah dan $x^3 = x$ benar.
    Jika $x^2 = x$ benar maka nilai x yang memenuhi adalah 0 atau 1. Tetapi x = 0 atau x = 1 akan membuat $x^3 = x$ benar.
    Jika $x^3 = x$ benar maka nilai x yang memenuhi adalah 0 atau 1 atau –1. Tetapi x = 0 atau x = 1 akan membuat $x^3 = x$ benar sedangkan x = –1 akan membuat $x^2 = x$ salah.

    $\therefore$ Jadi bilangan real x yang memenuhi adalah **x = –1**.

11.



Jelas bahwa panjang BC = 50 cm.

BD = $30 \cdot \frac{30}{50}$ = 18 cm.

DC = 50 − 18 = 32 cm.

AD = $\frac{30 \cdot 40}{50}$ = 24 cm

DE = 12 cm

$BE^2 = BD^2 + DE^2 = 18^2 + 12^2 = 6^2 \cdot 13$

$CE^2 = CD^2 + DE^2 = 32^2 + 12^2 = 4^2 \cdot 73$

BE + CE = $4\sqrt{73} + 6\sqrt{13}$

∴ **Nilai dari BE + CE adalah $4\sqrt{73} + 6\sqrt{13}$ cm.**

12. Nilai yang mungkin bagi peserta adalah 0, 1, 2, ⋯, 19.

Jumlah seluruh pertandingan = ${}_{20}C_2$ = 190.

Karena dalam satu pertandingan hanya ada nilai 1 atau 0 maka nilai total seluruh peserta haruslah sama dengan 190.

Misalkan nilai total 17 peserta terbawah adalah M.

M_{min} = 0 + 1 + 2 + 3 + ⋯ + 16 = 136.

Total nilai tiga tim teratas maksimum adalah 190 − 136 = 54.

Maka tidak mungkin nilai masing-masing tiga tim teratas sama dengan 19.

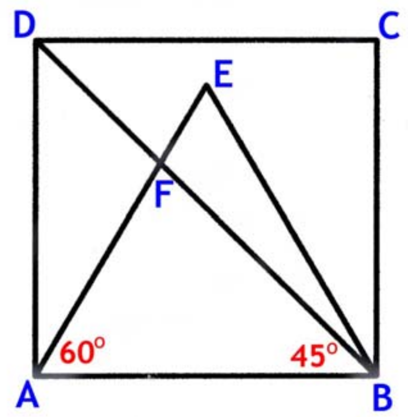
Nilai terkecil masing-masing tiga tim teratas adalah 17 sebab nilai terendah tim ke-4 adalah 16.

- Jika masing-masing tiga tim teratas sama dengan 17
  Nilai peringkat ke-4 haruslah 16.
  Maka M = 136. Tetapi total nilai seluruh peserta = 136 + 3 · 17 = 187 ≠ 190. Tidak memenuhi syarat total nilai seluruh peserta sama dengan 190.
- Jika masing-masing tiga tim teratas sama dengan 18
  Maka M = 190 − 3 · 18 = 136 = M_{min}.
  Maka nilai-nilai tim peringkat ke-4 sampai 20 adalah 16, 15, 14, 13, ⋯, 0.

Jadi nilai yang tidak muncul adalah 17 dan 19.

∴ Jumlah semua bilangan yang tidak muncul pada poin yang dimiliki suatu tim = **36**.

13. $\angle AFB = 180^o - \angle BAF - \angle FBA = 180^o - 60^o - 45^o = 75^o$.



Dengan dalil sinus pada segitiga AFB maka :

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{\sin 75^\circ} = \frac{AF}{\sin 45^\circ}$$

$\sin 75^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$. Maka

$$AF = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}$$

Luas segitiga ABF = ½ AB · AF sin 60^o

∴ **Luas segitiga ABF =** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. f(x) = $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin y + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos y$

Alternatif 1 :

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ dengan $\tan\alpha = \frac{a}{b}$

$$\left(f(y)\right)^2 = 8\cos^2(y-\alpha)$$

Alternatif 2 :

sin 105^o = $\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$ sedangkan cos 105^o = $-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$

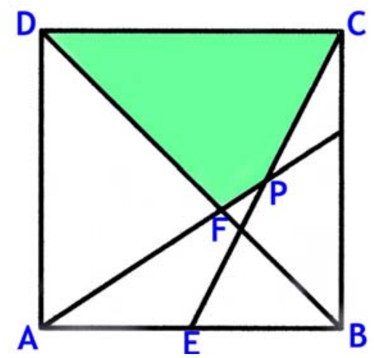
$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sin y - \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cos y\right)$$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\sin 105^\circ \sin y - \cos 105^\circ \cos y\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}}\cos\left(y-105^\circ\right)$$

$$\left(f(y)\right)^2 = 8\cos^2\left(y-105^\circ\right)$$

∴ Nilai maksimum untuk $(f(y))^2$ adalah **8.**

15. Misalkan koordinat A(0,0), B(10,0) maka C(10,10) dan D(0,10).



Panjang BF = 5 sedangkan $\angle$DBA = 45^o maka koordinat F$\left(10-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Persamaan garis AF adalah $y = \frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}x$ dan persamaan garis EC adalah y = 2x − 10

$2x_P - 10 = \frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}x_P$ sehingga $x_P = \frac{10(4-\sqrt{2})}{8-3\sqrt{2}} = \frac{130+20\sqrt{2}}{23}$ dan $y_P = \frac{30+40\sqrt{2}}{23}$

Misalkan [ABCD] menyatakan luas bangunan ABCD.

[AEP] = $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(\frac{30+40\sqrt{2}}{23}\right)$ = $\frac{75+100\sqrt{2}}{23}$

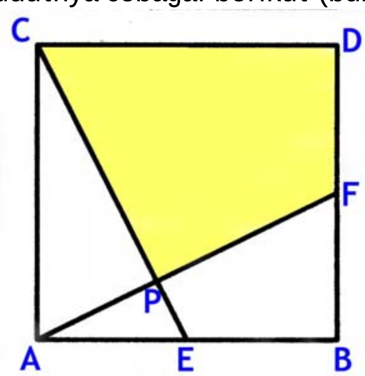
[AFD] = $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\left(\frac{20-5\sqrt{2}}{2}\right)$ = $\frac{100-25\sqrt{2}}{2}$

[EBC] = 25

[DFPC] = 100 − [AEP] − [AFD] − [EBC]

$\therefore$ **Luas DFPC adalah** $\frac{1000+375\sqrt{2}}{46}$.

Catatan : Jawaban yang dikirim dari pusat menyatakan bahwa jawaban dari soal ini adalah 55 yang didapat jika penulisan titik sudutnya sebagai berikut (buktikan).



Tetapi, penulisan titik sudut tersebut tidak sesuai dengan kesepakatan umum penulisan titik sudut.

16. $x_{k+1} - x_k = ½$

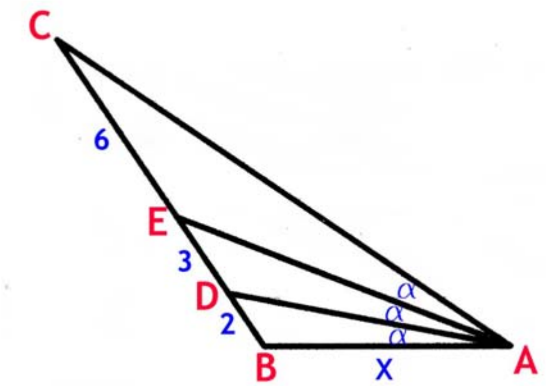
Karena selisih dua bilangan berurutan konstan maka soal tersebut merupakan deret aritmatika dengan beda sama dengan ½ dan suku pertama sama dengan 1.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} = \frac{400}{2}\left(2(1)+(400-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} = 40300$

$\therefore$ $x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} =$ **40300.**

17. Perhatikan gambar.



Misalkan $\angle CAE = \angle EAD = \angle DAB = \alpha$ dan panjang AB = x.

Pada ΔEAB, ruas AD adalah garis bagi sehingga $\frac{EA}{AB} = \frac{3}{2}$. Maka EA = $\frac{3x}{2}$.

Misalkan juga AD = y. Dengan dalil cosinus maka

$$\frac{y^2 + x^2 - 2^2}{2xy} = \frac{\frac{9}{4}x^2 + y^2 - 3^2}{3xy} = \cos\alpha$$

$6y^2 + 6x^2 - 24 = 9x^2 + 4y^2 - 36$

$2y^2 = 3x^2 - 12$ .... (1)

Pada ΔDAC, karena AE adalah garis bagi maka berlaku AC = 2 AD = 2y

Sesuai dalil cosinus pada ΔCAE maka

$$6^2 = 4y^2 + \frac{9}{4}x^2 - 2(2y)\left(\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{y^2 + x^2 - 2^2}{2xy}\right)$$

$144 = 16y^2 + 9x^2 - 12(y^2 + x^2 - 4)$

$96 = 4y^2 - 3y^2$

Subtitusikan persamaan (1)

$96 = 6x^2 - 24 - 3x^2$

$x = 2\sqrt{10}$

Karena $\angle ABC > 90^o$ maka sisi terpanjang ΔABC adalah sisi AC.

Karena $x = 2\sqrt{10} < 2 \cdot 4 < 2 + 3 + 6 = 11 = BC$ maka panjang sisi yang terpendek adalah AB = x

$\therefore$ Panjang sisi segitiga ABC yang terpendek adalah $2\sqrt{10}$

18. $10^{999999999} = 1000^{333333333} = (7 \cdot 143 - 1)^{333333333}$.
$10^{999999999} \equiv (-1)^{333333333} \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7$
$10^{999999999}$ dibagi 7 maka akan bersisa 6.
$\therefore$ $10^{999999999}$ dibagi 7 akan bersisa **6**.

19. Banyaknya bilangan asli yang kurang dari 100 dan habis dibagi 3 ada 33.
Banyaknya bilangan asli yang habis dibagi 3 dan habis dibagi 5 serta kurang dari 100 ada 6.
Banyaknya anggota himpunan A adalah 33 − 6 = 27.
Fungsi f dari himpunan semua bilangan real yang tidak nol ke dalam A memenuhi $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x - y)$.
Alternatif 1 :
Ambil $x = \dfrac{ab}{a-1}$ dan $y = \dfrac{b}{a-1}$ untuk a ≠ 1 serta a dan b tak nol. Maka
f(a) = f(b)
Jadi f merupakan fungsi konstan. Karena banyaknya anggota himpunan A ada 27 maka banyaknya fungsi yang memenuhi ada 27.
$\therefore$ Banyaknya fungsi yang memenuhi adalah **27**.

Alternatif 2 :
f(x) = f(2x − x) = f$\left(\frac{2x}{x}\right)$ = f(2) sehingga f merupakan fungsi konstan.
Karena banyaknya anggota himpunan A ada 27 maka banyaknya fungsi yang memenuhi ada 27.
$\therefore$ Banyaknya fungsi yang memenuhi adalah **27**.

20. Karena rata-rata delapan bilangan sama dengan 6,5 maka jumlah kedelapan bilangan = 52.
Jumlah empat bilangan yang ada adalah 4 + 5 + 7 + 8 = 24 sehingga jumlah keempat bilangan yang lain sama dengan 28.
- Jika bilangan yang terkecil sama dengan 1 maka bilangan terbesar sama dengan 11
  Jumlah dua bilangan terakhir = 16. Pasangan yang memenuhi adalah (5, 11), (6, 10), (7, 9) dan (8, 8) yang semuanya ada 4.
- Jika bilangan yang terkecil sama dengan 2 maka bilangan terbesar sama dengan 12
  Jumlah dua bilangan terakhir = 14. Pasangan yang memenuhi adalah (2, 12), (3, 11), (4, 10), (5, 9), (6, 8) dan (7, 7) yang semuanya ada 6.
- Jika bilangan yang terkecil sama dengan 3 maka bilangan terbesar sama dengan 13
  Jumlah dua bilangan terakhir = 12. Pasangan yang memenuhi adalah (3, 9), (4, 8), (5, 7) dan (6, 6) yang semuanya ada 4.
- Jika bilangan yang terkecil sama dengan 4 maka bilangan terbesar sama dengan 14
  Jumlah dua bilangan terakhir = 10. Pasangan yang memenuhi adalah (4, 6) dan (5, 5) yang semuanya ada 2.
- Jika bilangan yang terkecil sama dengan 4 maka bilangan terbesar sama dengan 14 dengan bilangan 4 tersebut merupakan salah satu dari 4 bilangan awal.
  Jumlah tiga bilangan lain haruslah 14 dan tidak ada salah satu di antaranya sama dengan 4.
  Karena yang terendah sama dengan 5 maka nilai minimal sama dengan 15. Tidak ada yang memenuhi.

Banyaknya susunan = 4 + 6 + 4 + 2 + 0 = 16.
$\therefore$ Banyaknya susunan yang mungkin ada **16**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2009

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

Waktu : 210 Menit

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS

TAHUN 2009

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2009
MATEMATIKA SMA/MA

Petunjuk untuk peserta :

1. Tes terdiri dari dua bagian. Tes bagian pertama terdiri dari 20 soal isian singkat dan tes bagian kedua terdiri dari 5 soal uraian.

2. Waktu yang disediakan untuk menyelesaikan semua soal adalah 210 menit.

3. Tuliskan nama, kelas dan asal sekolah Anda di sebelah kanan atas pada setiap halaman.

4. Untuk soal bagian pertama :
   (a) Masing-masing soal bagian pertama bernilai 1 (satu) angka.
   (b) Beberapa pertanyaan dapat memiliki lebih dari satu jawaban yang benar. Anda diminta memberikan jawaban yang paling tepat atau persis untuk pertanyaan seperti ini. Nilai hanya akan diberikan kepada pemberi jawaban paling tepat atau paling persis.
   (c) Tuliskan hanya jawaban dari soal yang diberikan. Tuliskan jawaban tersebut pada kotak di sebelah kanan setiap soal.

5. Untuk soal bagian kedua :
   (a) Masing-masing soal bagian kedua bernilai 7 (tujuh) angka
   (b) Anda diminta menyelesaikan soal yang diberikan secara lengkap. Selain jawaban akhir, Anda diminta menuliskan semua langkah dan argumentasi yang Anda gunakan untuk sampai kepada jawaban akhir tersebut.
   (c) Jika halaman muka tidak cukup, gunakan halaman sebaliknya.

6. Jawaban hendaknya Anda tuliskan dengan menggunakan tinta, bukan pensil.

7. Selama tes, Anda tidak diperkenankan menggunakan buku, catatan dan alat bantu hitung. Anda juga tidak diperkenankan bekerja sama.

8. Mulailah bekerja hanya setelah pengawas memberi tanda dan berhentilah bekerja segera setelah pengawas memberi tanda.

9. Selamat bekerja.

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2009
MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN PERTAMA

1. Tiga dadu berwarna hitam, merah, dan putih dilempar bersama-sama. Macam hasil lemparan sehingga jumlah ketiga mata dadu adalah 8 sebanyak ⋯⋯⋯

2. Banyaknya bilangan real x yang memenuhi persamaan $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 176x + 2009 = 0$ adalah ⋯⋯

3. Bilangan rasional a < b < c membentuk barisan hitung (aritmatika) dan
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$$
Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah ⋯⋯⋯⋯

4. Misalkan N menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif dan
$$S=\left\{n\in N\left|\frac{n^{2009}+2}{n+1}\in N\right.\right\}$$
Banyaknya himpunan bagian dari S adalah ⋯⋯⋯

5. Diberikan segitiga ABC dengan tan $\angle$CAB = $\frac{22}{7}$. Melalui titik sudut A ditarik garis tinggi sedemikian rupa sehingga membagi sisi BC menjadi segmen-segmen dengan panjang 3 dan 17. Luas segitiga ABC adalah ⋯⋯⋯

6. Nilai minimum dari $f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}$ untuk $0 < x < \pi$ adalah ⋯⋯⋯

7. Diberikan segitiga dengan panjang dari ketiga garis tinggi segitiga itu merupakan bilangan bulat. Jika panjang kedua garis tingginya adalah 10 dan 6, maka panjang maksimum garis tinggi ketiga adalah ⋯⋯

8. Suatu fungsi f : Z → Q mempunyai sifat $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ untuk setiap $x \in Z$. Jika f(2) = 2, maka nilai fungsi f(2009) adalah ⋯⋯

9. Diketahui segitiga siku-siku ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c serta a < b < c. Misalkan r dan R berturut-turut menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luarnya. Jika $\frac{r(a+b+c)}{R^2}=\sqrt{3}$ maka nilai dari $\frac{r}{a+b+c}$ adalah ⋯⋯⋯

10. Jika tan x + tan y = 25 dan cot x + cot y = 30, maka nilai tan (x + y) adalah ⋯⋯

11. Pada bagian kanan 100! terdapat digit 0 berturut-turut sebanyak ⋯⋯⋯

12. Ada empat pasang sepatu akan diambil empat sepatu secara acak. Peluang bahwa yang terambil ada yang berpasangan adalah ⋯⋯

13. Diketahui k, m, dan n adalah tiga bilangan bulat positif yang memenuhi
$$\frac{k}{m}+\frac{m}{4n}=\frac{1}{6}$$
Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah ⋯⋯

14. Bilangan prima p yang memenuhi $(2p - 1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ ada sebanyak ⋯⋯

15. Jika $x_1, x_2, \cdots, x_{2009}$ bilangan real, maka nilai terkecil dari
$$\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2009} \sin x_1$$
adalah ⋯⋯

16. Misalkan a, b, c adalah akar-akar polinom $x^3 - 8x^2 + 4x - 2$. Jika $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ adalah polinom dengan akar-akar a + b – c, b + c – a, c + a – b maka f(1) = ⋯⋯

17. Banyaknya segitiga tumpul dengan sisi bilangan asli yang memiliki sisi-sisi terpanjang 10 adalah ⋯
(Catatan : dua segitiga kongruen dianggap sama)

18. Misalkan n bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 2009 faktor dan n merupakan kelipatan 2009. Faktor prima terkeci dari n adalah ⋯⋯

19. Misalkan $p(x) = x^2 - 6$ dan $A = \{x \in R \mid p(p(x)) = x\}$. Nilai maksimal dari $\{|x| : x \in A\}$ adalah ⋯⋯

20. Misalkan $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Nilai $\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor$ untuk sebarang $n \in N$ adalah ⋯⋯

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2009
MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN KEDUA

1. Seekor semut hendak melangkah ke makanan yang berada sejauh 10 langkah di depannya. Semut tersebut sedang mendapatkan hukuman, ia hanya boleh melangkah ke depan sebanyak kelipatan tiga langkah dan selebihnya harus melangkah ke belakang. Tentukan banyaknya cara melangkah agar bisa mencapai makanan, jika ia harus melangkah tidak lebih dari dua puluh langkah. (Catatan : jika semut melangkah dua kali dimana masing-masing melangkah sekali ke belakang, maka dianggap sama saja dengan dua langkah ke belakang.)

2. Diberikan n adalah bilangan asli. Misalkan $x = 6 + 2009\sqrt{n}$. Jika $\dfrac{x^{2009} - x}{x^3 - x}$ merupakan bilangan rasional, tunjukkan bahwa n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.

3. Diberikan segitiga ABC dan titik D pada sisi AC. Misalkan r_1, r_2 dan r berturut-turut menyatakan jari-jari lingkaran dalam dari segitiga-segitiga ABD, BCD, dan ABC. Buktikan bahwa $r_1 + r_2 > r$.

4. Diketahui p adalah bilangan prima sehingga persamaan $7p = 8x^2 - 1$ dan $p^2 = 2y^2 - 1$ mempunyai solusi x dan y berupa bilangan bulat. Tentukan semua nilai p yang memenuhi.

5. Diketahui himpunan H mempunyai lima anggota dari {0, 1, 2, 3, ⋯, 9}. Buktikan ada dua himpunan bagian dari H, yang tidak kosong dan saling asing, yang jika semua anggotanya dijumlahkan hasilnya sama.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2009
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

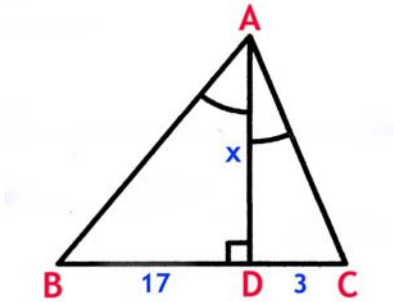
1. Banyaknya macam adalah (1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3) beserta permutasi yang berturut-turut ada sebanyak 3, 6, 6, 3 dan 3.
   $\therefore$ Banyaknya macam hasil lemparan = 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = **21**.

2. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 176x + 2009 = 0$
   $(x^2 - x)^2 + (2x - 44)^2 + 73 = 0$
   Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka tidak ada x real yang memenuhi.
   $\therefore$ Banyaknya bilangan real x yang memenuhi adalah **0**.

3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$
   Karena a, b dan c positif maka dengan ketaksamaan AM-GM didapat
   $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$
   Tanda kesamaan terjadi jika a = b = c.
   Karena $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ maka haruslah a = b = c yang kontradiksi dengan a < b < c.
   $\therefore$ Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah **0**.

4. $S = \left\{ n \in N \middle| \frac{n^{2009} + 2}{n+1} \in N \right\}$
   $\frac{n^{2009} + 2}{n+1} = \frac{n^{2009} + 1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \in N$
   Karena $n + 1 \mid n^{2009} + 1$ maka haruslah $n + 1 \mid 1$
   Jadi $n + 1 \leq 1$, tetapi $n \in N$ sehingga tidak ada $n \in N$ yang memenuhi.
   Semua himpunan bagian dari S hanya ada satu yaitu { }.
   $\therefore$ Banyaknya himpunan bagian dari S adalah **1**.

5. Misalkan garis tinggi dari A memotong sisi BC di D dan AD = x.
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan CD = 3 dan DB = 17.



$$\tan\angle CAB = \tan(\angle CAD + \angle DAB) = \frac{\tan\angle CAD + \tan\angle DAB}{1 - \tan\angle CAD \cdot \tan\angle DAB}$$

$\frac{22}{7} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{17}{x}}{1 - \frac{3}{x} \cdot \frac{17}{x}}$ yang ekivalen dengan

$11x^2 - 561 = 70x$

$(x - 11)(11x + 51) = 0$

Karena x > 0 maka x = AD = 11

Luas ΔABC = ½ · AD · BC = ½ · 11 · (3 + 17)

∴ Luas ΔABC adalah **110**.

6. $f(x) = \frac{9x^2\sin^2 x + 4}{x\sin x}$

Untuk 0 < x < π maka sin x > 0

Dengan AM-GM didapat

$$f(x) = \frac{9x^2\sin^2 x + 4}{x\sin x} = 9x\sin x + \frac{4}{x\sin x} \geq 2\sqrt{9x\sin x \cdot \frac{4}{x\sin x}} = 12$$

Tanda kesamaan terjadi jika $9x\sin x = \frac{4}{x\sin x}$ atau $x\sin x = \frac{2}{3}$

∴ Nilai minimum dari $f(x) = \frac{9x^2\sin^2 x + 4}{x\sin x}$ adalah **12**.

7. Misalkan garis tinggi ketiga = t.

Misalkan juga 6, 10 dan t adalah garis tinggi-garis tinggi yang berturut-turut sepadan dengan sisi-sisi a, b dan c.

Dengan rumus luas segitiga ABC didapat hubungan

6a = 10b = tc

Dengan ketaksamaan segitiga didapat

a < b + c

$1 < \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

$1 < \frac{3}{5} + \frac{6}{t}$

t < 15.

Jika t = 14 maka 6a = 10b = 14c

$a : b : c = \frac{1}{6} : \frac{1}{10} : \frac{1}{14} = 35 : 21 : 15$

Karena a = 35k < b + c = 36k untuk suatu nilai real k maka t = 14 memenuhi.

∴ Panjang maksimum garis tinggi ketiga adalah **14.**

8. $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ dan f(2) = 2

$$f(3) = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

$$f(4) = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$$

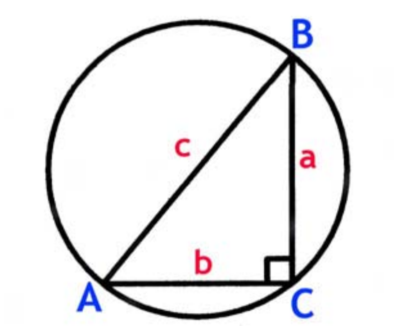
$$f(5) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$f(6) = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$$

Sehingga nilai f(n) untuk n bulat ≥ 2 akan periodik dengan kala ulang 4.
Karena 2009 = 4(502) + 1 maka nilai f(2009) = f(5)

∴ Nilai fungsi f(2009) adalah $\frac{1}{3}$.

9.



$$\frac{r(a+b+c)}{R^2} = \sqrt{3}$$

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}ab = \frac{abc}{4R}$

$$\frac{ab}{R^2} = \sqrt{3}$$

Alternatif 1 :

Dengan mensubtitusikan bahwa c = 2R, a = c sin A dan b = c cos A maka

$$4\sin A\cos A = \sqrt{3}$$

$$\sin 2A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Karena a < b < c maka A < B < C.

Jadi, A = 30°, B = 60° dan C = 90°.

$$\frac{r}{a+b+c} = \frac{r(a+b+c)}{(a+b+c)^2} = \frac{ab}{(a+b+c)^2} = \frac{c\sin 30^\circ \cdot c\cos 30^\circ}{(c\sin 30^\circ + c\cos 30^\circ + c)^2} = \frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3}+2)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{r}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

Alternatif 2 :

Karena R = 2c maka $4ab = c^2\sqrt{3}$

$a^2 + b^2 = c^2$

$3a^2 + 3b^2 = 4ab\sqrt{3}$

$(a - b\sqrt{3})(3a - b\sqrt{3}) = 0$

Karena a < b maka

$b = a\sqrt{3}$ dan $c = 2a$

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a + a\sqrt{3} + 2a} = \frac{a\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$\frac{r}{a+b+c} = \frac{a\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})(a+a\sqrt{3}+2a)} = \frac{\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})^2}$$

$$\therefore \quad \frac{r}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

10. tan x + tan y = 25

cot x + cot y = 30

$$\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} = 30$$

$$\frac{\tan x + \tan y}{\tan x \cdot \tan y} = 30$$

tan x · tan y = $\frac{5}{6}$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{25}{1 - \frac{5}{6}}$$

∴ tan (x + y) = **150**.

11. Nilai maksimal k sehingga $5^k \mid 100!$ adalah $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5^2} \right\rfloor$ = 24.

∴ Bagian kanan 100! terdapat digit 0 berturut-turut sebanyak **24**.

12. Alternatif 1 :

Akan ada dua kasus

1) Ada tepat sepasang sepatu yang berpasangan dan dua lainnya dipilih dari 3 pasang sepatu tersisa sehinga keduanya tidak berpasangan.
   Sepasang sepatu dipilih dari kemungkinan 4 pasangan. Banyaknya cara memilih ada 4.
   Banyaknya cara memilih dua sepatu dari tiga pasang sepatu sehingga keduanya tidak berpasangan adalah ${}_3C_2 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.
   Banyaknya cara memilih sehingga tepat sepasang sepatu yang berpasangan dan 2 lainnya dipilih dari 3 pasang sepatu tersisa sehinga keduanya tidak berpasangan = $4 \cdot 12 = 48$.
2) Ada tepat dua pasang sepatu berpasangan yang dipilih dari kemungkinan empat pasang sepatu.
   Banyaknya cara memilih adalah ${}_4C_2 = 6$.

$\therefore$ Peluang kejadian = $\frac{48+6}{{}_8C_4} = \frac{27}{35}$

Alternatif 2 :

Komplemen dari kejadian dimaksud adalah tidak ada sepasang sepatu dari keempat sepatu tersebut yang berpasangan, sehingga masing-masing satu buah sepatu dipilih dari masing-masing empat pasang sepatu tersebut. Banyaknya cara adalah $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Peluang kejadian = $1 - \frac{16}{{}_8C_4}$

$\therefore$ Peluang kejadian = $\frac{27}{35}$.

13. $\frac{k}{m} + \frac{m}{4n} = \frac{1}{6}$ dengan k, m dan n adalah tiga bilangan bulat positif.

$3m^2 = 2n(m - 6k)$

Karena ruas kiri positif maka haruslah $m > 6k > 6$.

Ruas kanan pasti genap sehingga m harus genap.

Karena m genap dan $m > 6$ maka $m \geq 8$.

Jika m = 8 maka

$48 = 4n - 3kn$

$48 = n(4 - 3k)$

n = 48 dan k = 1 adalah salah satu pasangan (n, k) yang memenuhi.

$\therefore$ Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah **8**.

14. $(2p - 1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ untuk suatu bilangan prima p.

Jika p = 2 maka $3^3 + 6^2 \neq 6^2$ sehingga p = 2 tidak memenuhi.

Jika p = 3 maka $5^3 + 9^2 \neq 6^3$ sehingga p = 3 tidak memenuhi.

Karena $p \neq 2, 3$ dan p prima maka p dapat dinyatakan $p = 6k + 1$ atau $6k + 5$ dengan k bulat taknegatif.

- Jika $p = 6k + 1$
  Persamaan semula akan ekivalen dengan
  $(12k + 1)^3 + 9(6k + 1)^2 = 6^{6k+1}$
  $(12k)^3 + 3(12k)^2 + 3(12k)^2 + 1 + 9(6k + 1)^2 = 6^{6k+1}$
  Ruas kiri dibagi 9 bersisa 1 sedangkan ruas kanan habis dibagi 9.

Maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

- Jika p = 6k + 5

  Persamaan semula akan ekivalen dengan

  $(12k + 9)^3 + 9(6k + 5)^2 = 6^{6k-1}$

  $3^3(4k + 3)^3 + 324k^2 - 540k + 180 = 6^{6k+5}$

  Karena $180 \equiv 9 \pmod{27}$ maka ruas kiri dibagi 27 bersisa 9 sedangkan 27 membagi ruas kanan.

  Maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

Jadi, tidak ada bilangan prima p yang memenuhi.

$\therefore$ Banyaknya bilangan prima p yang memenuhi adalah **0**.

15. Misalkan $k = \cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2009} \sin x_1$ maka

$2k = 2\cos x_1 \sin x_2 + 2\cos x_2 \sin x_3 + \cdots + 2\cos x_{2009} \sin x_1$

Mengingat bahwa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka

$2009+2k = \cos^2 x_1 + 2\cos x_1 \sin x_2 + (\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + 2\cos x_2 \sin x_3 + (\sin^2 x_3 + \cos^2 x_3) + \cdots + 2\cos x_{2009} \sin x_1 + \sin^2 x_1$

$2009+2k=(\cos^2 x_1 + 2\cos x_1 \sin x_2 + \sin^2 x_2)+(\cos^2 x_2 + 2\cos x_2 \sin x_3 + \sin^2 x_3)+\cdots+(\cos^2 x_{2009} + 2\cos x_{2009} \sin x_1 + \sin^2 x_1)$

$2009 + 2k =(\cos x_1 + \sin x_2)^2 + (\cos x_2 + \sin x_1)^2 + \cdots + (\cos x_{2009} + \sin x_1)^2 + (\cos x_1 + \sin x_{2009})^2$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

$2009 + 2k_{min} = 0$

$$k_{\min} = -\frac{2009}{2}$$

Nilai minimum didapat jika $\cos x_1 = -\sin x_2$, $\cos x_2 = -\sin x_1$, $\cos x_2 = -\sin x_3$, $\cos x_3 = -\sin x_2$, $\cdots$, $\cos x_{2009} = -\sin x_1$ dan $\cos x_{2009} = -\sin x_1$ yang dapat dipenuhi oleh $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2009} = \frac{3\pi}{4}$ rad.

$\therefore$ Nilai minimum dari $\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2009} \sin x_1$ adalah $-\frac{2009}{2}$.

16. $x^3 - 8x^2 + 4x - 2 = 0$ akar-akarnya a, b dan c.

Maka a + b + c = 8.

Subtitusi y = 8 − 2x sehingga $x = \frac{8-y}{2}$ ke persamaan $x^3 - 8x^2 + 4x - 2 = 0$. Maka

$\left(\frac{8-y}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{8-y}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{8-y}{2}\right) - 2 = 0$ memiliki akar-akar 8 − 2a, 8 − 2b dan 8 − 2c

Polinom $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ memiliki akar-akar, yaitu a + b − c = 8 − 2c, a + c − b = 8 − 2b dan b + c − a = 8 − 2a.

Karena koefisien x^3 dari f(x) sama dengan 1 maka

Polinom $f(x) = -8\left(\frac{8-x}{2}\right)^3 + 64\left(\frac{8-x}{2}\right)^2 - 32\left(\frac{8-x}{2}\right) + 16 = 0$ juga memiliki akar-akar 8 − 2a, 8 − 2b dan 8 − 2c.

$$f(1) = -8\left(\frac{8-1}{2}\right)^3 + 64\left(\frac{8-1}{2}\right)^2 - 32\left(\frac{8-1}{2}\right) + 16 = 345$$

$\therefore$ f(1) = **345**.

17. Tanpa mengurangi keumuman misalkan sisi-sisi segitiga adalah a, b dan 10 dengan $a \le b \le 10$.
Ketaksamaan segitiga, $a + b > 10$
Karena segitiga tumpul maka $a^2 + b^2 < 10^2$
Pasangan (a, b) bilangan asli yang memenuhi kedua ketaksamaan tersebut adalah (2,9), (3,8), (3,9), (4,7), (4,8), (4,9), (5,6), (5,7), (5,8), (6,6), (6,7) dan (7,7).
Banyaknya pasangan (a, b) bilangan asli yang memenuhi ada 12.
$\therefore$ Banyaknya segitiga yang memenuhi adalah **12**.

18. $2009 = 7^2 \cdot 41$ maka 7^2 dan 41 haruslah merupakan faktor dari n.
$n_{min} = 2^{40} \cdot 7^6 \cdot 41^6$ memenuhi banyaknya faktor positif dari n adalah (40 + 1)(6 + 1)(6 + 1) = 2009
$\therefore$ Faktor prima terkecil dari n adalah **2**.

19. $p(x) = x^2 - 6$
$p(p(x)) = x$
$(x^2 - 6)^2 - 6 = x$
$x^4 - 12x^2 - x + 30 = 0$
$(x + 2)(x - 3)(x^2 + x - 5) = 0$
Nilai x yang memenuhi adalah -2, 3, $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$.
Karena $\left|\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right| = \frac{1+\sqrt{21}}{2} < \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$ maka nilai terbesar $|x|$ yang memenuhi adalah 3.
$\therefore$ Nilai maksimal dari $\{|x| : x \in A\}$ adalah **3**.

20. Karena $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ maka
$q^2 = q + 1$
$q - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
$q^2n = nq + n$
Karena n bulat maka
$\lfloor q^2n \rfloor = \lfloor nq + n \rfloor = \lfloor qn \rfloor + n$ .... (1)
$\lfloor q\lfloor qn \rfloor\rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor + \lfloor qn \rfloor\rfloor$
Karena $\lfloor qn \rfloor$ bulat maka
$\lfloor q\lfloor qn \rfloor\rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor\rfloor + \lfloor qn \rfloor$ .... (2)

$$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor\rfloor \ge \lfloor (q-1)(qn-1)\rfloor = \left\lfloor \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)n - 1\right)\right\rfloor = \left\lfloor n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\rfloor = n - 1$$

Karena q − 1 tak bulat maka

$$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor\rfloor < (q-1)\lfloor qn \rfloor < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)n\right) = n$$

Karena $n > \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor \geq n - 1$ maka

$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor = n - 1$

$\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor + \lfloor qn \rfloor$

$\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor = n - 1 + \lfloor qn \rfloor$ .... (3)

Kurangkan persamaan (3) dengan persamaan (1)

$\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2n \rfloor = (n - 1 + \lfloor qn \rfloor) - (\lfloor qn \rfloor + n)$

$\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2n \rfloor = -1$

$\therefore$ Nilai $\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2n \rfloor$ untuk sebarang $n \in N$ adalah $-\mathbf{1}$.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2009

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

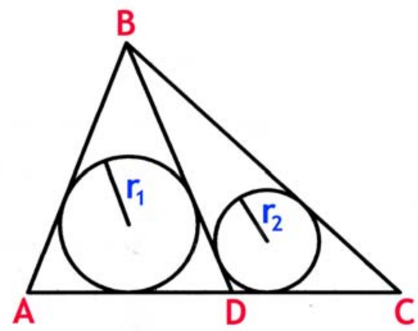
BAGIAN KEDUA

1. Jelas bahwa semut harus melangkah ke depan lebih dari 3 kali.
   Jika semut melangkah ke depan lebih dari 5 kali maka semut tersebut harus mundur sekurang-kurangnya 8 langkah sehingga total langkah lebih dari 20. Jadi, hanya ada 2 kasus :
   - Semut tersebut maju 3 x 4 langkah dan mundur 2 langkah, total langkah 14.
     Banyaknya cara sama saja dengan banyaknya susunan 333311
     Banyaknya cara = $\frac{6!}{4! \cdot 2!}$ = 15 cara.
     Cara lainnya sama dengan menempatkan 4 angka tiga ke 4 dari 6 tempat. Banyaknya cara = ${}_6C_4$ = 15 cara.
   - Semut tersebut maju 3 x 5 langkah dan mundur 5 langkah, total langkah 20.
     Banyaknya cara sama saja dengan banyaknya susunan 3333311111
     Banyaknya cara = $\frac{10!}{5! \cdot 5!}$ = 252 cara.
     Cara lainnya sama dengan menempatkan 5 angka tiga ke 5 dari 10 tempat. Banyaknya cara = ${}_{10}C_5$ = 252 cara.

   ∴ Banyaknya cara semut tersebut melangkah agar mencapai makanan adalah 15 + 252 = **267**

2. $x = 6 + 2009\sqrt{n}$
   $\frac{x^{2009} - x}{x^3 - x} = \frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat dan b ≠ 0.
   Karena $\left(p_1 + q_1\sqrt{n}\right)\left(p_2 + q_2\sqrt{n}\right) = \left(p_1p_2 + q_1q_2n\right) + \left(p_1q_2 + p_2q_1\right)\sqrt{n}$ yang juga berbentuk $p_i + q_i\sqrt{n}$ untuk suatu bilangan asli p_i dan q_i dengan i adalah bilangan asli maka x^i juga akan berbentuk $p_i + q_i\sqrt{n}$ untuk suatu bilangan asli i.
   Karena x ≠ 0 maka $\frac{x^{2009} - x}{x^3 - x} = \frac{a}{b} = \frac{x^{2008} - 1}{x^2 - 1}$
   $\frac{p_{2008} + q_{2008}\sqrt{n} - 1}{p_2 + q_2\sqrt{n} - 1} = \frac{a}{b}$
   $b \cdot p_{2008} - a \cdot p_2 + a - b = \left(a \cdot q_2 - b \cdot q_{2008}\right)\sqrt{n}$
   Karena a, b, p_2, p_{2008}, q_2 dam q_{2008} adalah bilangan bulat maka n haruslah merupakan kuadrat dari suatu bilangan rasional.
   $n = \left(\frac{k}{m}\right)^2$ dengan k, m bilangan asli dan FPB(k, m) = 1
   Karena n bilangan asli maka haruslah m = 1 sehingga n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.
   ∴ **Terbukti bahwa n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.**

3.



Misalkan [ABC] menyatakan luas ΔABC, maka [ABC] = [ABD] + [BCD]

$$\frac{1}{2}r\left(AB+BC+AC\right)=\frac{1}{2}r_1\left(AB+BD+AD\right)+\frac{1}{2}r_2\left(BC+BD+DC\right)$$

Pada ΔABD dan ΔBCD berturut-turut berlaku BD < AD + AB dan BD < BC + DC sehingga

$r(AB + BC + AC) = r_1(AB + BD + AD) + r_2(BC + BD + DC) < r_1(AB + BC + DC + AD) + r_2(BC + AD + AB + DC)$

Karena AD + DC = AC maka

$r(AB + BC + AC) < r_1(AB + BC + AC) + r_2(BC + AC + AB)$

$r < r_1 + r_2$

∴ **Terbukti bahwa $r_1 + r_2 > r$**

4. $7p = 8x^2 - 1$ .... (1)

$p^2 = 2y^2 - 1$ .... (2)

Jika $(x, y) = (x_1, y_1)$ memenuhi persamaan maka $(-x_1, -y_1)$ pasti memenuhi sehingga tanpa mengurangi keumuman dapat dimisalkan $x, y \geq 0$.

$p^2 - y^2 = y^2 - 1$.

Karena y = 0 dan y = 1 tidak memenuhi persamaan maka $y^2 > 1$ sehingga $p > y$ .... (3)

Jika p = 2 maka $15 = 8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 3 maka $22 = 8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 5 maka $36 = 8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 7 maka $50 = 8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jadi, p > 7.

Kurangkan persamaan (2) dengan (1) didapat

$p(p - 7) = 2(y + 2x)(y - 2x)$

Karena p > 7 maka y > 2x sehingga p > y > 2x .... (4)

Karena $p \neq 2$ maka $p \mid (y + 2x)(y - 2x)$

Karena $p > y \geq y - 2x$ dan p bilangan prima maka $p \mid y + 2x$

Karena $p \leq y + 2x < p + p = 2p$ maka hanya terpenuhi jika p = y + 2x

Maka $p^2 = 2(p - 2x)^2 - 1$ sehingga $p^2 - 8xp + 8x^2 - 1 = 0$

Subtitusikan persamaan (1) sehingga $p^2 - 8xp + 7p = 0$

Karena $p \neq 0$ maka $p = 8x - 7$ .... (5)

Subtitusikan persamaan (5) ke persamaan (1)

$7(8x - 7) = 8x^2 - 1$

$(x - 6)(x - 1) = 0$

* Jika x = 1 dan sesuai persamaan (5) maka p = 1 (tidak memenuhi bahwa p bilangan prima)
* Jika x = 6 maka p = 41 dan y = 29 yang memenuhi bahwa p bilangan prima dan y bulat

∴ Semua nilai p yang memenuhi adalah **p = 41.**

5. Misalkan $A \subset H$ dan $B \subset H$ yang memenuhi $A \cap B = \{\ \}$ serta A dan B keduanya bukan himpunan kosong.
   $H = \{0, 1, 2, 4, 8\}$ merupakan *counter example* dari soal.
   Bagaimana pun disusun $A \subset H$ dan $B \subset H$ serta $A \cap B = \{\ \}$ tidak akan didapat jika semua anggota A dijumlahkan hasilnya akan sama dengan jumlah semua anggota B.
   $\therefore$ Tidak dapat dibuktikan ada dua himpunan bagian dari H, yang tidak kosong dan saling asing, yang jika semua anggotanya dijumlahkan hasilnya sama.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2009

DKI JAKARTA, 3 – 9 AGUSTUS 2009

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 4 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2009

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2009
3 – 9 AGUSTUS 2009
DKI JAKARTA

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 4 JAM

1. Tentukan banyaknya bilangan n $\in$ {1, 2, 3, ⋯, 2009} sedemikian sehingga
$$4n^6 + n^3 + 5$$
habis dibagi 7.

2. Misalkan untuk setiap bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Diberikan a_1, a_2, a_3, ⋯ suatu barisan bilangan asli yang memenuhi $a_1 > 1$ dan
$$\left\lfloor \frac{a_1+1}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_2+1}{a_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_3+1}{a_4} \right\rfloor = \cdots.$$
Buktikan bahwa
$$\left\lfloor \frac{a_n+1}{a_{n+1}} \right\rfloor \le 1$$
untuk setiap bilangan asli n.

3. Pada segitiga ABC, titik-titik D, E dan F berturut-turut terletak pada segmen BC, CA dan AB. Nyatakan P sebagai titik perpotongan AD dan EF. Tunjukkan bahwa
$$\frac{AB}{AF} xDC + \frac{AC}{AE} xDB = \frac{AD}{AP} xBC$$

4. Di suatu pulau terdapat 7 kota dan ada jaringan kereta api yang melalui kota-kota tersebut. Setiap segmen rel menghubungkan tepat 2 kota, dan diketahui bahwa setiap kota memiliki paling sedikit 3 segmen ke kota lain. Buktikan bahwa terdapat rute perjalanan kereta api yang mengunjungi 4 kota yang berbeda masing-masing sekali dan kembali ke kota asalnya. (Contoh : rute A – B – C – D – A)

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2009

DKI JAKARTA, 3 – 9 AGUSTUS 2009

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 4 Jam

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS

TAHUN 2009

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2009
3 – 9 AGUSTUS 2009
DKI JAKARTA

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 4 JAM

5. Di dalam suatu laci terdapat paling banyak 2009 bola yang terdiri dari bola putih dan biru yang tercampur secara acak. Jika dua bola diambil secara acak tanpa pengembalian, maka diketahui probabilitas bahwa terambil keduanya bola warna putih atau keduanya bola warna biru adalah $\frac{1}{2}$. Berapa banyak maksimum bola putih yang mungkin berada dalam laci sedemikian sehingga pernyataan tentang probabilitas tersebut tetap terpenuhi ?

6. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari fungsi
$$f(x) = x^{2008} - 2x^{2007} + 3x^{2006} - 4x^{2005} + 5x^{2004} + \cdots - 2006x^3 + 2007x^2 - 2008x + 2009$$
untuk sebarang bilangan real x.

7. Suatu pasangan bilangan bulat (m, n) dikatakan *baik* bila
$$m \mid n^2 + n \quad \text{dan} \quad n \mid m^2 + m$$
Diberikan sebarang dua bilangan asli a, b > 1 yang relatif prima, buktikan bahwa terdapat pasangan baik (m, n) dengan $a \mid m$ dan $b \mid n$ tetapi a tidak membagi n dan b tidak membagi m.

8. Diberikan segitiga ABC lancip. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC, CA, dan AB berturut-turut di D, E, dan F. Garis bagi sudut A memotong DE dan DF berturut-turut di K dan L. Misalkan AA_1 adalah garis tinggi dan M titik tengah BC.
(a) Buktikan bahwa BK dan CL tegak lurus garis bagi sudut BAC
(b) Tunjukkan bahwa A_1KML adalah segiempat talibusur

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2010

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2009

DKI JAKARTA, 3 - 9 AGUSTUS 2009

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. $4n^6 + n^3 + 5$
   - Jika $n \equiv 0 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(0)^6 + (0)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv 1 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(1)^6 + (1)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv 2 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(2)^6 + (2)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv 3 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(3)^6 + (3)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv -3 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(-3)^6 + (-3)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv -2 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(-2)^6 + (-2)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv -1 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(-1)^6 + (-1)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$

   Maka tidak ada nilai n asli yang akan menyebabkan $4n^6 + n^3 + 5$ habis dibagi 7.

   $\therefore$ Banyaknya bilangan n yang memenuhi ada **0**.

2. Misalkan $\left\lfloor \frac{a_1+1}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_2+1}{a_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_3+1}{a_4} \right\rfloor = \cdots = p$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif p.

   Misalkan juga terdapat $a_k = 1$ untuk suatu bilangan asli k. Maka berdasarkan pengertian fungsi tangga maka

   $\left\lfloor \frac{a_{k-1}+1}{a_k} \right\rfloor = a_{k-1} + 1 = p \geq 2$ sebab a_{k-1} merupakan bilangan asli.

   $\left\lfloor \frac{a_k+1}{a_{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{a_{k+1}} \right\rfloor = p \leq 2$ sebab a_{k+1} merupakan bilangan asli.

   Akibatnya haruslah $a_{k-1} = a_{k+1} = a_k = 1$. Jadi, haruslah $a_1 = 1$. Kontradiksi.

   Jadi, $a_n \neq 1$ untuk setiap bilangan asli n.

   Berdasarkan pengertian fungsi tangga maka

   $\frac{a_{m-1}+1}{a_m} \geq p$ untuk suatu bilangan asli m > 1 sehingga $\frac{a_{m-1}}{a_m} \geq p - \frac{1}{a_m}$. Dengan cara yang sama didapat

   $\frac{a_{m-2}}{a_{m-1}} \geq p - \frac{1}{a_{m-1}}$. Demikian seterusnya.

   Misalkan k < m untuk suatu bilangan asli k. Maka

   $$\frac{a_k}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \cdots\cdots \frac{a_{m-1}}{a_m} = \frac{a_k}{a_m} \geq \left(p - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\left(p - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\cdots\left(p - \frac{1}{a_m}\right).$$

   Jika $p \geq 2$ maka $\frac{a_k}{a_m} > 1$ sehingga $a_k > a_m$ untuk setiap bilangan asli k, m dan k < m.

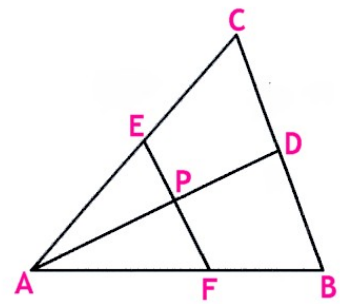
   Jadi, jika $p \geq 2$ maka $a_1, a_2, a_3, \cdots$ merupakan barisan turun.

   Karena a_1 memiliki suatu nilai tertentu maka akan terdapat $a_n < 1$ untuk suatu bilangan asli n. Kontradiksi karena a_n merupakan bilangan asli. Jadi, haruslah $p \leq 1$.

   2, 3, 2, 3, 2, ⋯ adalah contoh barisan untuk p = 1 sedangkan 2, 4, 6, ⋯ adalah contoh barisan untuk p = 0.

   $\therefore$ **Terbukti bahwa** $\left\lfloor \frac{a_n+1}{a_{n+1}} \right\rfloor \leq$ **1**.

3.



Alternatif 1 :

Misalkan [XYZ] menyatakan luas segitiga XYZ.

ΔACD dan ΔABC memiliki tinggi yang sama sehingga luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas. Maka $\frac{[ADC]}{[ABC]} = \frac{DC}{BC}$ .... (1).

ΔABD dan ΔABC juga memiliki tinggi yang sama sehingga $\frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{DB}{BC}$ .... (2).

Misalkan $\angle$DAC = α dan $\angle$BAD = β.

$\frac{[ADC]}{[APE]} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot AP\cdot AE\cdot \sin\alpha} = \frac{AC\cdot AD}{AP\cdot AE}$ .... (3)

$\frac{[ABD]}{[AFP]} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot \sin\beta}{\frac{1}{2}\cdot AP\cdot AF\cdot \sin\beta} = \frac{AD\cdot AB}{AP\cdot AF}$ .... (4)

$\frac{AB}{AF}\cdot DC + \frac{AC}{AE}\cdot DB = \frac{AB}{AF}\cdot\frac{[ADC]}{[ABC]}\cdot BC + \frac{AC}{AE}\cdot\frac{[ABD]}{[ABC]}\cdot BC = \frac{AB}{AF}\cdot\frac{AD.AC}{AP.AE}\cdot\frac{[APE]}{[ABC]}BC + \frac{AC}{AE}\cdot\frac{AD.AB}{AP.AF}\cdot\frac{[AFP]}{[ABC]}\cdot BC$

Karena [AFE] = [APE] + [AFP] maka

$\frac{AB}{AF}\cdot DC + \frac{AC}{AE}\cdot DB = \frac{AB}{AF}\cdot\frac{AD.AC}{AP.AE}\cdot\frac{[AFE]}{[ABC]}BC$

Karena $\frac{[AFE]}{[ABC]} = \frac{AF.AE}{AB.AC}$ maka

$\frac{AB}{AF}\cdot DC + \frac{AC}{AE}\cdot DB = \frac{AD}{AP}\cdot BC$

$\therefore$ $\frac{AB}{AF}\cdot$ **DC +** $\frac{AC}{AE}\cdot$**DB =** $\frac{AD}{AP}\cdot$**BC** (terbukti)

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(a, 0) dan C(b, c) serta absis titik D, E dan F berturut-turut d, e dan f, maka koordinat F(f, 0).

Persamaan garis AC adalah y = $\frac{c}{b}$x sehingga koordinat E(e, $\frac{ce}{b}$).

Persamaan garis EF adalah $\frac{y-0}{\frac{ce}{b}-0} = \frac{x-f}{e-f}$ yang setara dengan y = $\frac{cex-cef}{be-bf}$.

Persamaan garis BC adalah $\frac{y-0}{c-0} = \frac{x-a}{b-a}$ yang setara dengan y = $-c\left(\frac{x-a}{a-b}\right)$.

Maka koordinat titik D(d, $c\left(\frac{a-d}{a-b}\right)$).

Persamaan garis AD adalah y = $\left(\frac{ac-cd}{ad-bd}\right)$x.

Titik P adalah perpotongan antara garis EF dan AD maka

$\frac{cex_P-cef}{be-bf} = \left(\frac{ac-cd}{ad-bd}\right)x_P$

$adex_P - bdex_P - adef + bdef = abex_P - bdex_P - abfx_P + bdfx_P$

$x_P = \frac{def(a-b)}{ade+abf-bdf-abe}$

Karena A, F dan B berada pada satu garis lurus maka $\frac{AB}{AF} = \frac{x_B-x_A}{x_F-x_A} = \frac{a}{f}$ .... (1)

Karena A, E dan C berada pada satu garis lurus maka $\frac{AC}{AE} = \frac{x_C - x_A}{x_E - x_A} = \frac{b}{e}$ .... (2)

Karena C, D dan B berada pada satu garis lurus maka $\frac{DC}{BC} = \frac{x_D - x_C}{x_B - x_C} = \frac{d-b}{a-b}$ .... (3)

Karena C, D dan B berada pada satu garis lurus maka $\frac{DB}{BC} = \frac{x_B - x_D}{x_B - x_C} = \frac{a-d}{a-b}$ .... (4)

Karena A, D dan P berada pada satu garis lurus maka $\frac{AD}{AP} = \frac{x_D - x_A}{x_P - x_A} = \frac{ade+abf-bdf-abe}{ef(a-b)}$ .... (5)

$\frac{AB}{AF}\cdot\frac{DC}{BC} + \frac{AC}{AE}\cdot\frac{DB}{BC} = \frac{a}{f}\cdot\frac{(d-b)}{(a-b)} + \frac{b}{e}\cdot\frac{(a-d)}{(a-b)} = \frac{ade+abf-bdf-abe}{ef(a-b)}$ .... (6)

Dari persamaan (5) dan (6) didapat

$\frac{AB}{AF}\cdot\frac{DC}{BC} + \frac{AC}{AE}\cdot\frac{DB}{BC} = \frac{AD}{AP}$

$\therefore$ $\frac{AB}{AF}\cdot$ **DC +** $\frac{AC}{AE}\cdot$**DB =** $\frac{AD}{AP}\cdot$**BC** (terbukti)

4. Sebuah segmen rel menghubungkan dua kota. Maka jumlah total 'kota' yang muncul dari seluruh segmen haruslah genap. Jika masing-masing kota tepat terhubung dengan tiga kota lainnya maka banyaknya kota yang muncul adalah 3 x 7 = 21 yang ganjil. Maka akan ada sekurang-kurangnya 11 segmen dan ada satu kota yang terhubung dengan sekurang-kurangnya 4 kota.
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan kota yang terhubung dengan sekurang-kurangnya 4 kota tersebut adalah kota A yang terhubung dengan kota B, C, D dan E. Karena sebuah kota terhubung dengan sekurang-kurangnya 3 kota lain maka kota F dan G masing-masing terhubung dengan sedikitnya salah satu dari B, C, D dan E. Akan ada 2 kasus :
   - Kota F atau G terhubung dengan sekurang-kurangnya 2 di antara B, C, D dan E misalkan B dan C, maka bukti selesai sebab akan terdapat rute A – B – F/G – C – A.
   - Kota F dan G masing-masing terhubung dengan salah satu di antara B, C, D dan E.
     Kota F dan G terhubung dengan salah satu di antara B, C, D dan E. Selain itu kota F juga harus terhubung dengan kota A dan G serta kota G juga harus terhubung dengan A.
     Tanpa mengurangi keumuman misalkan kota F terhubung dengan kota B.
     Maka akan terdapat rute A – B – F – G – A.

   $\therefore$ **Terbukti bahwa terdapat rute perjalanan kereta api yang mengunjungi 4 kota yang berbeda masing-masing sekali dan kembali ke kota asalnya.**

5. $\frac{{}_xC_2 + {}_yC_2}{{}_{x+y}C_2} = \frac{1}{2}$

   $\frac{x(x-1)+y(y-1)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{1}{2}$

   $2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y = x^2 + y^2 - x - y + 2xy$

   $(x - y)^2 = x + y \le 2009$

   $x - y \le 44$

   $x + y = (x - y)^2 \le 44^2 = 1936$

   $2x \le 44 + 1936$

   $x \le 990$

   Jika x = 990 maka y = 1936 – 990 = 946.

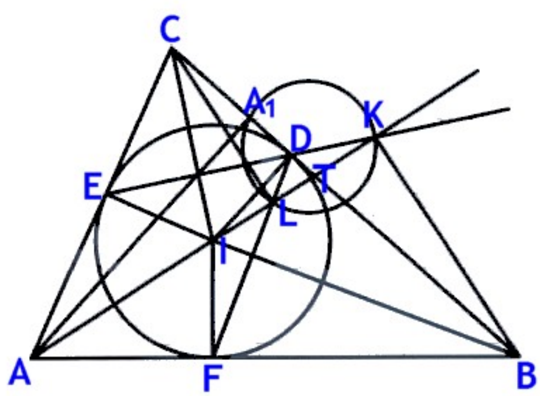
   Peluang = $\frac{{}_{990}C_2 + {}_{946}C_2}{{}_{1936}C_2} = \frac{990\cdot989+946\cdot945}{1936\cdot1935} = = \frac{1}{2}$

   $\therefore$ Jadi, x terbesar adalah **990**.

6. $f(x) = x^{2008} - 2x^{2007} + 3x^{2006} - 4x^{2005} + 5x^{2004} + \cdots - 2006x^3 + 2007x^2 - 2008x + 2009$
   $f(x) = x^{2006}(x-1)^2 + 2x^{2004}(x-1)^2 + 3x^{2002}(x-1)^2 + \cdots + 1004(x-1)^2 + 1005$
   Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka f(x) akan minimal saat x = 1
   f(x) minimal = 1005
   $\therefore$ Jadi, nilai terkecil dari f(x) adalah **1005**.

7. Karena FPB(a, b) = 1 maka pasti ada pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $ax + by = -1$.
   Misalkan $m = ax$ dan $n = by$. Jelas bahwa m dan n keduanya bilangan bulat.
   $n^2 + n = by(by + 1) = by(-ax) = -mn$ yang berarti habis dibagi m.
   $m^2 + m = ax(ax + 1) = ax(-by) = -mn$ yang berarti habis dibagi n.
   Jadi $m \mid n^2 + n$ dan $n \mid m^2 + m$
   Selain itu, dari $m = ax$ dan $n = by$ akan didapat $a \mid m$ dan $b \mid n$.
   Jika $a \mid n$ maka $a \mid y$. Dari $ax + by = -1$ akan didapat bahwa $a \mid 1$ sehingga a = 1 (kontradiksi).
   Jadi, a tidak membagi n. Dengan cara yang sama akan didapat bahwa b tidak membagi m.
   $\therefore$ **Terbukti bahwa terdapat pasangan baik (m, n) dengan $a \mid m$ dan $b \mid n$ tetapi a tidak membagi n dan b tidak membagi m.**

8.



a) $\angle LIC = 180^o - \angle AIC = 180^o - (180^o - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(180^o - (A + B)) = 90^o - \frac{1}{2}B$ .... (1)
   Karena ΔBDF sama kaki maka $\angle BDF = 90^o - \frac{1}{2}B$ .... (2)
   $\angle CDL = 180^o - \angle BDF = 180^o - (90^o - \frac{1}{2}B) = 90^o + \frac{1}{2}B$ .... (3)
   Karena $\angle LIC + \angle CDL = 180^o$ maka CDLI adalah segiempat talibusur.
   Karena CI adalah talibusur suatu lingkaran sedangkan titik D dan L terletak pada lingkaran tersebut maka $\angle CLI = \angle CDI = 90^o$.
   $\therefore$ **Jadi, CL tegak lurus AK yang merupakan garis bagi sudut BAC** (terbukti).
   $\angle AEK = 180^o - \angle CEK = 180^o - (90^o - \frac{1}{2}(180^o - (A + B)) = 180^o - \frac{1}{2}(A + B)$
   $\angle DKI = 180^o - \angle AEK - \angle CAK = 180^o - (180^o - \frac{1}{2}(A + B)) - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$
   Karena $\angle DKI = \angle DBI$ maka titik-titik D, K, B dan I adalah segiempat talibusur.
   Karena BI adalah talibusur suatu lingkaran sedangkan titik D dan K terletak pada lingkaran tersebut maka $\angle BKI = \angle BDI = 90^o$.
   $\therefore$ **Jadi, BK tegak lurus AK yang merupakan garis bagi sudut BAC** (terbukti).

b) Misalkan garis BC dan KL berpotongan di titik T.

Karena $\angle CLT = \angle BKT = 90^o$ dan $\angle BTK = \angle CTL$ maka ΔCLT dan ΔBKT sebangun

$\frac{BK}{CL} = \frac{BT}{CT} = \frac{TK}{LT}$

$\frac{c\sin\frac{1}{2}A}{b\sin\frac{1}{2}A} = \frac{a-CT}{CT} = \frac{TK}{AK-AL-TK}$

$\frac{c}{b} = \frac{a-CT}{CT} = \frac{TK}{c\cos\frac{1}{2}A-b\cos\frac{1}{2}A-TK}$ .... (3)

Dari persamaan (3) didapat

$c \cdot CT = ab - b \cdot CT$

$CT = \frac{ab}{b+c}$ .... (4)

Juga didapat

$c(c-b)\cos\frac{1}{2}A - c \cdot TK = b \cdot TK$

$TK = \frac{c(c-b)\cos\frac{1}{2}A}{b+c}$

$LT = \frac{b}{c} \cdot TK$ .... (5)

Misalkan lingkaran luar ΔA_1LK memotong garis BC di titik N.

Karena $\angle A_1LT = \angle KNT$ dan $\angle A1TL = \angle KTN$ maka ΔKTN sebangun dengan ΔA_1TL. Jadi,

$A_1T \cdot TN = LT \cdot TK$

$(CT - CA_1) \cdot TN = \frac{b}{c} \cdot TK^2$

$\left(\frac{ab}{b+c} - b\cos C\right) \cdot TN = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{c^2(c-b)^2}{2(b+c)^2}(\cos C + 1)\right)$

Dengan menggunakan $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ maka didapat

$TN = \frac{a(c-b)}{2(b+c)}$

$CN = CT + TN = \frac{ab}{b+c} + \frac{a(c-b)}{2(b+c)} = \frac{a}{2}$

Maka, N adalah pertengahan BC. Jadi, N = M.

Jadi, titik A_1, L, K dan M terletak pada satu lingkaran.

∴ **Terbukti bahwa A_1, L, M dan K siklik**.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2010

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2011

Bidang Matematika

Waktu : 180 Menit

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2010

Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA
Seleksi Tingkat Kota/Kabupaten
Tahun 2010

Soal :

1. Diketahui bahwa ada tepat 1 bilangan asli n sehingga $n^2 + n + 2010$ merupakan kuadrat sempurna. Bilangan asli n tersebut adalah ·······

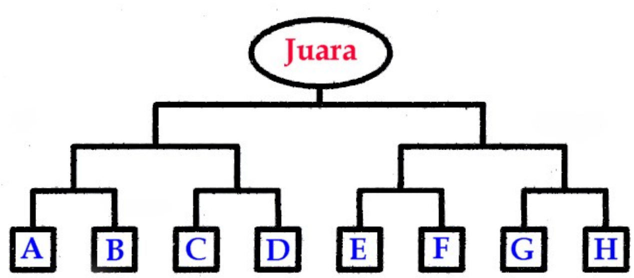
2. Bilangan bulat yang memenuhi pertidaksamaan $x^4 \le 8x^2 - 16$ sebanyak ·····

3. Pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $2x + 5y = 2010$ sebanyak ······

4. Diberikan segitiga ABC, AB = AC. Jika titik P diantara A dan B sedemikian rupa sehingga AP = PC = CB, maka besarnya sudut A adalah ······

5. Nilai n terkecil sehingga bilangan
$$\underbrace{20102010...2010}_{\text{n buah 2010}}$$
habis dibagi 99 adalah ·····

6. Perempat final Liga Champion 2010 diikuti 8 team A, B, C, D, E, F, G dan H yang bertemu seperti tampak dalam undian berikut



Setiap team mempunyai peluang $\frac{1}{2}$ untuk melaju ke babak berikutnya. Peluang kejadian A bertemu G di final dan pada akhirnya A juara adalah ······

7. Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a, b, dan c. Nilai dari $a^3 + b^3 + c^3$ adalah ········

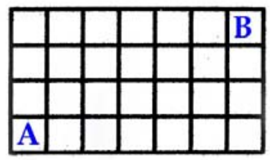
8. Jika a dan b bilangan bulat sehingga $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ merupakan solusi kuadrat $x^2 + ax + b = 0$ maka nilai a + b adalah ·····

9. Banyaknya himpunan X yang memenuhi

$$\{1, 2, 3, \cdots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 2010\}$$

adalah ····

10. Diketahui grid berukuran 4 x 8. Jika langkah yang dimungkinkan Kanan, Kiri, Atas, dan Bawah. Cara menuju B dari A dalam 8 langkah atau kurang ada sebanyak ··· (A adalah titik pada ujung kanan atas pada kotak paling kiri bawah, sedangkan B adalah titik pada ujung kiri bawah pada kotak paling kanan atas)



11. Diberikan segitiga ABC; AC : CB = 3 : 4. Garis bagi luar sudut C memotong perpanjangan BA di P (A terletak antara P dan B). Perbandingan PA : AB adalah ·····

12. Misalkan S menyatakan himpunan semua faktor positif dari 2010^2. Sebuah bilangan diambil secara acak dari S. Peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah ·····

13. Diketahui p adalah bilangan prima sehingga terdapat pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi ada sebanyak ······

14. Pada sebuah persegi panjang berukuran 25 x 20 akan dibuat bujursangkar sehingga menutupi seluruh bagian persegi panjang tersebut. Berapa banyak bujursangkar yang mungkin dapat dibuat ?

15. AB, BC dan CA memiliki panjang 7, 8, 9 berturut-turut. Jika D merupakan titik tinggi dari B, tentukan panjang AD.

16. Jika $-5x + 2000$ merupakan sisa pembagian suku banyak P(x) oleh $x^2 - x - 2$, maka sisa pembagian P(x) oleh x + 2 adalah ·····

17. Diketahui n adalah bilangan asli. Jika himpunan penyelesaian dari

$$\sqrt[n]{x^{x^2}} \le x^{\sqrt[n]{x^2}}$$

adalah $\{x \mid 0 < x \leq \sqrt[5]{216}\}$, maka n = ……

18. Misalkan persegi 4 x 4 akan diberi warna hitam dan putih pada tiap kotaknya. Cara pewarnaan sedemikian sehingga warna hitam hanya diberikan pada 3 kotak dan sisanya warna putih sebanyak …… (Pewarnaan dianggap sama jika didapat dari hasil rotasi yang sama terhadap persegi 4 x 4)

19. Nilai x yang memenuhi $0 \leq x \leq \pi$ dan

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\tfrac{x}{2^{2010}}\right)$$

adalah ····

20. Diketahui segitiga ABC siku-siku di A, dan pada masing-masing sisi dibuat setengah lingkaran ke arah keluar. Jika luas setengah lingkaran pada sisi AB dan AC adalah 396 dan 1100, berturut-turut, maka luas setengah lingkaran pada sisi BC adalah ?

.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA 2010

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

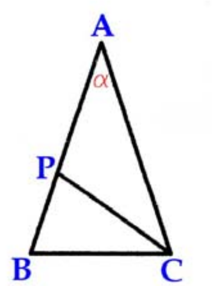
Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Misalkan $n^2 + n + 2010 = k^2$ untuk suatu bilangan asli k.
   $n^2 + n + 2010 - k^2 = 0$ yang merupakan persamaan kuadrat dalam n.
   Karena n bilangan bulat maka diskriminan persamaan tersebut harus merupakan bilangan kuadrat sempurna.
   $1^2 - 4(1)(2010 - k^2) = m^2$ untuk suatu bilangan asli m.
   $8039 = 4k^2 - m^2 = (2k + m)(2k - m)$
   Karena 8039 merupakan bilangan prima maka
   $2k + m = 8039$ dan $2k - m = 1$
   Maka $4k = 8040$ sehingga $k = 2010$ dan $m = 4019$
   Jadi $n^2 + n + 2010 = 2010^2$
   $(n - 2009)(n + 2010) = 0$
   $\therefore$ Jadi, bilangan asli n yang memenuhi adalah n = **2009**.

2. $x^4 \le 8x^2 - 16$
   $(x^2 - 4)^2 \le 0$
   Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah $x^2 - 4 = 0$
   Bilangan bulat x yang memenuhi adalah $x = 2$ atau $x = -2$.
   $\therefore$ Jadi, bilangan bulat x yang memenuhi ada sebanyak **2**.

3. $2x + 5y = 2010$ untuk pasangan bilangan asli (x, y)
   Karena 5y dan 2010 habis dibagi 5 maka x habis dibagi 5 sehingga $x = 5a$ dengan $a \in N$.
   Karena 2x dan 2010 habis dibagi 2 maka y habis dibagi 2 sehingga $y = 2b$ dengan $b \in N$.
   $10a + 10b = 2010$
   $a + b = 201$
   Karena $a, b \in N$ maka ada 200 pasangan (a, b) yang memenuhi sehingga ada 200 pasangan (x, y) yang memenuhi.
   $\therefore$ Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi ada sebanyak **200**.

4. Misalkan besarnya sudut A = α



   Karena AP = PC maka $\angle ACP = \alpha$ sehingga $\angle BPC = 2\alpha$.
   Karena PC = CB maka $\angle CBP = 2\alpha$ sehingga $\angle PCB = 180^o - 4\alpha$
   Karena AB = AC maka $\angle CBP = \angle ACB = \angle ACP + \angle PCB$
   $2\alpha = (\alpha) + (180^o - 4\alpha)$
   $\alpha = 36^o$
   $\therefore$ Jadi, besarnya sudut A adalah $\mathbf{36^o}$.

5. Misalkan M = $\underbrace{20102010...2010}_{\text{n buah 2010}}$ habis dibagi 99.
   Karena M habis dibagi 99 maka M habis dibagi 9 dan 11.
   Jumlah angka-angka M = 3n yang harus habis dibagi 9 sebab M habis dibagi 9.
   Selisih jumlah angka pada posisi genap dan posisi ganjil dari M sama dengan 3n yang harus habis dibagi 11 sebab M habis dibagi 11.
   Jadi, 3n habis dibagi 9 dan 11.
   Nilai terkecil n yang memenuhi adalah 33.
   $\therefore$ Jadi, nilai terkecil n yang memenuhi adalah **33**.

6. Hanya ada 5 pertandingan yang berpengaruh sehingga tercapai hasil A bertemu G di final dan A menjadi juara yaitu A mengalahkan B, A mengalahkan pemenang C atau D, G mengalahkan H, G mengalahkan E atau F dan A mengalahkan G.
   Pada masing-masing pertandingan, peluang salah satu tim tertentu memenangkan pertandingan adalah $\frac{1}{2}$. Maka peluang A mengalahkan G di final adalah $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
   $\therefore$ Jadi, peluang A mengalahkan G di final adalah $\frac{1}{32}$.

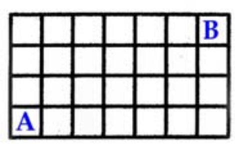
7. Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a, b dan c. Maka
   $a + b + c = 1$
   $ab + ac + bc = 1$
   $abc = 2$
   Alternatif 1 :
   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + ac + bc)(a + b + c) - 3abc$
   $1^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(1)(1) - 3(2)$
   $a^3 + b^3 + c^3 = 4$
   Alternatif 2 :
   Karena a, b, dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ maka
   $a^3 - a^2 + a - 2 = 0$
   $b^3 - b^2 + b - 2 = 0$
   $c^3 - c^2 + c - 2 = 0$
   Jumlahkan ketiga persamaan didapat
   $a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) - 6 = 0$
   $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) - (a + b + c) + 6$
   $a^3 + b^3 + c^3 = 1^2 - 2(1) - 1 + 6$
   $a^3 + b^3 + c^3 = 4$
   $\therefore$ Jadi, nilai $a^3 + b^3 + c^3 =$ **4.**

8. $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = \sqrt{2009} + 1$
   Alternatif 1 :
   $\sqrt{2009} + 1$ merupakan solusi persamaan $x^2 + ax + b = 0$, maka
   $(\sqrt{2009} + 1)^2 + a(\sqrt{2009} + 1) + b = 0$

$2010 + 2\sqrt{2009} + a\sqrt{2009} + a + b = 0$
Karena a dan b bilangan bulat maka
$2\sqrt{2009} + a\sqrt{2009} = 0$ dan $2010 + a + b = 0$
Didapat a = –2 dan b = –2008
Maka a + b = –2010
Alternatif 2 :
$x^2 + ax + b = 0$
$x_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$
Maka $\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} = \sqrt{2009}+1$
$-a + \sqrt{a^2-4b} = 2\sqrt{2009} + 2$
Karena a dan b bilangan bulat maka –a = 2 sehingga a = –2
$a^2 - 4b = 4 \cdot 2009$
1 – b = 2009 sehingga b = –2008
Maka a + b = –2 – 2008 = –2010.
∴ Jadi, a + b = **–2010**.

9. $\{1, 2, 3, \cdots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 2010\}$
Jika H memiliki k elemen maka banyaknya himpunan bagian dari H adalah 2^k.
Elemen 1, 2, 3, ⋯, 1000 haruslah merupakan elemen dari X. Persoalannya sama saja dengan
$X \subseteq \{1001, 1002, 1003, \cdots, 2010\}$
Banyaknya himpunan bagian dari X tersebut adalah 2^{1010}.
∴ Jadi, banyaknya himpunan X yang memenuhi adalah $\mathbf{2^{1010}}$.

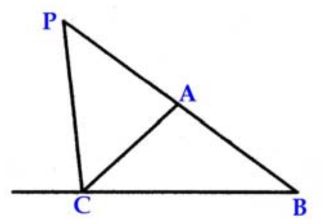
10. Jalan terpendek dari A ke B adalah jika jalannya hanya Kanan dan Atas saja. Ukuran grid 4 x 7.



Banyaknya langkah terpendek adalah 7 sebab banyaknya langkah ke Kanan ada 5 dan ke Atas ada 2. Tidak ada jalan dengan banyaknya langkah tepat 8 sebab jika berjalan ke Kiri atau ke Bawah sekali, maka banyaknya langkah terpendek yang diperlukan adalah 9.
Jadi cukup dihitung banyaknya jalan dengan banyaknya langkah tepat 7.
Alternatif 1 :
Misalkan langkah ke Kanan diberi tanda 1 dan langkah ke Atas diberi tanda 2. Maka persoalannya sama dengan banyaknya susunan angka-angka 1111122, yaitu melangkah ke Kanan sebanyak 5 kali dan melangkah ke Atas sebanyak 2 kali.
Banyaknya susunan bilangan 1111122 sama dengan $\frac{7!}{5!\cdot 2!}$ = 21.
Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan **21**.
Alternatif 2 :
Banyaknya langkah ada 7. Dua di antaranya adalah ke Atas dan 5 ke Kanan. Maka persoalan ini adalah sama dengan menempatkan 5 obyek identik pada 7 tempat berbeda.
Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan ${}_7C_2$ = **21**.
∴ Jadi, banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan **21**.

Catatan : Ada perbedaan antara kata-kata pada soal dan gambar pada soal. Berdasarkan kata-kata pada soal maka ukuran gridnya adalah 4 x 8 sedangkan pada gambar ukuran gridnya adalah 4 x 7. Kunci jawaban dari pusat mengacu pada gambar. Jika yang diacu adalah kata-kata pada soal maka jawabannya adalah ${}_8C_2$ = 28.

11.



PC adalah garis bagi ΔABC sehingga berlaku

$\frac{CB}{AC} = \frac{PB}{PA}$

$\frac{4}{3} = \frac{PB}{PA}$

Maka dapat dimisalkan PB = 4k dan PA = 3k sehingga AB = k

Maka PA : AB = 3k : k = 3 : 1

∴ Jadi, perbandingan PA : AB adalah **3 : 1.**

12. $2010^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 67^2$.

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$

Faktor-faktor positif dari 2010^2 akan berbentuk $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 67^d$ dengan $0 \le a, b, c, d \le 2$ dengan a, b, c, d bilangan bulat.

Banyaknya faktor positif $2010^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Agar faktor tersebut merupakan kelipatan 2010 maka $1 \le a \le 2$, $1 \le b \le 2$, $1 \le c \le 2$, $1 \le d \le 2$.

Banyaknya faktor positif 2010^2 yang merupakan kelipatan $2010 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

∴ Jadi, peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah $\frac{16}{81}$

13. $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$

$(x - y)(x + 2y) = 30p$

Jika x dan y keduanya tidak memiliki sisa yang sama jika dibagi 3 maka x − y dan x + 2y keduanya tidak ada yang habis dibagi 3. Padahal 30p habis dibagi 3. Jadi, x dan y haruslah keduanya memiliki sisa yang sama jika dibagi 3.

Akibatnya x − y dan x + 2y masing-masing habis dibagi 3 sehingga 30p harus habis dibagi 9.

Karena 30 habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 9 maka p harus habis dibagi 3.

Karena p adalah bilangan prima maka p = 3.

$(x - y)(x + 2y) = 90$

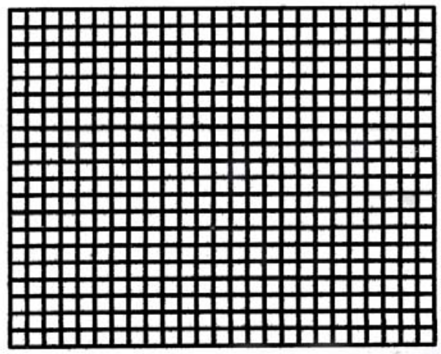
Karena $x + 2y \ge x - y$ maka akan ada 2 kasus.

* x + 2y = 30 dan x − y = 3
  Didapat x = 12 dan y = 9
* x + 2y = 15 dan x − y = 6
  Didapat x = 9 dan y = 3

Maka pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi adalah (12, 9) dan (9, 3).

∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi ada sebanyak **2.**

14. Perhatikan gambar.

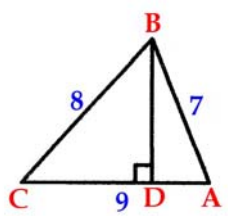


Banyaknya persegi dengan ukuran 1 x 1 ada sebanyak 25 x 20 = 500
Banyaknya persegi dengan ukuran 2 x 2 ada sebanyak 24 x 19 = 456
Banyaknya persegi dengan ukuran 3 x 3 ada sebanyak 23 x 18 = 414

$\vdots$

Banyaknya persegi dengan ukuran 20 x 20 ada sebanyak 6 x 1 = 6
Banyaknya semua persegi yang ada = 500 + 456 + 414 + ··· + 6 = 3920.
∴ Jadi, banyaknya semua persegi yang ada = **3920**.

15. Perhatikan gambar.



Alternatif 1 :

s = $\frac{1}{2}$(a + b + c) = 12

Dengan rumus Heron didapat

[ABC] = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ = $12\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}$ · AC · BD = $12\sqrt{5}$

9 · BD = $24\sqrt{5}$ sehingga BD = $\frac{8}{3}\sqrt{5}$

$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 49 - \frac{320}{9} = \frac{121}{9}$

AD = $\frac{11}{3}$

Alternatif 2 :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$8^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cos A$

cos A = $\frac{11}{21}$

AD = AB cos A = $7 \cdot \frac{11}{21}$

AD = $\frac{11}{3}$

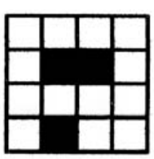
∴ Jadi, panjang AD = $\frac{11}{3}$

16. $P(x) = Q(x) \cdot (x + 2)(x - 1) - 5x + 2000$
$P(-2) = 0 - 5(-2) + 2000 = 2010$
$P(-2)$ menyatakan sisa jika $P(x)$ dibagi $x + 2$.
$\therefore$ Jadi, sisa jika $P(x)$ dibagi $x + 2$ adalah **2010**.
Catatan : Soal aslinya adalah $P(x)$ dibagi $x^2 - x - 2$ bersisa $-5x + 2000$, tetapi Penulis berkeyakinan seharusnya adalah $P(x)$ dibagi $x^2 + x - 2$ bersisa $-5x + 2000$.

17. Penyelesaian $\sqrt[n]{x^{x^2}} \le x^{\sqrt[n]{x^2}}$ dipenuhi oleh $\{x \mid 0 < x \le \sqrt[5]{216}\}$ untuk suatu bilangan asli n.
$x^{\frac{x^2}{n}} \le x^{x^{\frac{2}{n}}}$
- Jika $x \ge 1$ maka
$\frac{x^2}{n} \le x^{\frac{2}{n}}$
$x \le n^{\frac{n}{2n-2}}$
- Jika $0 < x < 1$ maka
$\frac{x^2}{n} \ge x^{\frac{2}{n}}$
$x \ge n^{\frac{n}{2n-2}}$
Karena n bilangan asli maka $n^{\frac{n}{2n-2}} \ge 1$.
- Jika $x < 0$ maka karena $\frac{x^2}{n}$ dan $x^{\frac{2}{n}}$ tidak dapat dipastikan merupakan bilangan rasional maka tidak ada definisi jika $x < 0$.

Maka penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah $1 \le x \le n^{\frac{n}{2n-2}}$.
Karena penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah $0 < x \le \sqrt[5]{216} = 6^{\frac{3}{5}}$ maka
$n = 6^k$ dan $\frac{n}{2n-2} = \frac{3}{5k}$ untuk suatu bilangan asli k.
$6^k \cdot 5k = 6 \cdot 6^k - 6$
$6^{1-k} = 6 - 5k$
Jika $k > 1$ maka ruas kiri merupakan pecahan sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sehingga tidak akan tercapai kesamaan.
Jika $k = 1$ maka $1 = 6 - 5(1)$ yang memenuhi persamaan.
Jadi, $n = 6^1 = 6$
$\therefore$ Jadi, nilai bilangan asli n yang memenuhi adalah **n = 6**.
Catatan : Terbukti bahwa dalam batas $0 < x < 1$ tidak memenuhi ketaksamaan. Maka pada soal, himpunan penyelesaian ketaksamaan tersebut seharusnya $\{x \mid 1 \le x \le \sqrt[5]{216}\}$

18. Perhatikan gambar. Rotasi yang dimaksud adalah 90^o, 180^o dan 270^o sehingga jika sebuah petak berwarna hitam dirotasi akan timbul 3 petak lain yang berbeda dengan petak semula. Jadi, jika 3 petak berwarna hitam dirotasikan maka tidak akan ada hasilnya yang menempati ketiga petak semula.



Persoalan ini sama saja dengan banyaknya memilih 3 petak dari 16 petak yang ada = ${}_{16}C_3$ lalu hasilnya dapat dibagi ke dalam ${}_{16}C_4$: 4 kelompok dengan masing-masing kelompok merupakan rotasi dari petak-petak lainnya.

Maka banyaknya cara pewarnaan = $\frac{{}_{16}C_3}{4}$ = 140.

$\therefore$ Jadi, banyaknya cara pewarnaan = **140**.

19. sin α cos α = $\frac{1}{2}$ sin 2α

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

$1 = 2^{2010}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$

$1 = 2^{2009}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\sin\left(\frac{x}{2^{2009}}\right)$

$1 = 2^{2008}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\sin\left(\frac{x}{2^{2008}}\right)$

Sehingga didapat

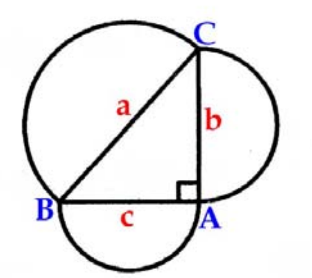
$1 = \sqrt{2}\sin x$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

Maka x = $\frac{\pi}{4}$ atau x = $\frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ Jadi, nilai x yang memenuhi adalah **x = $\frac{\pi}{4}$ atau x = $\frac{3\pi}{4}$**

20. Perhatikan gambar.



Luas setengah lingkaran AB = $\frac{1}{8}\pi c^2$ = 396.

Luas setengah lingkaran AC = $\frac{1}{8}\pi b^2$ = 1100.

Luas setengah lingkaran BC = $\frac{1}{8}\pi a^2 = \frac{1}{8}\pi(b^2 + c^2)$ = 1100 + 396 = 1496.

$\therefore$ Jadi, luas setengah lingkaran pada sisi BC sama dengan **1496**.

Catatan : Kunci dari pusat terhadap persoalan ini adalah 704 yang menurut Penulis, kesalahannya ada pada segitiga ABC siku-siku di A yang mungkin seharusnya di B atau C.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2010

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

Waktu : 210 Menit

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2010

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA

Petunjuk untuk peserta :

1. Tes terdiri dari dua bagian. Tes bagian pertama terdiri dari 20 soal isian singkat dan tes bagian kedua terdiri dari 5 soal uraian.

2. Waktu yang disediakan untuk menyelesaikan semua soal adalah 210 menit.

3. Tuliskan nama, kelas dan asal sekolah Anda di sebelah kanan atas pada setiap halaman.

4. Untuk soal bagian pertama :
   (a) Masing-masing soal bagian pertama bernilai 1 (satu) angka.
   (b) Beberapa pertanyaan dapat memiliki lebih dari satu jawaban yang benar. Anda diminta memberikan jawaban yang paling tepat atau persis untuk pertanyaan seperti ini. Nilai hanya akan diberikan kepada pemberi jawaban paling tepat atau paling persis.
   (c) Tuliskan hanya jawaban dari soal yang diberikan. Tuliskan jawaban tersebut pada kotak di sebelah kanan setiap soal.

5. Untuk soal bagian kedua :
   (a) Masing-masing soal bagian kedua bernilai 7 (tujuh) angka
   (b) Anda diminta menyelesaikan soal yang diberikan secara lengkap. Selain jawaban akhir, Anda diminta menuliskan semua langkah dan argumentasi yang Anda gunakan untuk sampai kepada jawaban akhir tersebut.
   (c) Jika halaman muka tidak cukup, gunakan halaman sebaliknya.

6. Jawaban hendaknya Anda tuliskan dengan menggunakan tinta, bukan pensil.

7. Selama tes, Anda tidak diperkenankan menggunakan buku, catatan dan alat bantu hitung. Anda juga tidak diperkenankan bekerja sama.

8. Mulailah bekerja hanya setelah pengawas memberi tanda dan berhentilah bekerja segera setelah pengawas memberi tanda.

9. Selamat bekerja.

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN PERTAMA

1. Nilai

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right) = \cdots\cdots\cdots$$

2. Pada segitiga ABC dimisalkan a, b, dan c berturut-turut merupakan panjang sisi BC, CA, dan AB. Jika

$$\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B}$$

Maka nilai $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B}$ adalah ⋯⋯

3. Diberikan polinomial $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan a, b, c, dan d konstanta. Jika P(1) = 10, P(2) = 20, dan P(3) = 30, maka nilai

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10} = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

4. Misalkan S = {1, 2, 3, 4, 5}. Banyaknya fungsi f : S → S yang memenuhi f(f(x)) = x untuk setiap $x \in S$ adalah ⋯⋯⋯

5. Jika a, b, dan c menyatakan panjang sisi-sisi suatu segitiga yang memenuhi $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, maka besar sudut yang menghadapi sisi dengan panjang c adalah ⋯⋯⋯

6. Bilangan enam digit $\overline{abcdef}$ dengan $a > b > c \geq d > e > f$ ada sebanyak ⋯⋯⋯

7. Bilangan prima p sehingga $p^2 + 7^3$ merupakan bilangan kubik sebanyak ⋯⋯

8. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C, AC = 3, dan BC = 4. Segitiga ABD siku-siku di A, AD = 12 dan titik-titik C dan D letaknya berlawanan terhadap sisi AB. Garis sejajar AC melalui D memotong perpanjangan CB di E. Jika

$$\frac{DE}{DB} = \frac{m}{n}$$

dengan m dan n bilangan bulat positif yang relatif prima, maka m + n = ⋯⋯

9. Pada suatu lingkaran terdapat 12 titik yang berbeda. Dengan menggunakan 12 titik tersebut akan dibuat 6 tali busur yang tidak berpotongan. Banyaknya cara ada sebanyak ⋯⋯

10. Banyaknya anggota himpunan

$$S = \{gcd(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) \mid n \in Z\}$$

adalah ·····

11. Persamaan kuadrat $x^2 - px - 2p = 0$ mempunyai dua akar real α dan β. Jika $\alpha^3 + \beta^3 = 16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah ······

12. Pada suatu bidang terdapat n titik yang berkoordinat pasangan bilangan bulat. Nilai n terkecil agar terdapat dua titik yang titik tengahnya juga berkoordinat pasangan bilangan bulat adalah ···

13. Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan dengan x. Bilangan asli n sehingga persamaan $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \frac{1}{x}\lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$ mempunyai tepat 2010 solusi real positif adalah ······

14. Dua lingkaran (tidak sama besar) bersinggungan di luar. Titik A dan A_1 terletak pada lingkaran kecil; sedangkan B dan B_1 pada lingkaran besar. Garis PAB dan PA_1B_1, merupakan garis singgung persekutuan dari kedua lingkaran tersebut. Jika PA = AB = 4, maka luas lingkaran kecil adalah ····

15. Dua puluh tujuh siswa pada suatu kelas akan dibuat menjadi enam kelompok diskusi yang masing-masing terdiri dari empat atau lima siswa. Banyaknya cara adalah ·····

16. Seseorang menulis surat berantai kepada 6 orang. Penerima surat ini diperintahkan untuk mengirim surat kepada 6 orang lainnya. Semua penerima surat membaca isi surat lalu beberapa orang melaksanakan perintah yang tertulis dalam surat, sisanya tidak melanjutkan surat berantai ini. Jika terdapat 366 orang yang tidak melanjutkan surat berantai ini, maka banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai ini adalah ······

17. Jumlah suku konstan dari $\left(x^5 - \frac{2}{x^3}\right)^8$ adalah ·······

18. Banyak bilangan bulat positif n < 100, sehingga persamaan

$$\frac{3xy - 1}{x + y} = n$$

mempunyai solusi pasangan bilangan bulat (x, y) adalah ········

19. Diketahui x, y, dan z adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$xyz = 1$$

Nilai terkecil $|x + y + z|$ adalah ·······

20. Segitiga ABC memiliki panjang sisi BC = 5, AC = 12, dan AB = 13. Titik D pada AB dan titik E pada AC. Jika DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama, maka panjang minimum DE adalah ······

SELEKSI TINGKAT PROVINSI
CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN KEDUA

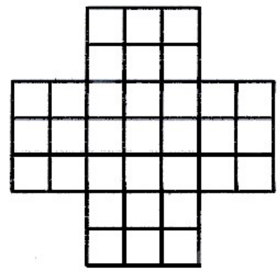
1. Diberikan segitiga ABC. Andaikan P dan P_1 titik-titik pada BC, Q pada CA, dan R pada AB, sedemikian rupa sehingga
$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B}$$
Misalkan G titik berat segitiga ABC dan K = $AP_1 \cap RQ$. Buktikan, bahwa titik-titik P, G, dan K kolinier (terletak pada satu garis)

2. Diketahui k adalah bilangan bulat positif terbesar, sehingga dapat ditemukan bilangan bulat positif n, bilangan prima (tidak harus berbeda) $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k$, dan bilangan prima berbeda $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_k$ yang memenuhi
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{7 + nq_1q_2\cdots q_k}{2010}$$
Tentukan banyaknya n yang memenuhi.

3. Tentukan nilai k dan d sehingga tidak ada pasangan bilang real (x, y), yang memenuhi sistem persamaan
$$x^3 + y^3 = 2$$
$$y = kx + d$$

4. Diketahui n adalah bilangan asli kelipatan 2010. Tunjukan, bahwa persamaan
$$x + 2y + 3z = 2n$$
mempunyai tepat $1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12}$ pasangan solusi (x, y, z) dengan x, y, dan z merupakan bilangan bulat tak negatif.

5. Diketahui suatu papan catur seperti pada gambar. Dapatkah suatu biji catur kuda berangkat dari suatu petak melewati setiap petak yang lain hanya satu kali dan kembali ke tempat semula ? Jelaskan jawab anda !



Penjelasan : Langkah catur kuda berbentuk L, yaitu dari kotak asal :
(a) 2(dua) kotak ke kanan/kiri dan 1(satu) kotak ke depan/belakang; atau
(b) 2(dua) kotak ke depan/belakang dan 1 (satu) kotak ke kanan/kiri.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2010

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN PERTAMA

1. $(x + 1)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots \binom{n}{n}x^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$. Maka

   $\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i = (8 + 1)^j = 9^j$

   $\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}9^j = (9 + 1)^n = 10^n$

   $\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right) = 10^n$

   ∴ Jadi, $\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right)$ = $\mathbf{10^n}$.

2. $\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B}$ .... (1)

   Dalil sinus

   $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ .... (2)

   Bandingkan persamaan (1) dengan (2) didapat

   2 cos A = cos B

   $4\cos^2 A = \cos^2 B$ .... (3)

   $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B} = \frac{1-\cos^2 A - 1 + \cos^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B} = \frac{4\cos^2 A - \cos^2 A}{\cos^2 A + 4\cos^2 A}$

   $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B} = \frac{3}{5}$

   ∴ Nilai $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B}$ adalah $\frac{3}{5}$.

3. $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

   P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30

   Misalkan Q(x) = P(x) − 10x

   Karena P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30 maka Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0

   $Q(x) = P(x) - 10x = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 10x + d$ yang juga merupakan polinomial dengan derajat 4 serta 1, 2, dan 3 merupakan akar-akar Q(x) = 0

   Jadi, Q(x) = (x − 1)(x − 2)(x − 3)(x − k)

   P(x) = Q(x) + 10x

   P(12) = (12 − 1)(12 − 2)(12 − 3)(12 − k) + 120 = 990(12 − k) + 120

   P(−8) = (−8 − 1)(−8 − 2)(−8 − 3)(−8 − k) − 80 = 990(8 + k) − 80

   P(12) + P(−8) = (990(12 − k) + 120) + (990(8 + k) − 80) = 990 · 20 + 40

   $\frac{P(12)+P(-8)}{10} = 99 \cdot 20 + 4 = 1984$

   ∴ $\frac{P(12)+P(-8)}{10}$ = **1984.**

4. Ada 2 hal berkenan dengan pemetaan $S \rightarrow S$ yang memenuhi $f(f(x)) = x$, yaitu
   - Hal 1, pemetaan $f(y) = y$ untuk $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ akan menyebabkan $f(f(y)) = y$
   - Hal 2, terdapat sepasang pemetaan $f(a) = b$ dan $f(b) = a$ untuk $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang akan menyebabkan $f(f(a)) = a$ dan $f(f(b)) = b$.

   Pada hal 2 dibutuhkan sepasang pemetaan sehingga hal tersebut akan menyebabkan 3 kasus :
   a. Kasus 1, tidak ada pemetaan pada hal 2 dan terdapat 5 pemetaan pada hal 1
      Banyaknya fungsi yang memenuhi = ${}_5C_0 \cdot {}_5C_5 = 1$
      Contoh fungsi yang memenuhi : $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, $f(5) = 5$.
   b. Kasus 2, ada sepasang pemetaan pada hal 2 dan terdapat 3 pemetaan pada hal 1
      Banyaknya fungsi yang memenuhi = ${}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 10$
      Contoh fungsi yang memenuhi : $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$, $f(5) = 5$.
   c. Kasus 3, ada 2 pasang pemetaan pada hal 2 dan terdapat 1 pemetaan pada hal 1
      Banyaknya fungsi yang memenuhi = ${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$.
      Perhitungan di atas memperhitungkan x_1 dan x_2 dipilih pada pemilihan pertama dan x_3 dan x_4 dipilih pada pemilihan kedua dihitung berbeda jika x_3 dan x_4 dipilih pada pemilihan pertama dan x_1 dan x_2 dipilih pada pemilihan kedua. Padahal kedua hal tersebut sama. Maka perhitungan tersebut harus dibagi 2.
      Banyaknya fungsi yang memenuhi = $\frac{1}{2} \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 15$.
      Contoh fungsi yang memenuhi : $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$, $f(5) = 5$.

   Total banyaknya fungsi yang memenuhi = 1 + 10 + 15 = 26.
   ∴ Banyaknya fungsi yang memenuhi ada **26**.

5. $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$
   $(a + b)^2 - c^2 = 3ab$
   $a^2 + b^2 - c^2 = ab$
   $2ab \cos C = ab$
   $\cos C = \frac{1}{2}$
   $C = 60^o$
   ∴ Besar sudut yang menghadap sisi dengan panjang c adalah **60^o**.

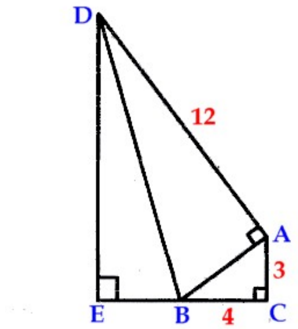
6. Karena $a > b > c \geq d > e > f$ maka ada 2 kasus
   - Jika $a > b > c > d > e > f$
     Banyaknya bilangan yang memenuhi sama dengan banyaknya cara memilih 6 angka dari 10 angka berbeda, yaitu ${}_{10}C_6 = 210$
   - Jika $a > b > c = d > e > f$
     Banyaknya bilangan yang memenuhi sama dengan banyaknya cara memilih 5 angka dari 10 angka berbeda, yaitu ${}_{10}C_5 = 252$

   Maka banyaknya bilangan abcdef yang memenuhi $a > b > c \geq d > e > f$ = 210 + 252 = 462.
   ∴ Banyaknya bilangan enam angka yang memenuhi tersebut sama dengan **462**.

7. Misalkan $p^2 + 7^3 = k^3$ dengan k suatu bilangan asli.
   $p^2 = (k - 7)(k^2 + 7k + 49)$
   Karena p bilangan prima dan jelas bahwa $k - 7 < k^2 + 7k + 49$ maka kesamaan tersebut hanya terjadi jika $k - 7 = 1$ dan $k^2 + 7k + 49 = p^2$ sehingga didapat $k = 8$

$k^2 + 7k + 49 = 8^2 + 7(8) + 49 = 169 = p^2$ sehingga p = 13
Jadi, nilai p bilangan asli yang memenuhi adalah p = 13
$\therefore$ Maka banyaknya bilangan prima p yang memenuhi ada **1**.

8. Jelas bahwa AB = 5 sehingga BD = 13. Karena DE sejajar AC maka DE juga tegak lurus CE.



$\frac{DE}{DB}$ = sin ∠DBD = sin (180° − (∠DBA + ∠ABC)) = sin (∠DBA + ∠ABC)

$\frac{DE}{DB}$ = sin ∠DBA cos ∠ABC + cos ∠DBA sin ∠ABC

$\frac{DE}{DB} = \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{63}{65} = \frac{m}{n}$

Maka m = 63 dan n = 65
$\therefore$ Jadi, m + n = **128**.

9. Jika dua titik pada lingkaran dihubungkan maka lingkaran akan terbagi menjadi dua daerah. Misalkan sebelah kanan dan kiri. Agar tidak ada tali busur yang memotong tali busur tersebut maka banyaknya titik pada lingkaran di sebelah kiri dan kanan tali busur tersebut haruslah genap.
Jika terdapat 2 titik maka banyaknya talibusur yang memenuhi ada 1.
   - Jika jumlah titik ada 2 pasang
     Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 2 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 1 pasang atau sebaliknya. Banyaknya cara ada 1 + 1 = 2
   - Jika jumlah titik ada 3 pasang
     Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 3 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 2 pasang, sebelah kiri ada 1 pasang sebelah kanan ada 1 pasang atau sebelah kiri ada 2 pasang dan sebelah kanan ada 0 pasang. Banyaknya cara = 1 · 2 + 1 · 1 + 2 · 1 = 5 cara.
   - Jika jumlah titik ada 4 pasang
     Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 4 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 3 pasang, sebelah kiri ada 1 pasang sebelah kanan ada 2 pasang, sebelah kiri ada 2 pasang sebelah kanan ada 1 pasang atau sebelah kiri ada 3 pasang dan sebelah kanan ada 0 pasang.
     Banyaknya cara = 1 · 5 + 1 · 2 + 2 · 1 + 5 · 1 = 14 cara.
   - Jika jumlah titik ada 5 pasang
     Dengan cara yang sama banyaknya cara = 1 · 14 + 1 · 5 + 2 · 2 + 5 · 1 + 14 · 1 = 42 cara.
   - Jika jumlah titik ada 6 pasang
     Banyaknya cara = 1 · 42 + 1 · 14 + 2 · 5 + 5 · 2 + 14 · 1 + 42 · 1 = 132 cara.

   $\therefore$ Banyaknya cara ada sebanyak **132**.

10. S = {FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$) $\mid$ n $\in$ Z}.
Misalkan d = FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$).
Karena $n^3 + 1$ dan $n^2 + 3n + 9$ tidak mungkin keduanya genap untuk n bilangan bulat maka d tidak mungkin genap.
Maka $d \mid (n^3 + 1)$ dan $d \mid (n^2 + 3n + 9)$
$d \mid (n(n^2 + 3n + 9) - (n^3 + 1)) = 3n^2 + 9n - 1$
Karena $d \mid (n^2 + 3n + 9)$ dan $d \mid (3n^2 + 9n - 1)$ maka $d \mid (3(n^2 + 3n + 9) - (3n^2 + 9n - 1)) = 28$
Karena $d \mid 28$ dan d tidak mungkin genap maka nilai d yang mungkin adalah 1 atau 7.
Jika n = 1 maka FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$) = FPB(2, 13) = 1
Jika n = 5 maka FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$) = FPB(126, 49) = 7
Jadi, FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$) = 1 atau 7 untuk semua nilai n bilangan bulat.
$\therefore$ Banyaknya anggota dari himpunan S yang memenuhi adalah **2**.

11. $x^2 - px - 2p = 0$ akar-akarnya real α dan β
Syarat akar-akar real adalah
$p^2 - 4(1)(-2p) \geq 0$
$p(p + 8p) \geq 0$
Maka syarat agar α dan β real adalah $p \leq -8$ atau $p \geq 0$
$\alpha^3 + \beta^3 = 16$
$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 16$
$p^3 - 3(-2p)(p) = 16$
$p^3 + 6p^2 - 16 = 0$
$(p + 2)(p^2 + 4p - 8) = 0$
$p = -2$ tidak memenuhi syarat $p \leq -8$ atau $p \geq 0$.
Jika $p^2 + 4p - 8 = 0$ maka
$p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1(-8))}}{2(1)} = -2 \pm 2\sqrt{3}$
Yang memenuhi syarat hanya $p = -2 + 2\sqrt{3}$
$\therefore$ Jumlah semua nilai p yang memenuhi sama dengan $-$**2 + 2√3.**

12. Misal koordinat titik A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2) dengan titik tengah A dan B adalah X_{12}.
Maka koordinat X_{12} adalah (½($x_1 + x_2$), ½($y_2 + y_2$)).
Jika X_{12} memiliki koordinat bilangan bulat maka haruslah $x_1 + x_2$ dan $y_1 + y_2$ genap.
Syarat itu terjadi haruslah x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama dan y_1 dan y_2 juga memiliki paritas yang sama.
Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap, ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).
Agar dapat dipastikan bahwa ada anggota X yang memiliki koordinat bilangan bulat maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka haruslah terdapat sekurang-kurangnya 5 buah titik letis.
$\therefore$ Nilai n terkecil yang memenuhi adalah **5**.

13. $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \frac{1}{x}\left\lfloor x \right\rfloor = \frac{n}{n+1}$

Jika x bulat maka ruas kiri ≥ 1 sedangkan ruas kanan < 1. Maka tidak mungkin x bulat.

- Jika 0 < x < 1

  $\lfloor x \rfloor = 0$ sehingga

  $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{n}{n+1}$ .... (1)

  Karena $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, n dan n + 1 bulat maka x merupakan bilangan rasional.

  Misalkan $x = \frac{1}{m}$ dengan m adalah bilangan rasional dengan m > 1 sebab 0 < x < 1.

  Dan misalkan juga m = p + s dengan p bilangan asli dan 0 < s < 1.

  Maka persamaan semula menjadi.

  $\frac{p}{p+s} = \frac{n}{n+1}$

  pn + p = pn + ns

  $s = \frac{p}{n}$

  Karena 0 < s < 1 maka nilai p asli yang memenuhi ada sebanyak n − 1 kemungkinan.

  Jadi, ada n − 1 kemungkinan nilai x yang memenuhi.

- Jika x > 1

  $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ sehingga

  $\frac{1}{x}\lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$

  Karena $\lfloor x \rfloor$, n dan n + 1 bulat maka x merupakan bilangan pecahan.

  Misalkan $x = \lfloor x \rfloor + r$ dengan 0 < r < 1.

  $\frac{1}{\lfloor x \rfloor + r}\lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$

  $n\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor = n\lfloor x \rfloor + nr$

  $r = \frac{\lfloor x \rfloor}{n}$

  Karena 0 < r < 1 maka nilai $\lfloor x \rfloor$ asli yang memenuhi ada sebanyak n − 1 kemungkinan.

  $x = \lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor x \rfloor}{n}$

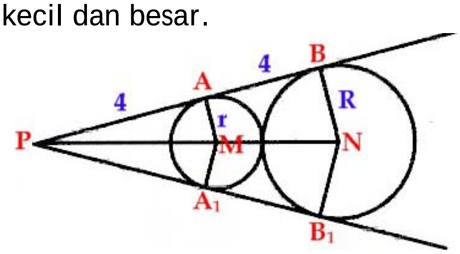
  Jadi, ada n − 1 kemungkinan nilai x yang memenuhi.

Agar didapat ada sebanyak 2010 bilangan real positif x yang memenuhi maka 2(n − 1) = 2010

n = 1006

∴ Jadi, nilai n yang memenuhi adalah n = **1006**.

14. Misalkan jari-jari lingkaran = r dan jari-jari lingkaran besar = R. Titik M dan N berturut turur menyatakan pusat lingkaran kecil dan besar.



Berdasarkan kesebangunan segitiga didapat

$\frac{r}{4} = \frac{R}{8}$ sehingga R = 2r .... (1)

$MN^2 = 4^2 + (NB - MA)^2$

$(R + r)^2 = 4^2 + (R - r)^2$
$4Rr = 16$
$2r^2 = 4$
$\pi r^2 = 2\pi$
$\therefore$ Luas lingkaran kecil = $\mathbf{2\pi}$.

15. Misalkan kelompok 1 – 3 terdiri dari 5 orang dan kelompok 4 – 6 terdiri dari 4 orang.
Banyaknya cara memilih dari 27 orang untuk masuk ke kelompok 1 = ${}_{27}C_5$.
Banyaknya cara memilih dari 22 orang untuk masuk ke kelompok 2 = ${}_{22}C_5$.
Banyaknya cara memilih dari 17 orang untuk masuk ke kelompok 3 = ${}_{17}C_5$.
Banyaknya cara memilih dari 12 orang untuk masuk ke kelompok 4 = ${}_{12}C_4$.
Banyaknya cara memilih dari 8 orang untuk masuk ke kelompok 5 = ${}_{8}C_4$.
Banyaknya cara memilih dari 4 orang untuk masuk ke kelompok 6 = ${}_{4}C_4$.
Jadi, banyaknya cara memilih 27 orang untuk masuk ke kelompok 1-6 = ${}_{27}C_5 \cdot {}_{22}C_5 \cdot {}_{17}C_5 \cdot {}_{12}C_4 \cdot {}_{8}C_4 \cdot {}_{4}C_4$.
Tetapi perhitungan di atas memperhitungkan hal sebagai berikut : misalkan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 masuk ke kelompok 1; x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} masuk ke kelompok 2 dan 17 orang lain terbagi dalam kelompok lain. Kasus ini dianggap berbeda jika x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 masuk ke kelompok 2; x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} masuk ke kelompok 1 dan 17 orang lain terbagi dalam kelompok lain yang sama dengan kasus 1. Padahal kedua kasus tersebut sebenarnya adalah sama. Maka ada perhitungan ganda dari perhitungkan sebelumnya. Jadi, perhitungkan sebelumnya harus dibagi dengan $3! \cdot 3!$.
Jadi, banyaknya cara memilih 27 orang untuk dibagi dalam kelompokkelompok yang terdiri dari 4 atau 5 orang adalah $\frac{{}_{27}C_5 \cdot {}_{22}C_5 \cdot {}_{17}C_5 \cdot {}_{12}C_4 \cdot {}_{8}C_4 \cdot {}_{4}C_4}{3! \cdot 3!} = \frac{27!}{(3!)^2 \cdot (4!)^3 \cdot (5!)^3}$.
$\therefore$ Banyaknya cara adalah $\frac{27!}{(3!)^2 \cdot (4!)^3 \cdot (5!)^3}$.

16. Misalkan dari 6 penerima surat pertama sebanyak $(6 - k_1)$ meneruskan surat tersebut.
Dari $(6^2 - 6k_1)$ penerima surat ke-2 sebanyak $(6^2 - 6k_1 - k_2)$ meneruskan surat tersebut.
Dari $(6^3 - 6^2k_1 - 6k_2)$ penerima surat ke-3 sebanyak $(6^3 - 6^2k_1 - 6k_2 - k_3)$ meneruskan surat.
dan seterusnya hingga
Dari $(6^n - 6^{n-1}k_1 - \cdots - 6k_{n-1})$ penerima surat ke-n semuanya **tidak** meneruskan surat tersebut.
$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + (6^n - 6^{n-1}k_1 - \cdots - 6k_{n-1}) = 366$
$6^n - (6^{n-1} - 1)k_1 - (6^{n-2} - 1)k_2 - \cdots - (6 - 1)k_{n-1} = 366$ .... (1)
Misalkan jumlah orang yang berada dalam sistem sama dengan p.
$p = 1 + 6 + (6^2 - 6k_1) + (6^3 - 6^2k_1 - 6k_2) + \cdots + (6^n - 6^{n-1}k_1 - \cdots - 6k_{n-1})$
$p = (1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^n) - (6 + 6^2 + \cdots + 6^{n-1})k_1 - (6 + 6^2 + \cdots + 6^{n-2})k_2 - \cdots - (6^2 + 6)k_{n-2} - 6k_{n-1}$
$p = 1 + \frac{6(6^n - 1)}{6-1} - \frac{6(6^{n-1} - 1)}{6-1}k_1 - \frac{6(6^{n-2} - 1)}{6-1}k_2 - \cdots - \frac{6(6^2 - 1)}{6-1}k_{n-2} - \frac{6(6-1)}{6-1}k_{n-1}$
$p = 1 + \frac{6}{5}(6^n - 1 - (6^{n-1} - 1)k_1 - (6^{n-2} - 1)k_2 - \cdots - (6 - 1)k_{n-1})$
Subtitusikan persamaan (1) didapat
$p = 1 + \frac{6}{5}(366 - 1)$
$p = 439$
$\therefore$ Banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai tersebut sama dengan **439**.

17. $\left(x^5 - \frac{2}{x^3}\right)^8$ = ${}_8C_0$ $(x^5)^8(-\frac{2}{x^3})^0$ + ⋯ + ${}_8C_r$ $(x^5)^r(-\frac{2}{x^3})^{8-r}$ + ⋯.

Agar didapat konstanta maka 5r − 3(8 − r) = 0

r = 3

Nilai konstanta tersebut adalah ${}_8C_3$ $(x^5)^3(-\frac{2}{x^3})^5$ = 56 · $(-2)^5$ = −1792

Jadi, nilai kontanta tersebut sama dengan −1792

Jika yang ditanyakan adalah jumlah koefisien maka jumlah koefisien akan didapat jika x = 1.

Jumlah koefisien = $(1 - 2)^8$ = 1.

∴ Konstanta tersebut sama dengan −**1792** dan jumlah koefisien sama dengan **1**.

18. $\frac{3xy-1}{x+y} = n$ ekivalen dengan

$(3x - n)(3y - n) = n^2 + 3$

- Jika n = 3k untuk k bilangan bulat

  3x − n dan 3y − n keduanya habis dibagi 3 sehingga ruas kiri habis dibagi 9 sedangkan ruas kanan dibagi 9 bersisa 3. Jadi, tidak ada nilai n = 3k yang memenuhi.
- Jika n =3k + 2 untuk k bilangan bulat

  $n^2 + 3 = (3k + 2)^2 + 3 = 3(3k^2 + 4k + 2) + 1$

  Maka 1 dan $3(3k^2 + 4k + 2) + 1$ merupakan faktor dari $n^2 + 3$

  Jika 3x − n = 1 dan 3y − n = $3(3k^2 + 4k + 2) + 1$ dengan n = 3k + 2 maka akan didapat pasangan bulat bulat (x, y) yang memenuhi.

  Jadi, untuk setiap n = 3k + 2 akan didapat pasangan bulat (x, y) yang memenuhi.
- Jika n =3k + 1 untuk k bilangan bulat

  $n^2 + 3 = (3k + 1)^2 + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1$

  Maka −1 dan $-3(3k^2 + 2k + 1) - 1$ merupakan faktor dari $n^2 + 3$.

  Jika 3x − n = −1 dan 3y − n = $-3(3k^2 + 2k + 1) - 1$ untuk n ≡ 1 (mod 3)

  Karena −1 ≡ $-3(3k^2 + 2k + 1) - 1$ ≡ 2 (mod 3) maka akan didapat pasangan bulat (x, y) yang memenuhi.

  Jadi, untuk setiap n = 3k + 2 akan didapat pasangan (x, y) yang memenuhi.

Maka bentuk n ≡ 0 (mod 3) saja yang membuat tidak ada pasangan (x, y) bulat yang memenuhi.

∴ Maka banyaknya bilangan bulat positif n < 100 yang memenuhi ada sebanyak **66**.

19. x + y + z = $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ dan xyz = 1

Mengingat xyz = 1 maka $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ = $\frac{xy+xz+yz}{xyz}$ = xy + xz + yz

Jadi, x + y + z = $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ = xy + xz + yz

$(x + y + z)^2 = (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})^2$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz})$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2(x + y + z)$

Karena x + y + z = xy + xz + yz maka

$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

Karena x^2, y^2 dan z^2 tidak mungkin negatif maka sesuai ketaksamaan AM-HM maka

$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}$

$(x^2 + y^2 + z^2)(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}) \geq 9$

Karena $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ dan $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ maka

$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$

$(x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) - 3 \geq 0$

$(x + y + z)^2 - 2(x + y + z) - 3 \geq 0$

$(x + y + z + 1)(x + y + z - 3) \geq 0$

$x + y + z \geq 3$ atau $x + y + z \leq -1$

$|x + y + z| \geq 3$ atau $|x + y + z| \geq 1$

Jika nilai $|x + y + z| = 1$ maka salah satu yang memenuhi adalah $x + y + z = -1$

Karena $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy + xz + yz$ maka $xy + xz + yz = -1$ dan karena $xyz = 1$ maka x, y dan z merupakan akar-akar persamaan $p^3 + p^2 - p - 1 = 0$

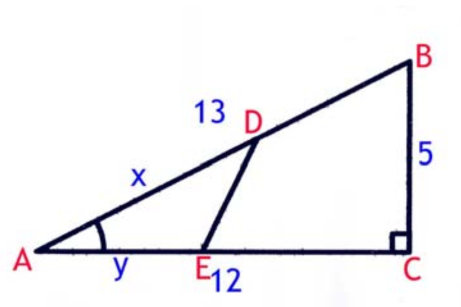
$(p - 1)(p + 1)^2 = 0$

Maka (x, y, z) = (1, −1, −1) dan permutasinya memenuhi kesamaan awal pada soal.

$\therefore$ Nilai minimal $|x + y + z|$ = **1**.

20. Mungkin maksud soal tersebut adalah panjang DE minimum.

Misalkan panjang AD = x dan panjang AE = y



Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}(5)(12) = 30$ dan $\sin A = \frac{5}{13}$ serta $\cos A = \frac{12}{13}$

Luas $\Delta ADE = \frac{1}{2} xy \sin A = 15$. Maka $xy = 78$.

Sesuai dalil cosinus pada ΔADE maka :

$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A = x^2 + y^2 - 144$

$DE^2 = (x - y)^2 + 2xy - 144$

$DE^2 = (x - y)^2 + 12$

DE^2 akan minimum sama dengan 12 jika $x = y = \sqrt{78}$

$\therefore$ $DE_{minimum} = 2\sqrt{3}$

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI 2010
TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

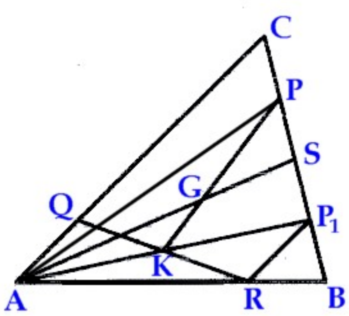
BAGIAN KEDUA

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B}$ = k

Alternatif 1 :



Akan didapat $\frac{BP_1}{BC} = \frac{BR}{BA} = \frac{1}{k+1}$

Karena $\angle P_1BR = \angle CBA$ maka ΔABC sebangun dengan ΔRBP_1.

Jadi, RP_1 akan sejajar dengan AC.

$RP_1 = \frac{1}{k+1}AC = AQ$

Karena RP_1 sejajar dengan AQ dan $\angle AKQ = RKP_1$ serta $RP_1 = AQ$ maka ΔRP_1K kongruen dengan ΔAQK dengan $AK = KP_1$.

Misal perpanjangan garis berat AG memotong sisi BC di S.

Jelas bahwa S adalah pertengahan sisi BC dan juga sisi PP_1.

Maka AG juga garis berat ΔAPP_1 dengan titik G juga titik berat ΔAPP_1 sebab perbandingan AG dengan GS tetap 2 : 1.

Karena K adalah pertengahan sisi AP_1 maka PK adalah juga garis berat ΔAPP_1.

Karena PK adalah garis berat ΔAPP_1 maka PK juga akan melalui titik G.

Jadi, titik P, K dan G akan berada pada satu garis lurus (kolinier).

∴ **Terbukti bahwa titik-titik P, G dan K kolinier (terletak pada satu garis)**.

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0) dan B(k + 1, 0) serta C(b, c).

Koordinat P$\left(b+\frac{k+1-b}{k+1}, c+\frac{0-c}{k+1}\right)$ = P$\left(\frac{kb+k+1}{k+1}, \frac{kc}{k+1}\right)$

Koordinat $P_1\left(k+1+\frac{b-k-1}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right) = P_1\left(\frac{k^2+k+b}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right)$

Koordinat Q$\left(\frac{b}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right)$

Koordinat R(k, 0)

Koordinat G$\left(\frac{k+1+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$

Persamaan garis AP_1.

$y = \frac{c}{k^2+k+b}x$ .... (1)

Persamaan garis QR

$\frac{y-0}{\frac{c}{k+1}-0} = \frac{x-k}{\frac{b}{k+1}-k}$

$y = \frac{c}{b-k^2-k}(x-k)$ .... (2)

Perpotongan garis AP_1 dan QR di titik $K(x_K, y_K)$

$\frac{c}{k^2+k+b}x_K = \frac{c}{b-k^2-k}(x_K - k)$

$(b - k^2 - k)x_K = (k^2 + k + b)(x_K - k)$

$2k(k + 1)x_K = k(k^2 + k + b)$

$x_K = \frac{k^2+k+b}{2(k+1)}$ dan $y_K = \frac{c}{k^2+k+b}\left(\frac{k^2+k+b}{2(k+1)}\right) = \frac{c}{2(k+1)}$

Maka koordinat $K\left(\frac{k^2+k+b}{2(k+1)}, \frac{c}{2(k+1)}\right)$

Kemiringan garis KG = $m_{KG} = \frac{\frac{c}{2(k+1)}-\frac{c}{3}}{\frac{k^2+k+b}{2(k+1)}-\frac{k+1+b}{3}} = \frac{c-2kc}{k^2-k+b-2kb-2}$

Kemiringan garis GP = $m_{GP} = \frac{\frac{c}{3}-\frac{kc}{k+1}}{\frac{k+1+b}{3}-\frac{kb+k+1}{k+1}} = \frac{c-2kc}{k^2-k+b-2kb-2}$

Karena $m_{GP} = m_{KG}$ maka ketiga garis P, G dan K berada pada satu garis lurus.

$\therefore$ **Terbukti bahwa titik-titik P, G dan K kolinier (terletak pada satu garis)**.

2. $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k} = \frac{7+nq_1q_2\cdots q_k}{2010}$

$2010\ (p_2p_3\cdots p_k + p_1p_3\cdots p_k + \cdots + p_1p_2\cdots p_{k-1}) = p_1p_2\cdots p_k\ (7 + nq_1q_2\cdots q_k)$

p_i tidak membagi $(p_2p_3\cdots p_k + p_1p_3\cdots p_k + \cdots + p_1p_2\cdots p_{k-1})$ sebab ada tepat satu bagian dari $(p_2p_3\cdots p_k + p_1p_3\cdots p_k + \cdots + p_1p_2\cdots p_{k-1})$ yang tidak mengandung p_i.

Jadi, haruslah p_i membagi $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$

Karena p_i untuk i = 1, 2, ⋯, k semuanya berbeda maka k = 4.

$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{67} = \frac{2107}{2010}$ maka

$7 + nq_1q_2q_3q_4 = 2107$

$nq_1q_2q_3q_4 = 2100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7$ yang merupakan perkalian 6 bilangan prima.

Karena q_1, q_2, q_3 dan q_4 adalah 4 bilangan prima yang boleh sama maka n merupakan perkalian dua faktor prima dari 2100.

Nilai n yang mungkin adalah $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $5 \cdot 5$ dan $5 \cdot 7$.

$\therefore$ Banyaknya n yang memenuhi ada **8.**

3. $x^3 + y^3 = 2$

$y = kx + d$

$x^3 + (kx + d)^3 = 2$

$(1 + k^3)x^3 + (3dk^2)x^2 + (3d^2k)x + d^3 - 2 = 0$

Karena polinomial berderajat ganjil akan memiliki sedikitnya satu akar real maka polinomial di atas harus diubah menjadi polinomial berderajat genap.

Jadi, k = –1 maka

$3dx^2 - 3d^2x + d^3 - 2 = 0$

Agar tidak ada nilai x real yangmemenuhi maka

$(3d^2)^2 - 4(3d)(d^3 - 2) < 0$

$3d^4 - 4d^4 + 8d < 0$

$d(d - 2)(d^2 + 2d + 4) > 0$

$d^2 + 2d + 4$ definit positif sehingga $d(d - 2) > 0$

Nilai d yang memenuhi adalah $d < 0$ atau $d > 2$

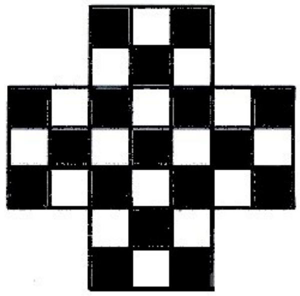
$\therefore$ Nilai k yang memenuhi adalah **k = –1** dan nilai **d < 0 atau d > 2.**

4. $x + 2y + 3z = n$ dengan $2010 \mid n$.
   $x + 2y = n - 3z$
   Karena $x + 2y \geq 0$ maka $0 \leq z \leq \frac{n}{3}$
   - Jika z genap maka z = 2k dengan k bilangan bulat tak negatif
     Maka $n - 3z = n - 6k$ yang merupakan bilangan genap.
     Karena $0 \leq 2k \leq \frac{n}{3}$ maka $0 \leq k \leq \frac{n}{6}$
     $x + 2y = n - 6k$ yang merupakan bilangan genap sehingga x genap. Misalkan x = 2m
     $m + y = \frac{n-6k}{2}$ untuk m bilangan bulat tak negatif.
     Banyaknya pasangan (m, y) bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n-6k}{2} + 1$ untuk setiap nilai k.
     Maka banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n-6k}{2} + 1$.
     Misalkan banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi = t_1
     $t_1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}} \left(\frac{n-6k}{2} + 1\right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}} \left(\frac{n}{2} + 1 - 3k\right)$ yang merupakan deret aritmatika dengan beda -3, banyaknya suku $\frac{n}{6} + 1$, suku pertama $\frac{n}{2} + 1$ dan suku terakhir 1.
     $t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{6}+1\right)\left(\left(\frac{n}{2}+1\right)+1\right) = \frac{n^2}{24} + \frac{5n}{12} + 1$
   - Jika z ganjil maka z = 2k + 1 dengan k bilangan bulat tak negatif
     Maka $n - 3z = n - 6k - 3$ yang merupakan bilangan ganjil.
     Karena $1 \leq 2k + 1 \leq \frac{n}{3} - 1 < \frac{n}{3}$ sebab $\frac{n}{3}$ genap.
     $0 \leq k \leq \frac{n}{6} - 1$
     $x + 2y = n - 6k - 3$ yang merupakan bilangan ganjil sehingga x ganjil. Misalkan x = 2m + 1
     $m + y = \frac{n-6k}{2} - 2$ dengan m bilangan bulat tak negatif
     Banyaknya pasangan (m, y) bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n-6k}{2} - 1$ untuk setiap nilai k.
     Maka banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n-6k}{2} - 1$.
     Misalkan banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi = t_2
     $t_2 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}-1} \left(\frac{n-6k}{2} - 1\right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}-1} \left(\frac{n}{2} - 1 - 3k\right)$ yang merupakan deret aritmatika dengan beda -3, banyaknya suku $\frac{n}{6}$, suku pertama $\frac{n}{2} - 1$ dan suku terakhir 2.
     $t_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{6}\right)\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)+2\right) = \frac{n^2}{24} + \frac{n}{12}$

   Jadi, banyaknya tripel (x, y, z) yang memenuhi = $t_1 + t_2 = \left(\frac{n^2}{24} + \frac{5n}{12} + 1\right) + \left(\frac{n^2}{24} + \frac{n}{12}\right) = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1$

   $\therefore$ Terbukti banyaknya tripel (x, y, z) bilangan bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1$

5. Warnai petak-petak tersebut seperti pada papan catur.



Pada gambar di atas akan didapat jumlah petak warna hitam dan putih berselisih satu.
Langkah kuda dari petak putih ke petak hitam atau sebaliknya.
Karena kuda tersebut harus kembali ke petaknya semula maka petak terakhir sebelum kembali ke petak semula haruslah berbeda warna dengan petak semula tersebut.
Jadi, haruslah jumlah petak warna hitam sama dengan jumlah petak warna putih.
Tetapi ternyata jumlah petak warna hitam dan putih berselisih satu. Kontradiksi. Maka biji catur kuda tidak dapat kembali ke petaknya semula.
$\therefore$ Biji catur kuda tidak dapat kembali ke petaknya semula.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010

MEDAN (SUMATERA UTARA), 1 - 7 AGUSTUS 2010

Bidang Matematika

Hari Pertama

Waktu : 4 Jam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2010

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
1 – 7 AGUSTUS 2010
MEDAN, SUMATERA UTARA

BIDANG : MATEMATIKA

HARI PERTAMA

WAKTU : 4 JAM

1. Misalkan a, b, c tiga bilangan asli berbeda. Buktikan bahwa barisan

$$a + b + c,\ ab + ac + bc,\ 3abc$$

tidak mungkin membentuk suatu barisan geometri (ukur) maupun aritmatika (hitung).

2. Diberikan segitiga lancip ABC dengan AC > BC dan titik pusat lingkaran luar O. Garis tinggi segitiga ABC dari C memotong AB dan lingkaran luar segitiga ABC lagi berturut-turut di titik D dan E. Garis melalui O sejajar AB memotong garis AC di titik F. Buktikan bahwa garis CO, garis melalui F tegak lurus AC, dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik.

3. Suatu kompetisi matematika diikuti oleh 120 peserta dari beberapa kontingen. Pada acara penutupan, setiap peserta memberikan 1 souvenir pada setiap peserta dari kontingen yang sama dan 1 souvenir pada salah seorang peserta dari tiap kontingen lainnya. Di akhir acara, diketahui terdapat 3840 souvenir yang dipertukarkan. Berapa banyak kontingen maksimal sehingga kondisi di atas dapat terpenuhi ?

4. Diketahui bahwa m dan n adalah bilangan-bilangan asli dengan sifat

$$(mn) \mid (m^{2010} + n^{2010} + n).$$

Buktikan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $n = k^{2010}$.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010

MEDAN (SUMATERA UTARA), 1 - 7 AGUSTUS 2010

Bidang Matematika

Hari Kedua

Waktu : 4 Jam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2010

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010
1 – 7 AGUSTUS 2010
MEDAN, SUMATERA UTARA

BIDANG : MATEMATIKA

HARI KEDUA

WAKTU : 4 JAM

5. Sebanyak m orang anak laki-laki dan n orang anak perempuan ($m > n$) duduk mengelilingi meja bundar diawasi oleh seorang guru, dan mereka melakukan sebuah permainan sebagai berikut. Mula-mula sang guru menunjuk seorang anak laki-laki untuk memulai permainan. Anak laki-laki tersebut meletakkan sekeping uang logam di atas meja. Kemudian bergiliran searah jarum jam, setiap anak melakukan gilirannya masing-masing. Jika anak tersebut laki-laki, ia menambahkan sekeping uang logam ke tumpukan di atas meja, dan jika anak tersebut perempuan, ia mengambil sekeping uang logam dari tumpukan tersebut. Jika tumpukan di atas meja habis, maka permainan berakhir saat itu juga. Perhatikan bahwa tergantung siapa yang ditunjuk oleh sang guru untuk memulai langkah pertama, maka permainan tersebut bisa cepat berakhir, atau bisa saja berlangsung paling sedikit 1 putaran penuh. Jika sang guru menginginkan agar permainan tersebut berlangsung paling sedikit 1 putaran penuh, ada berapa pilihan anak laki-laki yang dapat beliau tunjuk untuk memulai ?

6. Cari semua bilangan asli $n > 1$ demikian sehingga

$$\tau(n) + \varphi(n) = n + 1$$

Dalam hal ini, $\tau(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang habis membagi n dan $\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima terhadap n.

7. Misalkan a dan b bilangan real positif. Diberikan polinom $F(x) = x^2 + ax + b$ dan $G(x) = x^2 + bx + a$ sehingga semua akar dari polinom $F(G(x))$ dan $G(F(x))$ adalah bilangan real. Buktikan bahwa a dan b lebih dari 6.

8. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi H. Misalkan K sebarang titik di dalam segitiga ABC yang tidak sama dengan O maupun H. Titik L dan M terletak di luar segitiga ABC sedemikian sehingga AKCL dan AKBM jajaran genjang. Terakhir, misalkan BL dan CM berpotongan di titik N dan misalkan juga J adalah titik tengah HK. Buktikan bahwa KONJ jajaran genjang.

SELEKSI TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA 2011

OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2010

MEDAN (SUMATERA UTARA), 1 – 7 AGUSTUS 2010

Prestasi itu diraih bukan didapat !!!

SOLUSI SOAL

Bidang Matematika

Disusun oleh : Eddy Hermanto, ST

1. Alternatif 1 :

Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

a. Andaikan a + b + c, ab + ac + bc, 3abc membentuk barisan geometri (ukur) maka berlaku

$(ab + ac + bc)^2 = 3abc(a + b + c)$

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) = 3abc(a + b + c)$

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = abc(a + b + c)$ .... (1)

Menurut ketaksamaan AM-GM didapat

$a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2a^2bc$

$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c$

$a^2c^2 + b^2c^2 \geq 2abc^2$

Tanda kesamaan hanya terjadi jika a = b = c.

Jumlahkan ketiga ketaksamaan di atas didapat

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a + b + c)$

Berdasarkan persamaan (1) akan didapat bahwa a = b = c. Kontradiksi sebab a, b dan c berbeda.

b. Andaikan a + b + c, ab + ac + bc, 3abc membentuk barisan aritmatika (hitung) maka berlaku

2(ab + ac + bc) = 3abc + a + b + c yang ekivalen dengan

$a = \frac{2bc-b-c}{3bc-2b-2c+1}$

Karena $a \geq 1$ maka $2bc - b - c \geq 3bc - 2b - 2c + 1$

$bc - b - c + 1 \leq 0$

$(b - 1)(c - 1) \leq 0$

Karena $b \geq 1$ dan $c \geq 1$ maka ketaksamaan tersebut hanya terpenuhi jika $(b - 1)(c - 1) = 0$.

Dengan cara yang sama didapat $(a - 1)(b - 1) = 0$ dan $(a - 1)(c - 1) = 0$

Maka sedikitnya dua di antara a, b atau c sama dengan 1. Kontradiksi bahwa a, b dan c ketiganya berbeda.

Alternatif 2 :

Akan dibuktikan dengan pembuktian langsung.

a. Sesuai ketaksamaan AM-GM didapat

$a^2b^2 + a^2c^2 > 2a^2bc$

$a^2b^2 + b^2c^2 > 2ab^2c$

$a^2c^2 + b^2c^2 > 2abc^2$

Tanda kesamaan tidak mungkin terjadi sebab a, b dan c semuanya berbeda.

Jumlahkan ketiga persamaan tersebut didapat

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 > abc(a + b + c)$

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) > 3abc(a + b + c)$

$(ab + ac + bc)^2 > 3abc(a + b + c)$

$\frac{ab+ac+bc}{a+b+c} > \frac{3abc}{ab+ac+bc}$

Karena $\frac{ab+ac+bc}{a+b+c} \neq \frac{3abc}{ab+ac+bc}$ maka a + b + c, ab + ac + bc, 3abc tidak mungkin membentuk barisan geometri (ukur).

b. $3abc + (a + b + c) - 2(ab + ac + bc) = a(b - 1)(c - 1) + b(a - 1)(c - 1) + c(a - 1)(b - 1) \geq 0$ sebab a, b dan c ketiga bilangan asli.

Karena $a(b - 1)(c - 1) \geq 0$, $b(a - 1)(c - 1) \geq 0$ dan $c(a - 1)(b - 1) \geq 0$ maka persamaan $a(b - 1)(c - 1) + b(a - 1)(c - 1) + c(a - 1)(b - 1) = 0$ hanya akan terpenuhi jika sedikitnya dua di antara a, b dan c sama dengan 1. Kontradiksi bahwa a, b dan c ketiganya berbeda.

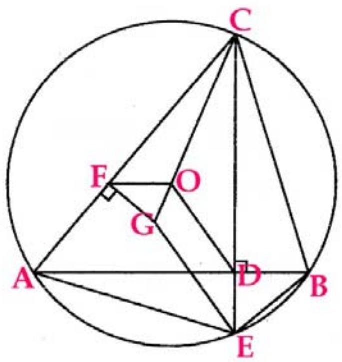
Jadi, $3abc + (a + b + c) - 2(ab + ac + bc) > 0$

Karena $3abc + (a + b + c) - 2(ab + ac + bc) \neq 0$ maka

(ab + ac + bc) − (a + b + c) ≠ 3abc − (ab + ac + bc)
Karena (ab + ac + bc) − (a + b + c) ≠ 3abc − (ab + ac + bc) maka a + b + c, ab + ac + bc, 3abc tidak mungkin membentuk barisan aritmatika (hitung).

∴ Terbukti bahwa a + b + c, ab + ac + bc, 3abc tidak mungkin membentuk baarisan geometri (ukur) maupun aritmatika (hitung).

2. Alternatif 1 :



Misalkan garis CO dan garis yang tegak lurus AC dan melalui F berpotongan di titik G. Persoalan akan ekivalen dengan membuktikan bahwa garis GE sejajar OD.

Karena O pusat lingkaran luar ΔABC maka ∠AOC = 2∠ABC.

Karena ΔAOC sama kaki maka ∠OCA = 90^o − B.

Karena FO sejajar AB maka ∠CFO = A

Maka ∠COF = 180^o − ∠OCA − ∠CFO = 90^o + B − A

Sesuai dengan aturan sinus pada ΔOCF maka

$\frac{CF}{\sin\angle COF} = \frac{CO}{\sin\angle CFO}$

CF = $\frac{CO\cos(B-A)}{\sin A}$

CG = CF cosec ∠OCA

$\frac{CG}{CO}$ = $\frac{\cos(B-A)}{\sin A\sin B}$ .... (1)

Perhatikan talibusur AE. Karena menghadap talibusur yang sama maka ∠ACE = ∠ABE

Karena CE tegak lurus AB maka ∠ACE = 90^o − A = ∠ABE

∠CBE = ∠CBA + ∠ABE = B + (90^o − A) = 90^o + B − A

Perhatikan talibusur BC. Karena menghadap talibusur yang sama maka ∠BEC = ∠CAB = A

Sesuai dengan aturan sinus pada ΔBCE dan mengingat CD = BC sin B maka

$\frac{CE}{\sin\angle CBE} = \frac{BC}{\sin\angle BEC}$ = $\frac{CD}{\sin B\sin\angle BEC}$

$\frac{CE}{CD}$ = $\frac{\cos(B-A)}{\sin A\sin B}$ .... (2)

Berdasarkan (1) dan (2) didapat

$\frac{CG}{CO}$ = $\frac{CE}{CD}$

Karena ∠DCO = ∠ECO serta $\frac{CG}{CO}$ = $\frac{CE}{CD}$ maka ΔCDO sebangun dengan ΔCEG.

Jadi, GE sejajar OD

Maka terbukti bahwa garis CO, garis melalui F tegak lurus AC, dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik, yaitu titik G.

∴ **Terbukti bahwa garis CO, garis melalui F tegak lurus AC, dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik**.

Alternatif 2 :

Misalkan garis CO dan garis sejajar Do dan melalui E berpotongan di titik G. Persoalan ekivalen dengan membuktikan bahwa FG tegak lurus AC.

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(a, 0) dan C(b, c).

Karena AC > BC maka b > $\frac{1}{2}$ a.

Karena AB adalah talibusur yang sejajar sumbu X maka $x_O = \frac{1}{2}(a + 0) = \frac{1}{2}a$

Persamaan umum lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Karena lingkaran melalui (0,0) maka C = 0

Karena $x_O = \frac{1}{2}a$ maka A = –a.

Lingkaran melalui titik (b, c) maka

$b^2 + c^2 - a(b) + B(c) = 0$

$B = \frac{ab-b^2-c^2}{c}$

Jadi, $y_O = \frac{b^2+c^2-ab}{2c}$

Jadi, koordinat $O(\frac{1}{2}a, \frac{b^2+c^2-ab}{2c})$

Koordinat D(b, 0)

Karena OC = OE maka Ordinat O adalah pertengahan ordinat C dan E.

$2y_O = y_E + y_C$

$2(\frac{b^2+c^2-ab}{2c}) = y_E + c$

$y_E = \frac{b^2-ab}{c}$

Karena $x_E = b$ maka koordinat $E(b, \frac{b^2-ab}{c})$

Persamaan garis AC adalah $y = \frac{c}{b}x$

Garis FO sejajar AB yang berarti sejajar sumbu X maka $y_F = y_O = \frac{b^2+c^2-ab}{2c}$

Maka $x_F = (\frac{b^2+c^2-ab}{2c})(\frac{b}{c}) = \frac{b(b^2+c^2-ab)}{2c^2}$

Koordinat $F(\frac{b(b^2+c^2-ab)}{2c^2}, \frac{b^2+c^2-ab}{2c})$

Karena gradient AC = $\frac{c}{b}$ maka gradient FG = $-\frac{b}{c}$

Persamaan garis FG : $y - \frac{b^2+c^2-ab}{2c} = -\frac{b}{c}(x - \frac{b(b^2+c^2-ab)}{2c^2})$

Persamaan garis CO : $\frac{y-c}{x-b} = \frac{\frac{b^2+c^2-ab}{2c}-c}{\frac{1}{2}a-b} = \frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}$

$y = (x-b)(\frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}) + c$

Gradien garis DO, $m_{DO} = \frac{\frac{b^2+c^2-ab}{2c}-0}{\frac{1}{2}a-b} = \frac{b^2+c^2-ab}{c(a-2b)}$

Garis DO sejajar EG. Persamaan garis EG adalah

$y - \frac{b^2-ab}{c} = \frac{b^2+c^2-ab}{c(a-2b)}(x-b)$

Garis CO berpotongan dengan EG di G. Maka

$(x_G - b)(\frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}) + c = \frac{b^2+c^2-ab}{c(a-2b)}(x_G - b) + \frac{b^2-ab}{c}$

$(x_G - b)\left(\frac{b^2-ab-c^2-b^2-c^2+ab}{c(a-2b)}\right) = \frac{b^2-c^2-ab}{c}$

$(x_G - b) = \frac{(b^2-c^2-ab)(2b-a)}{2c^2}$

$x_G = \frac{2b^3-ab^2-2bc^2+ac^2-2ab^2+a^2b+2bc^2}{2c^2}$

$x_G = \frac{2b^3-3ab^2+ac^2+a^2b}{2c^2}$

$y_G = (x_G - b)\left(\frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}\right) + c$

$y_G = \left(\frac{2b^3-3ab^2+ac^2+a^2b-2bc^2}{2c^2}\right)\left(\frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}\right) + \frac{2c^4(a-2b)}{2c^3(a-2b)}$

$y_G = \frac{2b^5-2ab^4-2b^3c^2-3ab^4+3a^2b^3+3ab^2c^2+ab^2c^2-a^2bc^2-ac^4+a^2b^3-a^3b^2-a^2bc^2-2b^3c^2+2ab^2c^2+2bc^4}{2c^3(a-2b)} + \frac{2ac^4-4bc^4}{2c^3(a-2b)}$

$y_G = \frac{2b^5-5ab^4-4b^3c^2+4a^2b^3+6ab^2c^2-2a^2bc^2+ac^4-a^3b^2-2bc^4}{2c^3(a-2b)}$

$\Delta y_{FG} = y_G - y_F = \frac{2b^5-5ab^4-4b^3c^2+4a^2b^3+6ab^2c^2-2a^2bc^2+ac^4-a^3b^2-2bc^4}{2c^3(a-2b)} - \frac{b^2+c^2-ab}{2c}$

$\Delta y_{FG} = \frac{2b^5-5ab^4-2b^3c^2+4a^2b^3+3ab^2c^2-a^2bc^2-a^3b^2}{2c^3(a-2b)}$

$\Delta x_{FG} = x_G - x_F = \frac{2b^3-3ab^2+ac^2+a^2b}{2c^2} - \frac{b(b^2+c^2-ab)}{2c^2}$

$\Delta x_{FG} = \frac{b^3-2ab^2+ac^2+a^2b-bc^2}{2c^2}$

$m_{FG} = \frac{\Delta y_{FG}}{\Delta x_{FG}} = \frac{2b^5-5ab^4-2b^3c^2+4a^2b^3+3ab^2c^2-a^2bc^2-a^3b^2}{c(b^3-2ab^2+ac^2+a^2b-bc^2)(a-2b)} = \frac{b(2b-a)(b^3-2ab^2+ac^2+a^2b-bc^2)}{c(a-2b)(b^3-2ab^2+ac^2+a^2b-bc^2)}$

$m_{FG} = -\frac{b}{c}$

$m_{FG} \cdot m_{AC} = \left(-\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{b}\right) = -1$

Karena $m_{FG} \cdot m_{AC} = -1$ maka FG tegak lurus AC.

$\therefore$ **Terbukti bahwa garis CO, garis melalui F tegak lurus AC, dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik.**

3. Misalkan x_i adalah banyaknya peserta dari kontingen i dan banyaknya kontingen sama dengan n.

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 120$

Banyaknya souvenir pada masing-masing kontingen sama dengan $x_i(x_i - 1)$

Masing-masing peserta akan memberikan souvenir sebanyak n − 1 ke salah seorang peserta dari tiap kontingen lainnya.

Maka banyaknya souvenir seluruhnya = $x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1) + \cdots + x_n(x_n - 1) + 120(n - 1) = 3840$.

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + 120n = 3960$

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 120 + 120n = 3960$

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 4080 - 120n$

Berdasarkan ketaksamaan AM-QM maka

$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \ge \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

$\sqrt{\frac{4080-120n}{n}} \ge \frac{120}{n}$

$4080 - 120n \ge \frac{120^2}{n}$

$n^2 - 34n + 120 \le 0$

$(n - 30)(n - 4) \le 0$

$4 \le n \le 30$

Jika n = 30 serta masing-masing kontingen terdiri dari 4 peserta maka banyaknya souvenir yang dipertukarkan sama dengan $30 \cdot 4(4 - 1) + 120(30 - 1) = 3840$ yang memenuhi.

$\therefore$ Banyaknya kontingen maksimal sehingga kondisi tersebut memenuhi sama dengan **30**.

4. $(mn) \mid (m^{2010} + n^{2010} + n)$
   - Jika FPB(m, n) = 1
     Karena $n \mid (m^{2010} + n^{2010} + n)$ maka $n \mid m^{2010}$.
     Karena FPB(m, n) = 1 maka haruslah $n = 1 = 1^{2010}$ yang memenuhi.
   - Jika FPB(m, n) = d dengan d > 1
     Misalkan m = dx dan n = dy dengan FPB(x, y) = 1
     Maka persoalan akan menjadi $(d^2xy) \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010}y^{2010} + dy)$
     Karena $d^2 \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010}y^{2010})$ maka $d^2 \mid dy$ yang berarti $y = d^pz$ untuk suatu bilangan asli p dan z serta d tidak membagi z.
     Jadi, $n = dy = d^{p+1}z$
     Persoalan semula akan menjadi $(d^{p+2}xz) \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010(p+1)}z^{2010} + d^{p+1}z)$
     Karena $d^{p+1} \mid (d^{2010(p+1)}z^{2010} + d^{p+1}z)$ maka $d^{p+1} \mid d^{2010}x^{2010}$ sehingga $d^{p+1} \mid d^{2010}$
     Jadi, $p \le 2009$ ·························· (1)
     Dari $(d^{p+2}xz) \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010(p+1)}z^{2010} + d^{p+1}z)$ akan didapat $d^{p+2} \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{p+1}z)$
     Karena d tidak membagi z maka d^{p+2} tidak membagi $d^{p+1}z$ yang berakibat d^{p+2} tidak membagi $d^{2010}x^{2010}$.
     Karena d^{p+2} tidak membagi $d^{2010}x^{2010}$ maka $d^{p+2} > d^{2010}$
     Jadi, p > 2008 ······· (2)
     Berdasarkan (1) dan (2) didapat bahwa p = 2009
     $n = d^{2010}z$
     Persoalan semula ekivalen dengan $(d^{2011}xz) \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010\cdot 2010}z^{2010} + d^{2010}z)$
     Maka $d^{2010}z \mid d^{2010}x^{2010}$ sehingga $z \mid x^{2010}$.
     Karena x dan z relatif prima maka z = 1
     Jadi, $n = d^{2010}$

   ∴ **Terbukti bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $n = k^{2010}$.**

5. Misalkan dalam putaran tersebut ada seorang anak laki-laki yang diikuti oleh seorang anak perempuan. Jika kedua anak tersebut dikeluarkan dari permainan maka permainan yang ada akan menghasilkan hal yang sama dengan sebelumnya sebab uang logam yang diberikannya anak laki-laki ke atas meja akan diambil oleh anak perempuan di sebelahnya. Karena m > n maka hal tersebut pasti ada. Jika hal ini dilakukan terus menerus maka akan tersisa m − n anak laki-laki.

   ∴ Jadi, banyaknya pilihan yang bisa dilakukan ada sebanyak **m − n**.

6. $\tau(n) + \varphi(n) = n + 1$

   $\tau(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang habis membagi n dan $\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima terhadap n.
   Misalkan A dalah himpunan semua bilangan asli yang habis membagi n dan B adalah himpunan semua bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima terhadap n serta C adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari n yang tidak membagi n tetapi tidak relatif prima dengan n.
   Semua bilangan asli > 1 kurang dari atau sama dengan n akan masuk hanya ke dalam satu satu dari A, B atau C.
   $A \cap B = \{1\}$
   Karena irisan A dan B hanya ada 1 bilangan, maka persoalan tersebut sama saja dengan menentukan semua bilangan asli sehingga semua bilangan asli kurang dari atau sama dengan n hanya masuk ke dalam himpunan A atau B saja.

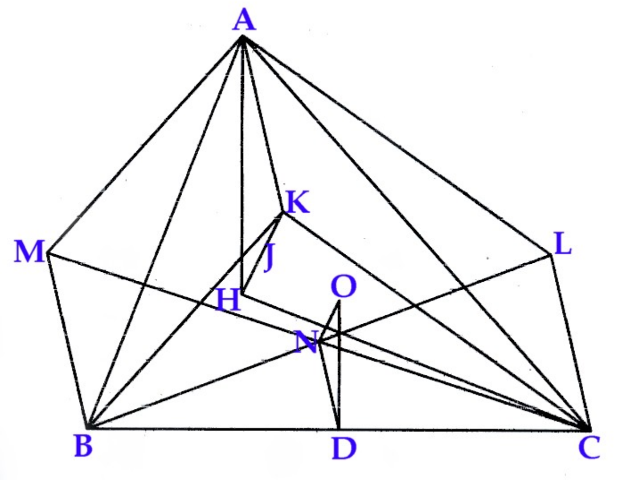
- Jika n bilangan prima
  Pembagi n hanya ada 2 yaitu 1 dan n sehingga $\tau(n) = 2$.
  Semua bilangan asli kurang dari n akan relatif prima dengan n sehingga $\varphi(n) = n - 1$.
  $\tau(n) + \varphi(n) = 2 + (n - 1) = n + 1$
  Jadi, semua bilangan prima akan memenuhi hal tersebut.
- Jika n bukan bilangan prima
  Lemma :
  Jika terdapat sebuah bilangan prima p > 2 yang membagi n maka n tidak akan memenuhi hal tersebut.
  Bukti : Bilangan $\frac{2n}{p}$ merupakan bilangan asli yang kurang dari n namun tidak membagi n serta FPB($\frac{2n}{p}$, n) = $\frac{n}{p}$ > 1 sehingga $\frac{2n}{p}$ bukan elemen A maupun B. Terbukti.
  Jadi, $n = 2^k$ untuk suatu bilangan asli k tertentu.
  Jika k > 2 maka sedikitnya terdapat sebuah bilangan, yaitu 6 < n yang memenuhi 6 tidak membagi n serta FPB(n, 6) = 2 > 1.
  Jadi, nilai k yang mungkin agar memenuhi persoalan tersebut adalah k = 2.
  Jika $n = 2^2 = 4$ maka $\tau(4) + \varphi(4) = 3 + 2 = 4 + 1$ yang memenuhi.
  Jadi, n bukan bilangan prima yang memenuhi hanya n = 4.

$\therefore$ Jadi, semua bilangan asli n yang memenuhi adalah **n bilangan prima atau n = 4**.

7. $F(x) = x^2 + ax + b$ dan $G(x) = x^2 + bx + a$
   Misalkan m dan n adalah kedua akar F(x) = 0 dengan m < n.
   $n = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$
   Jika G(x) = n yang berarti F(G(x)) = 0 pada saat itu, maka haruslah dipenuhi nilai x pada saat itu haruslah juga bilangan real.
   $G(x) = n = x^2 + bx + a$
   $x^2 + bx + a - n = 0$
   Agar nilai x yang memenuhi adalah bilangan real maka
   $b^2 - 4(a - n) \ge 0$
   $b^2 - 4(a - \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}) \ge 0$
   $b^2 - 6a \ge 2\sqrt{a^2 - 4b} \ge 0$ sebab akar dari suatu bilangan tidak mungkin negatif.
   Jadi, $b^2 \ge 6a$
   Misalkan p dan q adalah kedua akar G(x) = 0 dengan p < q.
   $q = \frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2}$
   Jika F(x) = q yang berarti G(F(x)) = 0 pada saat itu, maka haruslah dipenuhi nilai x pada saat itu haruslah juga bilangan real.
   $F(x) = q = x^2 + ax + b$
   $x^2 + ax + b - q = 0$
   Agar nilai x yang memenuhi adalah bilangan real maka
   $a^2 - 4(b - q) \ge 0$
   $a^2 - 4(b - \frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2}) \ge 0$
   $a^2 - 6b \ge 2\sqrt{b^2 - 4a} \ge 0$ sebab akar dari suatu bilangan tidak mungkin negatif.
   Jadi, $a^2 \ge 6b$ sehingga didapat $a^4 \ge 36b^2$
   Karena $b^2 \ge 6a$ maka

$a^4 \geq 36b^2 \geq 216a$
$a^3 \geq 216$
$a \geq 6$
Karena $b^2 \geq 6a$ maka $b^2 \geq 36$ sehingga $b \geq 6$.
Jika a = 6 dan karena $a^2 \geq 6b$ maka $b \leq 6$ sehingga haruslah b = 6.
Tetapi untuk a = b = 6 tidak memenuhi $a^2 - 6b \geq 2\sqrt{b^2 - 4a}$.
Dengan cara yang sama juga didapat fakta bahwa $b \neq 6$.
Jadi, a > 6 dan b > 6.
$\therefore$ **Terbukti bahwa a dan b lebih dari 6.**

8. Alternatif 1 :



Karena AKCL dan AKBM keduanya jajaran genjang maka MB = AK = LC serta MB∥AK∥LC.
Jadi, MBCL pun jajaran genjang. Maka kedua diagonalnya akan berpotongan di tengah.
Jadi, N adalah titik tengah BL.
Misalkan D adalah titik tengah BC maka ND akan sejajar LC. Jadi, ND∥MB∥AK∥LC.
Karena N adalah prtengahan BL dan D pertengahan BC maka ND = $\frac{1}{2}$ LC. Jadi, ND = $\frac{1}{2}$ AK.
Karena O adalah pusat lingkaran luar dan D pertengahan BC maka OD $\perp$ BC. Garis tinggi AH juga tegak lurus BC. Jadi, OD∥AH.
Karena OD = R cos A sedangkan AH = $\frac{b\cos A}{\sin B}$ = 2R cos A maka OD = $\frac{1}{2}$ AH.
Karena ND∥AK dan OD∥AH maka $\angle$HAK = $\angle$ODN.
Karena ND = $\frac{1}{2}$ AK dan OD = $\frac{1}{2}$ AH serta $\angle$ODN = $\angle$HAK maka ΔDNO dan ΔAHK sebangun.
Jadi, NO = $\frac{1}{2}$ HK dan NO∥HK.
Karena J pertengahan HK maka NO = JK serta NO∥JK. Akibatnya OK = ND dan OK∥NJ.
Jadi, KJON adalah jajaran genjang.
$\therefore$ **Terbukti bahwa KJON adalah jajaran genjang.**

Alternatif 2 :
Misalkan koordinat B(0 ,0) C(a, 0) dan A(b, c)
Jelas bahwa absis H adalah b.
Kemiringan garis AC adalah $m_{AC} = \frac{c}{b-a}$
Persamaan garis yang tegak lurus AC dan melalui B adalah $y = \frac{a-b}{c}x$.

Titik H terletak pada garis tersebut maka

$y_H = \frac{(a-b)b}{c}$

Jadi, koordinat H(b, $\frac{(a-b)b}{c}$)

Jelas bahwa absis O adalah $\frac{1}{2}$a.

Karena B(0, 0) maka persamaan lingkaran yang melalui titik A, B dan C adalah

$x^2 + y^2 + Ax + By = 0$

Karena absis pust lingkaran sama dengan $\frac{1}{2}$a maka

$x^2 + y^2 - ax + By = 0$

Lingkaran melalui titik (b, c) maka

$b^2 + c^2 - a(b) + B(c) = 0$

$B = \frac{ab-b^2-c^2}{c}$

Jadi, $y_O = \frac{b^2+c^2-ab}{2c}$

Koordinat O(($\frac{1}{2}$a, $\frac{b^2+c^2-ab}{2c}$)

Misalkan koordinat K(p, q)

Misalkan koordinat M(x_M, y_M) dan L(x_L, y_L)

Karena BMAK jajaran genjang maka ruas BM sejajar dan sama panjang dengan KA. Jadi, proyeksi ruas BM dan KA terhadap sumbu X dan Y akan sama.

Jadi, $x_M - 0 = b - p$ dan $y_M - 0 = c - q$.

Maka koordinat M(b − p, c − q).

Dengan cara yang sama karena KALC jajaran genjang maka

$x_L - a = b - p$ dan $y_L - 0 = c - q$

Maka koordinat L(a + b − p, c − q)

Karena BMAK dan KALC keduanya jajaran genjang maka BM sejajar dan sama panjang dengan KA serta KA sejajar dan sama panjang dengan CL. Jadi, BM sejajar dan sama panjang dengan CL. Akibatnya, BMLC juga jajaran genjang. Maka diagonal CM dan BL akan berpotongan di tengah. Jadi, N adalah pertengahan BL.

Koordinat N($\frac{a+b-p}{2}$, $\frac{c-q}{2}$)

J adalah pertengahan H dan K maka koordinat J($\frac{b+p}{2}$, $\frac{ab-b^2+cq}{2c}$)

$m_{JK} = \frac{2cq-ab+b^2-cq}{2c} \cdot \frac{2}{2p-b-p} = \frac{cq-ab+b^2}{c(p-b)}$

$m_{NO} = \frac{b^2+c^2-ab-c^2+cq}{2c} \cdot \frac{2}{a-a-b+p} = \frac{cq-ab+b^2}{c(p-b)}$

$m_{OK} = \frac{2cq-b^2-c^2+ab}{2c} \cdot \frac{2}{2p-a} = \frac{2cq-b^2-c^2+ab}{c(2p-a)}$

$m_{NJ} = \frac{ab-b^2+cq-c^2+cq}{2c} \cdot \frac{2}{b+p-a-b+p} = \frac{2cq-b^2-c^2+ab}{c(2p-a)}$

Karena $m_{JK} = m_{NO}$ dan $m_{OK} = m_{NJ}$ maka KONJ adalah jajaran genjang.

∴ **Terbukti bahwa KJON adalah jajaran genjang.**

(Catatan : Jika pembuktikan menggunakan vektor maka cukup dibuktikan bahwa $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{ON}$ karena vektor mengandung besar dan arah sedangkan gradien garis hanya mengandung kemiringan (arah) saja tanpa panjang (besar) dari suatu garis.)

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Eddy Hermanto lahir di Desa Bunut Tinggi, Kecamatan Talo, Kabupaten Bengkulu Selatan (sekarang Kabupaten Seluma) pada tanggal 9 September 1979. Pendidikan SD dan SLTP diselesaikannya di Lampung, yaitu SD di SD Negeri 2 Bandar Jaya, Lampung Tengah dan SLTP di SMP Negeri Bandar Jaya, Lampung Tengah. Sedangkan pendidikan SLTA dilaluinya di SMU Negeri 5 Bengkulu. Penulis yang juga merupakan putera asli Bengkulu ini kemudian melanjutkan pendidikan S1 ke Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada Yogyakarta pada tahun 1997 yang diselesaikannya pada bulan Februari 2002 dengan predikat *Cum Laude*.

Saat ini Penulis bekerja sebagai PNS di Pemerintah Kota Bengkulu pada Bagian Administrasi Pembangunan Setda Kota Bengkulu (dulu bernama Bagian Penyusunan Program Setda Kota Bengkulu) yang telah digeluti sejak Desember 2002. Selain bekerja di Pemerintah Kota Bengkulu, Penulis juga aktif membina siswa-siswa di SMA N 5 Bengkulu baik dalam persiapan menghadapi Ujian Masuk Universitas Gadjah Mada (UM-UGM), Seleksi Penerimaan Mahasiswa baru (SPMB) maupun ketika SMA N 5 Bengkulu akan menghadapi perlombaan-perlombaan baik tingkat kota, provinsi maupun nasional. Penulis juga pernah beberapa kali membina siswa-siswa dari Provinsi Bengkulu yang akan mengikuti Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika.