Homothety

Wildan Bagus Wicaksono

Diperbarui 10 Januari 2024

Ringkasan

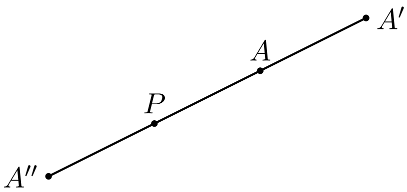
Homothety merupakan salah satu metode yang cukup berguna pada permasalahan geometri. Metode ini dapat menjadi jalan yang mempersingkat atau mempermudah pengerjaan menghadapi soal geometri yang terkait dua bangun yang sebangun, kesegarisan, dan lain-lain.

Daftar Isi

§1. Terminologi

Gambar 1: Homothety adalah cara mengatakan dilatasi dengan gaya.

Homothety merupakan suatu transformasi afinitas suatu bidang yang ditentukan oleh suatu titik P dan rasio (atau skala) $k \neq 0$, yang membawa sebarang titik A ke titik A' sedemikian sehingga $\overrightarrow{A'P} = k\overrightarrow{AP}$. Dalam hal ini, kita definisikan $h(P,k) : A \mapsto A'$. Nilai dari k dapat bernilai positif ataupun negatif. Gambar berikut menunjukkan $h(P,2) : A \mapsto A'$ dan $h(P,-1) : A \mapsto A''$. Jika $k > 0$ maka hasil pemetaan $h(P,k)$ akan berada di sisi yang sama terhadap titik P dengan titik semula, sedangkan $k < 0$ menyebabkan hasil pemetaan $h(P,k)$ akan berada di sisi yang berbeda terhadap titik P dengan titik semula.



Gambar 2: Pemetaan $h(P,k)$ dari titik A untuk $k = 2$ dan $k = -1$.

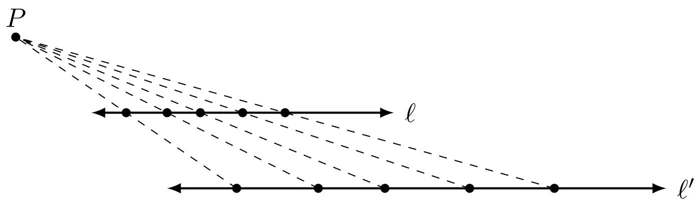
§2. Sifat-Sifat Homothety

Sifat pertama yang dapat diobservasi dengan mudah adalah sebagai berikut.

Aksioma 2.1: Hubungan Titik Pusat, Titik Asal, dan Titik Hasil Transformasi

Jika A' adalah hasil transformasi titik A terhadap $h(P,k)$, maka P, A, dan A' segaris.

Pembicaraan pemetaan dengan sebuah titik saja cukup membosankan. Kita bisa mendilatasikan suatu garis bahkan bangun datar (tentu saja pembicaraan kita masih sebatas $\mathbb{R}^2$). Hal ini sama saja dengan mentransformasikan kumpulan titik-titik dengan titik pusat yang sama dan skala yang sama. Gambar berikut menunjukkan hasil transformasi garis ℓ terhadap $h(P,k)$ yang menghasilkan ℓ'.



Gambar 3: Transformasi $h(P, 2) : \ell \mapsto \ell'$.

Teorema 2.2: Homothety Sebuah Garis

Hasil transformasi garis ℓ terhadap $h(P, k)$ di mana $k \in \mathbb{R}$ adalah sebuah garis ℓ'. Selain itu, berlaku ℓ sejajar dengan ℓ'.

Bukti. Ambil dua titik sebarang A dan B pada garis ℓ. Misalkan A' dan B' berturut-turut adalah hasil transformasi titik A dan B terhadap $h(P, k)$. Ini berarti panjang $PA' = |k|PA$ dan $PB' = |k|PB$. Karena berlaku

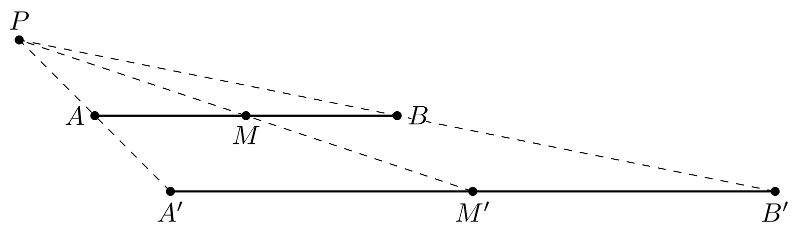
$$\frac{PA'}{PA} = |k| = \frac{PB'}{PB} \implies \frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB} \quad \text{dan} \quad \angle A'PB' = \angle APB,$$

ini berarti $\triangle A'PB' \sim \triangle APB$ (SAS). Ini berakibat $AB \parallel A'B'$. Apabila C adalah titik lain di garis ℓ, dengan cara yang sama diperoleh $AC \parallel A'C'$ dan $BC \parallel B'C'$. Karena A, B, C segaris, dapat disimpulkan bahwa A', B', C' segaris. □

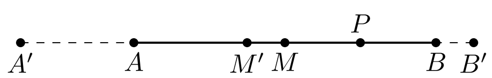
Aksioma 2.3: Kedudukan Hasil Transformasi Titik

Hasil transformasi kumpulan titik-titik ini tidak akan merubah sifat semula titik-titik semula.

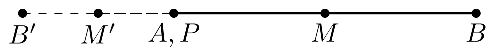
Kita ambil contoh sederhana terlebih dahulu. Misalkan A dan B adalah dua titik yang berbeda, kemudian M adalah titik tengah dari $\overline{AB}$. Tranformasikan masing-masing titik A, B, M terhadap $h(P, k)$ yang berturut-turut menghasilkan A', B', M'.



Gambar 4: Transformasi A, B, M terhadap $h(P, 2)$ ketika P tidak berada di $\overline{AB}$.



Gambar 5: Transformasi A, B, M terhadap $h(P, 1.5)$ ketika P berada di $\overline{AB}$.



Gambar 6: Transformasi A, B, M terhadap $h(P, -0.5)$ ketika $P = A$, dalam hal ini $A' = A$.

Dari Gambar 4, sebagaimana pada bukti **Teorema 2.2** dapat diperoleh bahwa $\triangle PA'M' \sim \triangle PAM$ dan $\triangle PB'M' \sim \triangle PBM$. Dari sini diperoleh

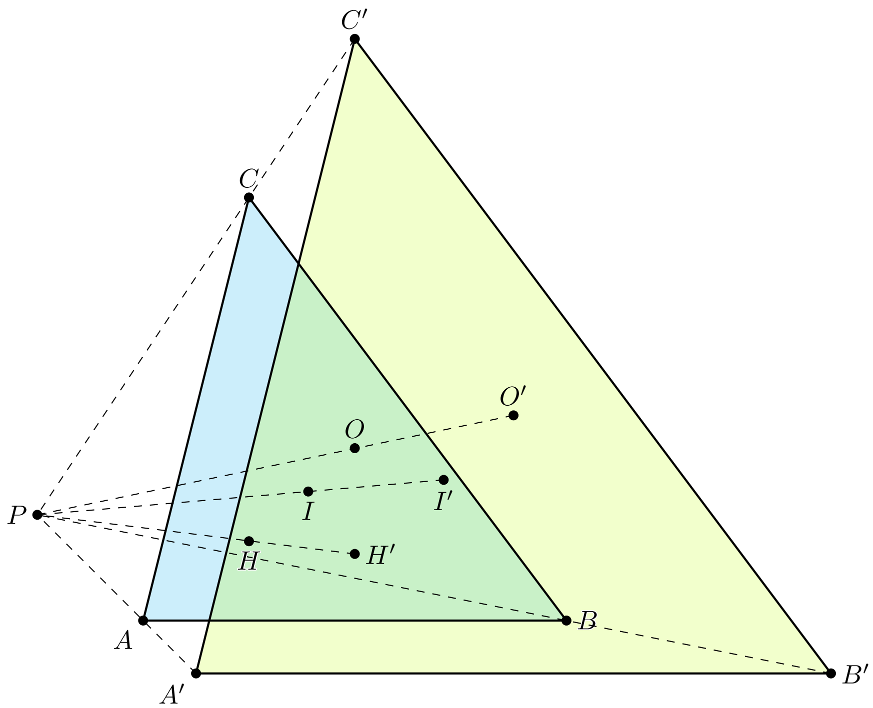
$$\frac{A'M'}{PM'} = \frac{AM}{PM} = \frac{BM}{PM} = \frac{B'M'}{PM'} \implies \frac{A'M'}{PM'} = \frac{B'M'}{PM'}$$

sehingga diperoleh $A'M' = B'M'$. Jadi, M' titik tengah segmen $A'B'$. Pembaca dipersilahkan memverivikasi pada Gambar 5 dan Gambar 6 juga berlaku M' titik tengah segmen $A'B'$.

Sekarang kita akan berbicara mengenai transformasi bangun datar termasuk unsur-unsur yang terkait. Kita mulai contoh dengan segitiga ABC. Misalkan H, I, dan O berturut-turut menyatakan titik tinggi, titik bagi, dan titik pusat lingkaran luar dari segitiga ABC. Untuk suatu titik P, transformasikan masing-masing titik A, B, C, H, I, O terhadap sebuah homothety $h(P, k)$ yang berturut-turut memberikan hasil A', B', C', H', I', O'. Di sini kita akan menemukan beberapa fakta yang menarik. Berdasarkan **Teorema 2.2**, kita punya $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C'$, dan $CA \parallel C'A'$. Terlebih lagi, kita punya

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = |k|$$

yang menyimpulkan $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ (SSS). Yang tidak kalah menarik, titik-titik H', I', O' berperan sebagai titik tinggi, titik bagi, dan titik pusat lingkaran luar dari segitiga $A'B'C'$. Jadi, hasil transformasi tidak merubah sifat semulanya. Terlebih lagi, dapat diperoleh pula hubungan $HI \parallel H'I'$, $IO \parallel I'O'$, dan $HO \parallel H'O'$ berdasarkan **Teorema 2.2**.

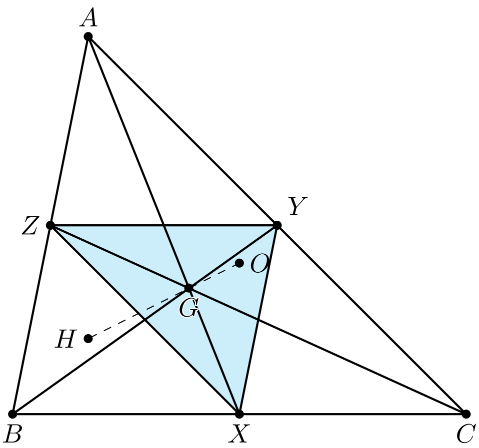


Gambar 7: Transformasi $h(P, 1.5) : \triangle ABC \mapsto \triangle A'B'C'$ beserta unsur-unsur terkait, yakni titik tinggi, titik bagi, dan titik pusat lingkaran luar.

§3. Pengaplikasian Homothety

§3.1. Euler Line

Misalkan H, G, dan O berturut-turut adalah titik tinggi, titik berat, dan titik pusat lingkaran luar dari segitiga ABC. Tinjau segitiga medial dari ABC, yakni segitiga XYZ, di mana X, Y, Z berturut-turut titik tengah sisi BC, CA, AB.



Gambar 8: Hubungan segitiga ABC dengan segitiga XYZ.

Ingat bahwa salah satu properti titik berat, yakni

$$AG : GX = BG : GY = CG : GZ = 2 : 1.$$

Hal ini menandakan

$$h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : A \mapsto X, \quad h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : B \mapsto Y, \quad h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : C \mapsto Z.$$

Hasil terakhir menunjukkan bahwa $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : \triangle ABC \mapsto \triangle XYZ$. Pembaca dapat membuktikan bahwa O merupakan titik tinggi dari segitiga XYZ. Padahal, H adalah titik tinggi tinggi segitiga ABC. Akhirnya, kita dapatkan kesimpulan $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : H \mapsto O$ menurut **Aksioma 2.3** yang berarti juga O, G, H segaris menurut **Aksioma 2.1**. Selain itu, berlaku $HG : GO = 2 : 1$. Garis yang melalui O, G, H disebut sebagai **Euler Line** dan akan dibahas sebuah titik lain yang juga dilalui oleh garis tersebut.

Teorema 3.1: Euler Line

Misalkan H, G, dan O berturut-turut titik tinggi, titik berat, dan titik pusat lingkaran luar dari segitiga ABC. Maka O, G, H segaris dan berlaku $OG : GH = 1 : 2$.

§3.2. Nine Point Circle $\mathcal{N}_9$ (NPC)

Misalkan H dan O berturut-turut merupakan titik tinggi dan titik pusat lingkaran luar segitiga ABC. Misalkan X, Y, Z berturut-turut merupakan titik tengah dari BC, CA, AB, kemudian AH, BH, CH berturut-turut memotong BC, CA, AB di titik D, E, F. Cerminkan titik H

terhadap titik-titik D, E, F, X, Y, Z berturut-turut menghasilkan bayangan D', E', F', X', Y', Z'. Misalkan pula P, Q, dan R berturut-turut merupakan titik tengah segmen AH, segmen BH, dan segmen CH.

Lemma 3.2

Titik D', X', E', Y', Z', F' masing-masing terletak di lingkaran luar segitiga ABC.

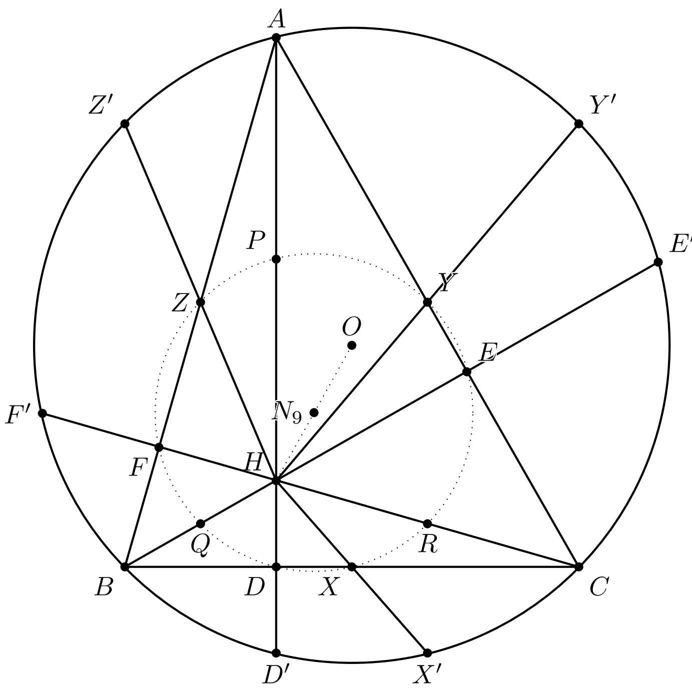
Bukti. Akan dibuktikan bahwa D' dan X' masing-masing terletak di lingkaran luar segitiga ABC, sedangkan untuk sisanya dapat dibuktikan secara analog.
Pertama, akan dibuktikan D' terletak di lingkaran luar segitiga ABC. Berdasarkan sifat pencerminan diperoleh $\triangle BHC \cong \triangle BD'C$. Dengan meninjau segiempat $AEHF$,

$$\angle BD'C = \angle BHC = \angle FHE = 360° - \angle AFH - \angle AEF - \angle FAE = 180° - \angle FAE = 180° - \angle BAC$$

yang memberikan $\angle BD'C + \angle BAC = 180°$. Ini berarti $ACD'B$ segiempat tali busur yang membuktikan bahwa D' terletak di lingkaran luar segitiga ABC.
Akan dibuktikan bahwa X' terletak di lingkaran luar segitiga ABC. Berdasarkan sifat pencerminan, ini berarti panjang $XH = XX'$. Karena juga berlaku panjang $XB = XC$, ini berarti $HCX'B$ merupakan jajargenjang. Dari sini diperoleh

$$\angle BX'C = \angle BHC = \angle FHE = 180° - \angle FAE = 180° - \angle BAC \implies \angle BX'C + \angle BAE = 180°.$$

Ini menunjukkan bahwa $ABX'C$ terletak di lingkaran luar segitiga ABC. Dengan kata lain, titik X' terletak di lingkaran luar segitiga ABC. □



Gambar 9: Hubungan lingkaran sembilan titik dengan lingkaran luar segitiga ABC.

Berdasarkan sifat pencerminan kita punya

$$\frac{HD}{HD'} = \frac{HE}{HE'} = \frac{HZ}{HZ'} = \frac{HX}{HX'} = \frac{HY}{HY'} = \frac{HZ}{HZ'} = \frac{1}{2}.$$

Dari hal tersebut diperoleh hasil transformasi titik-titik D', E', F', X', Y', dan Z' oleh homothety $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$ berturut-turut menghasilkan D, E, F, X, Y, dan Z. Karena titik-titik D', E', F', X', Y', dan Z' terletak di lingkaran luar segitiga ABC, maka hasil transformasi lingkaran luar segitiga ABC oleh $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$ menghasilkan lingkaran luar yang melalui titik-titik D, E, F, X, Y, dan Z menurut **Aksioma 2.3**. Di sisi lain, homothety $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$ mentranformasikan titik-titik A, B, C berturut-turut ke titik-titik P, Q, R. Akibatnya, titik-titik P, Q, R juga terletak di lingkaran yang melalui keenam titik tadi menurut **Aksioma 2.3**, sebut saja $\mathcal{N}_9$. Sehingga terbukti bahwa $\mathcal{N}_9$ melalui sembilan titik D, E, F, X, Y, Z, P, Q, dan R. Karena O pusat lingkaran luar segitiga ABC dan N_9 pusat ω, diperoleh $h\left(H, \frac{1}{2}\right) : O \mapsto N_9$ sehingga O, H, N segaris dan $HN_9 = \left|\frac{1}{2}\right| \cdot OH = \frac{OH}{2}$ sehingga N_9 titik tengah $\overline{OH}$.

Teorema 3.3: Nine Point Circle

Misalkan H dan O berturut-turut adalah titik tinggi dan titik pusat lingkaran luar dari segitiga ABC. Maka sembilan titik berikut: tiga titik tengah sisi segitiga ABC, tiga kaki tinggi segitiga ABC, titik tengah AH, titik tengah BH, dan titik tengah CH terletak di lingkaran yang sama yang disebut Nine Point Circle (NPC). Jika NPC berpusat di N_9, maka N_9, O, dan H segaris dan $N_9O : N_9H = 1 : 1$.

Akibat 3.4

Titik O, G, N_9, dan H segaris dalam urutan tersebut dan berlaku perbandingan panjang $OG : GN_9 : N_9H = 2 : 1 : 3$.

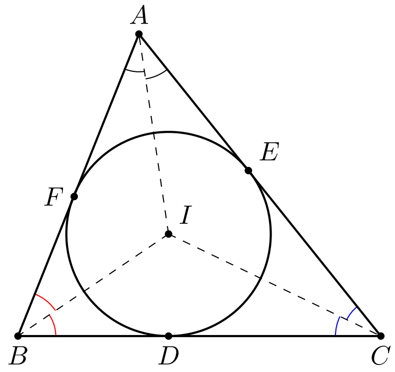
Bukti. Berdasarkan **Aksioma 2.1** dan **Lemma 3.2** berlaku bahwa O, G, N_9, H segaris. Misalkan panjang $OH = 6a$, diperoleh $OG = \frac{1}{3} \cdot 6a = 2a$, $GH = \frac{2}{3} \cdot 6a = 4a$, $ON_9 = N_9H = \frac{1}{2} \cdot 6a = 3a$. Ini berarti O, G, N_9, H segaris dalam urutan tersebut dan berlaku $OG : GN_9 : N_9H = 2 : 1 : 3$. □

§3.3. Lingkaran Dalam dan Lingkaran Singgung Luar

Sebelum membahas lebih lanjut keterkaitan diantara lingkaran dalam dan lingkaran singgung luar segitiga akan dibahas terlebih dahulu terkait masing-masing propertinya.

3.3.1 Properti Lingkaran Dalam

Lingkaran dalam dari suatu segitiga merupakan lingkaran yang menyinggung ketiga sisi segitiga tersebut. Pada gambar berikut, misalkan D, E, dan F berturut-turut adalah titik singgung lingkaran dalam segitiga ABC dengan BC, CA, dan AB.



Gambar 10: Lingkaran dalam segitiga ABC.

Teorema 3.5: Properti Lingkaran Dalam

Pada segitiga ABC, dibuat lingkaran dalam segitiga ABC yang berpusat di I yang menyinggung ketiga sisi segitiga tersebut. Misalkan panjang $BC = a, CA = b, AB = c$, dan $2s = a + b + c$. Maka:

(a). I adalah perpotongan ketiga garis bagi dalam segitiga ABC.

(b). Panjang $BD = BF = s - b, CD = CE = s - c$, dan $AE = AF = s - a$.

Bukti. Perhatikan bahwa $ID \perp BC, IE \perp AC$, dan $IF \perp AB$. Misalkan panjang $ID = IE = IF = r$ dan dari Teorema Pythagoras kita punya

$$BD = \sqrt{BI^2 - ID^2} = \sqrt{BI^2 - r^2} = \sqrt{BI^2 - IF^2} = BF \iff BD = BF.$$

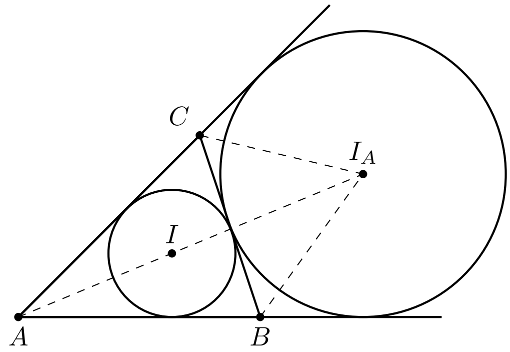
Sehingga kita punya $\triangle BDI \cong \triangle BFI$ (SSS). Akibatnya, kita punya $\angle DBI = \angle FBI$ sehingga BI garis bagi dari $\angle B$. Dengan cara sama, diperoleh AI dan CI juga garis bagi dari $\angle A$ dan $\angle C$ secara berturut-turut. Artinya, I adalah perpotongan ketiga garis bagi segitiga ABC. Selanjutnya, misalkan $AF = AE = x, BF = BD = y$, dan $CD = CE = z$. Kita punya $x + y = c, y + z = a$, dan $z + x = b$. Jumlahkan, diperoleh

$$a + b + c = 2x + 2y + 2z \iff \frac{a + b + c}{2} = x + y + z \iff s = x + y + z.$$

Karena $y + z = a$, maka $x = s - a$. Dengan cara sama, diperoleh juga $y = s - b$ dan $z = s - c$. □

3.3.2 Properti Lingkaran Singgung Luar

Lingkaran singgung luar dari suatu segitiga merupakan lingkaran yang menyinggung dua perpanjangan sisi dan satu sisi segitiga. Lingkaran ini disebut juga sebagai **excircle**. Pada segitiga ABC, definisikan A-Excircle merupakan lingkaran yang menyinggung perpanjangan sisi AB, perpanjangan sisi AC, dan segmen BC. Definisikan pula B-Excircle dan C-Excircle secara analog. Selain itu, misalkan I_A, I_B, I_C sebagai titik pusat A-Excircle, B-Excircle, dan C-Excircle.



Gambar 11: A-Excircle dari segitiga ABC

Teorema 3.6: Lingkaran Singgung Luar

Misalkan r_A, r_B, r_C berturut-turut menyatakan panjang jari-jari A-Excircle, B-Excircle, dan C-Excircle. Selain itu, misalkan A', B', C' berturut-turut adalah titik singgung A-Excircle dengan segme BC, perpanjangan AB, dan perpanjangan AC. Jika panjang $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, dan $2s = a + b + c$, maka:

(a). Titik pusat lingkaran singgung luar merupakan perpotongan dua garis bagi luar dan satu garis bagi dalam dari sudut segitiga ABC. Dengan kata lain, I_A adalah perpotongan dua garis bagi luar $\angle B$ dan $\angle C$ serta garis bagi dalam $\angle A$. Begitu juga untuk I_B dan I_C.

(b). Titik A, I, I_A segaris di mana I adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Begitu juga B, I, I_B segaris dan C, I, I_C segaris.

(c). Panjang $AB' = AC' = s$ dan $AB + BA' = AC + CA' = s$.

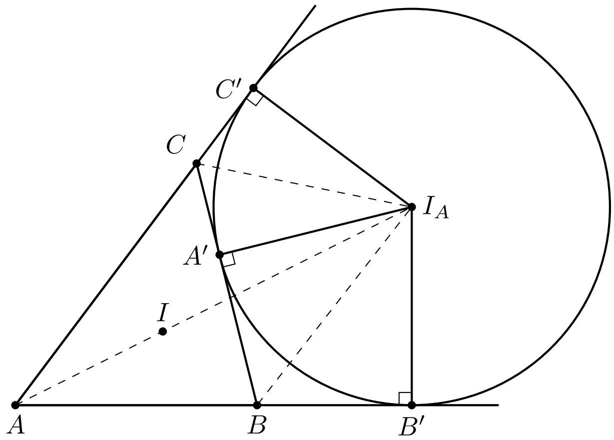
(d). Berlaku
$$r_A = \frac{sr}{s-a}, \quad r_B = \frac{sr}{s-b}, \quad r_C = \frac{sr}{s-c}.$$

Bukti. Akan kita tinjau untuk A-excircle dan dua lingkaran lainnya dapat dibuktikan dengan langkah yang sama. Misalkan A-excircle menyinggung sinar AB, sinar AC, dan segmen BC berturut-turut di titik B', C', dan A'. Misalkan juga I adalah perpotongan ketiga garis bagi dalam segitiga ABC (sekaligus merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC).

(a). Dari Teorema Pythagoras berlaku
$$AB' = \sqrt{AI_A^2 - B'I_A^2} = \sqrt{AI_A^2 - C'I_A^2} = AC'.$$

Karena panjang $AB' = AC', I_AB' = I_AC'$, dan $AI_A = AI_A$, maka $\triangle AB'I_A \cong \triangle AC'I_A$ (SSS). Akibatnya, berlaku $\angle B'AI_A = \angle C'AI_A$ sehingga AI_A merupakan garis bagi dari $\angle B'AC'$, dengan kata lain AI_A adalah garis bagi dalam dari sudut $\angle BAC$. Perhatikan bahwa BB' dan BA' merupakan garis singgung dari A-excircle, maka panjang $BB' = BA'$. Dengan cara yang sama, didapatkan $\triangle BB'I_A \cong \triangle BA'I_A$ sehingga diperoleh

$\angle B'BI_A = \angle A'BI_A$ yang artinya BI_A adalah garis bagi dari $\angle B'BA'$. Dengan kata lain, BI_A merupakan garis bagi luar dari $\angle ABC$. Dengan cara sama, didapatkan CI_A juga merupakan garis bagi luar $\angle ACB$. Terbukti bahwa I_A merupakan perpotongan dua garis bagi luar dan satu garis bagi dalam dari segitiga ABC.



Gambar 12: A-excircle dari segitiga ABC

(b). Karena AI_A dan AI masing-masing garis bagi dalam dari $\angle BAC$, hal ini menunjukkan bahwa A, I, dan I_A segaris. Dengan cara yang sama, diperoleh B, I, I_B segaris dan C, I, I_C segaris.

(c). Telah dibuktikan $\triangle BB'I_A \cong \triangle BA'I_A$ dan $CC'I_A \cong \triangle CA'I_A$ di bagian (a). Diperoleh

$$\begin{aligned} AB' + AC' &= AB + BB' + AC + CC' \\ &= AB + BA' + AC + CA' \\ &= AB + AC + (BA' + CA') \\ &= AB + AC + BC \\ &= 2s. \end{aligned}$$

Karena panjang $AB' = AC'$ yang telah dibuktikan $\triangle AB'I_A \cong \triangle AC'I_A$ di bagian (a), maka panjang $AB' = AC' = s$. Selain itu,

$$s = AB' = AB + BB' = AB + BA' \implies AB + BA' = s$$

dan secara analog diperoleh $AC + CA' = s$.

(d). Misalkan lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung $\overline{AB}$ di titik D, kita punya $\angle IDA = 90°$. Karena $\angle IB'A = \angle IDA$ dan $\angle IAD = \angle I_AAB'$, maka $\triangle ADI \sim \triangle AB'I_A$ (AA). Sehingga didapatkan

$$\frac{I_AB'}{ID} = \frac{AB'}{AD} \iff \frac{r_A}{r} = \frac{AB'}{AD} \iff r_A = \frac{AB'}{AD} \cdot r.$$

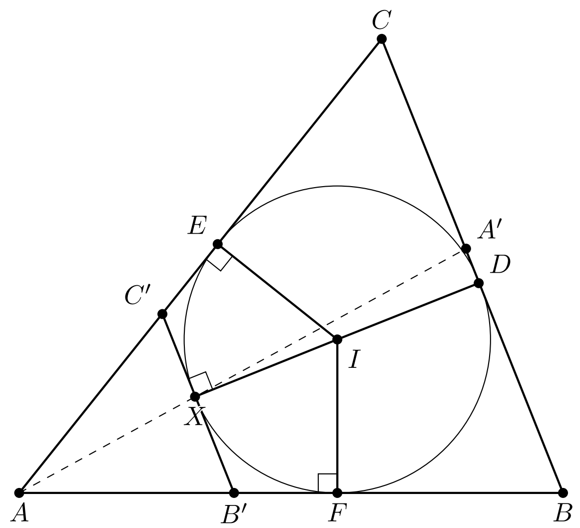
Kita punya $AD = s - a$ berdasarkan **Teorema 3.5** dan $AB' = s$ dari bagian (c), diperoleh $r_A = \frac{s}{s-a}r$. Secara analog, diperoleh $r_B = \frac{s}{s-b}r$ dan $r_C = \frac{s}{s-c}r$.

$\square$

3.3.3 Hubungan Lingkaran Dalam dan Lingkaran Singgung Luar

Perhatikan Gambar 13 dan misalkan D titik singgung lingakaran dalam segitiga ABC dengan AB. Telah dibuktikan bahwa A, I, I'_A segaris dan $\frac{r_A}{r} = \frac{s}{s-a}$, ini menunjukkan bahwa homothety $h\left(A, \frac{s}{s-a}\right)$ mentransformasikan lingkaran dalam ke A-Excircle.

Misalkan lingkaran dalam segitiga ABC yang berpusat di I menyinggung BC, CA, dan AB berturut-turut di titik D, E, dan F. Garis DI memotong lingkaran dalam segitiga ABC sekali lagi di titik X, kemudian garis yang melalui X dan sejajar BC memotong AB dan AC berturut-turut di titik B' dan C'. Definisikan pula A' sebagai titik singgung A-Excircle dengan BC. Notasikan ω sebagai lingkaran dalam segitiga ABC.



Gambar 13: Hubungan Titik Singgung Excircle

Perhatikan bahwa ω merupakan lingkaran singgung luar dari segitiga $AB'C'$ yang berhadapan dengan titik A. Karena $IX \perp B'C'$, ini menunjukkan bahwa X merupakan titik singgung lingkaran singgung luar segitiga $AB'C'$ dengan $B'C'$. Dengan meninjau $h\left(A, \frac{s}{s-a}\right)$ yang mentrasformasikan ω ke A-Excircle, ini berarti titik X dipetakan ke A', yaitu $h\left(A, \frac{s}{s-a}\right) : X \mapsto A'$. Ini menunjukkan bahwa A, X, A' kolinear.

Lemma 3.7

Diberikan segitiga ABC dan A' merupakan titik singgung A-Excircle dengan BC, sedangkan titik X merupakan pencerminan titik D terhadap I di mana D titik singgung lingkaran dalam segitiga ABC dengan BC. Maka A, X, dan A' segaris.

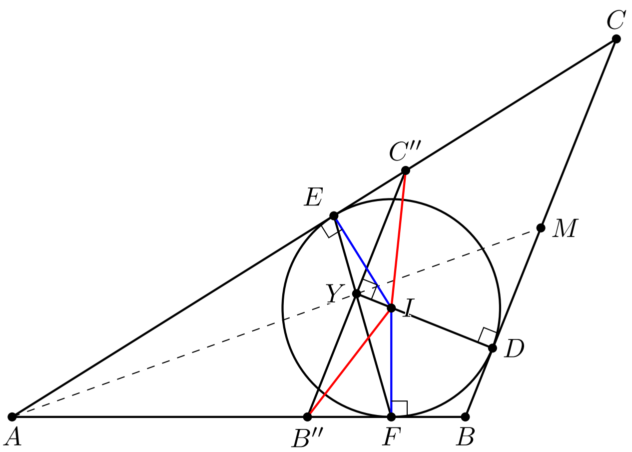
Diberikan segitiga ABC, kemudian definisikan I, D, E, dan F sebagaimana pada Gambar 13. Misalkan DI memotong segmen EF di titik Y, kemudian garis yang melalui Y serta sejajar BC memotong AB dan AC berturut-turut di titik B'' dan C''. Perhatikan bahwa $\angle YDC = \angle IDC = 90^\circ$ dan karena $B''C'' \parallel BC$, maka $\angle DYC'' = \angle BDY = 90^\circ$. Kita klaim bahwa I terletak di lingkaran luar segitiga $AB''C''$. Notasikan $\measuredangle$ besaran suatu sudut yang diambil mod 180°.* Perhatikan bahwa $\measuredangle IYC'' = 90^\circ = \measuredangle IEC''$ dan $\measuredangle IYB'' = 90^\circ = \measuredangle IFB''$ sehingga I, Y, E, C'' terletak pada satu lingkaran dan I, Y, B'', F terletak pada satu lingkaran. Karena $IF = IE$ yang berarti $\angle IFE = \angle FEI$, dari sini diperoleh

$$\measuredangle IB''C'' = \measuredangle IFY = \measuredangle IFE = \measuredangle FEI = \measuredangle YEI = \measuredangle YC''I.$$

Ini berakibat

$$\measuredangle B''IC'' = \measuredangle FEI = \measuredangle FAE = \measuredangle B''AC'' \implies \measuredangle B''IC'' = \measuredangle B''AC''.$$

Ini berarti $AB''IC''$ segiempat tali busur. Karena $\angle IB''C = \angle IC''B$, maka panjang $IB'' = IC''$ yang mana kondisi $IY \perp B''C''$ berakibat panjang $YB'' = YC''$. Artinya, Y merupakan titik tengah $\overline{B''C''}$. Kondisi $B''C'' \parallel BC$ menunjukkan bahwa terdapat homothety $h(H, r) : B''C'' \mapsto BC$ di mana $r > 0$. Ini menunjukkan bahwa $h(H, r)$ memetakan Y ke titik tengah $\overline{BC}$.



Gambar 14: Hubungan Titik Tengah Sisi Segitiga

Lemma 3.8

Diberikan segitiga ABC dan misalkan lingkaran dalamnya menyinggung BC, CA, dan AB berturut-turut di titik D, E, dan F. Misalkan M merupakan titik tengah $\overline{BC}$ dan DI memotong EF di titik Y. Maka A, Y, M segaris.

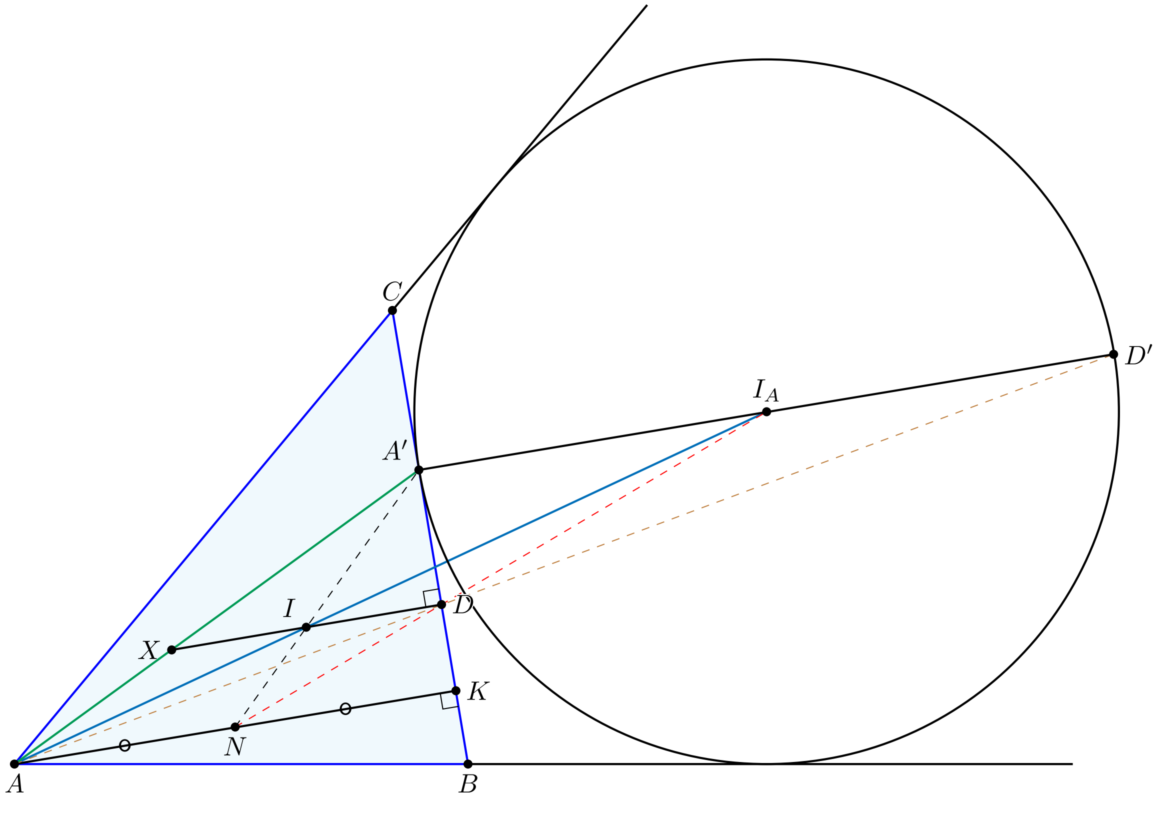
Diberikan segitiga ABC, kemudian titik K pada garis BC sedemikian sehingga $AK \perp BC$. Definisikan X, A', D, dan I sebagaimana Gambar 13, I_A sebagai pusat A-Excircle, N titik tengah $\overline{AK}$, dan D' merupakan pencerminan titik A' terhadap I_A. Tinjau XD diameter lingkaran dalam sehingga I merupakan titik tengah $\overline{XD}$, serta **Lemma 3.7** menyatakan bahwa A, X, A' segaris.

Tinjau bahwa $XD \parallel AK$ yang menunjukkan $\triangle A'DX \sim \triangle A'KA$. Maka terdapat homothety $h(A', a) : DX \mapsto KA$ dengan $a > 0$. Karena I titik tengah $\overline{DX}$, maka homothety $h(A', a)$ memetakan I ke titik tengah $\overline{AK}$, yaitu N. Ini menunjukkan $h(A', a) : I \mapsto N$ sehingga

*Pembaca yang belum familiar dengan hal ini disarankan membaca tentang sudut berarah (*direct angle*). Tekhnik sudut berarah digunakan karena ada beberapa macam konfigurasi yang perlu dikerjakan secara terpisah, namun dapat dikerjakan sekaligus apabila menggunakan sudut berarah.

A', I, N segaris. Tinjau homothety $h(A, b)$ yang memetakan lingkaran dalam segitiga ABC ke A-Excircle. Pada **Lemma 3.7** telah dijelaskan bahwa $h(A, b) : X \mapsto A'$ dan $h(A, b) : I \mapsto I_A$, ini menunjukkan bahwa $h(A, b) : XI \mapsto A'I_A$. Ini artinya homothety $h(A, b)$ memetakan garis XD ke garis $A'D'$. Mengingat I titik tengah $\overline{XD}$ dan I_A titik tengah $\overline{A'D'}$ serta $h(A, b) : I \mapsto I_A$, ini berarti $h(A, b) : D \mapsto D'$. Jadi, A, D, D' segaris.

Tinjau bahwa $A'D' \parallel AK$ dan telah dibuktikan A, D, D' segaris, dari sini diperoleh $\triangle AKD \sim \triangle D'A'D$. Jadi, $\triangle DAK \sim \triangle DA'D'$ yang berarti terdapat homothety $h(D, c)$: $\triangle AK \mapsto A'D'$. Karena N titik tengah $\overline{Ak}$, maka homothety $h(D, c)$ memetakan N ke titik tengah $\overline{A'D'}$, atau dengan kata lain, $h(D, c) : N \mapsto I_A$. Jadi, N, D, I_A segaris.



Gambar 15: Hubungan Titik Tengah Garis Tinggi Segitiga

Lemma 3.9

Diberikan segitiga ABC. Lingkaran dalam segitiga ABC berpusat di titik I dan menyinggung BC di titik D, sedangkan A-Excircle berpusat di I_A menyinggung BC di A'. Titik K terletak di BC sedemikian sehingga $AK \perp BC$ dan N titik tengah $\overline{AK}$. Titik D' adalah pencerminan titik A' terhadap I_A. Maka:

(a). N, D, I_A segaris.

(b). N, I, A' segaris.

(c). A, D, D' segaris.

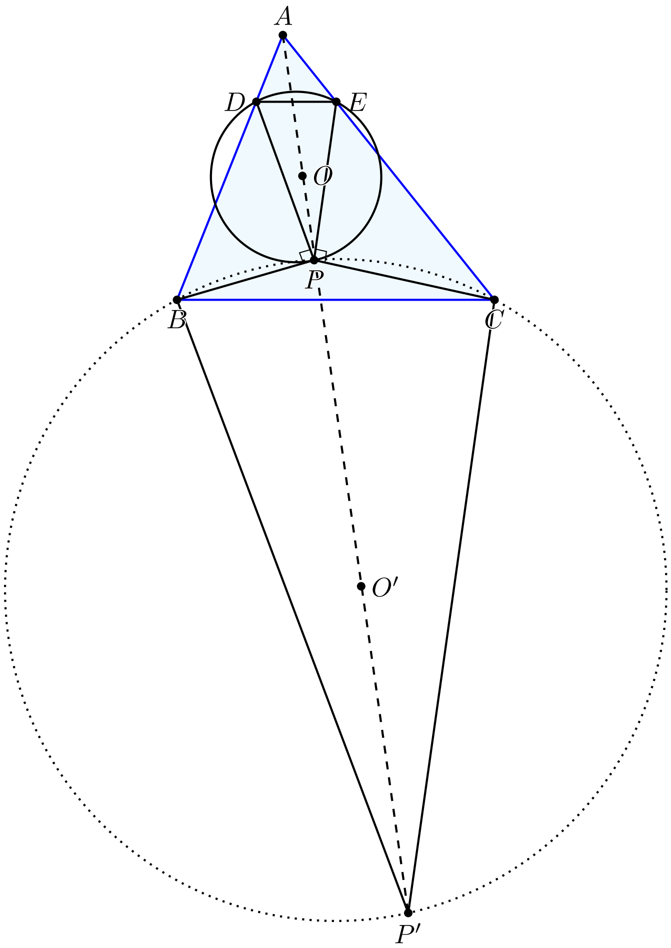
§4. Contoh Soal

§4.1. Olimpiade Sains Nasional 2022 #6

Contoh 4.1: OSN 2022 #6

Pada segitiga ABC, titik D dan E berada pada sisi AB dan AC berturut-turut sehingga DE sejajar BC. Diketahui terdapat titik P pada interior segiempat $BDEC$ sehingga $\angle BPD = \angle CPE = 90^\circ$. Buktikan bahwa garis AP melalui titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga EPD dan BPC.

Karena $DE \parallel BC$, maka terdapat suatu homothety $h(A, r) : DE \mapsto BC$. Kondisi $\angle BPD = \angle EPC = 90^\circ$ terasa *absurd* untuk dimanfaaatkan, dari sini memotivasi untuk konstruksi suatu titik P' sedemikian sehingga $P'B \parallel PD$ dan $P'C \parallel PE$ dan memberikan $\angle P'BP = \angle DPB = 90^\circ = \angle EPC = \angle PCP'$. Misalkan O dan O' berturut-turut titik pusat lingkaran luar segitiga DEP dan segitiga BCP'.



Gambar 16: OSN 2022 #7

Kita klaim bahwa $BPCP'$ segiempat talibusur.

$$
\begin{aligned}
&\angle PBP' + \angle PCP' \\
&= 90^\circ + 90^\circ \\
&= 180^\circ
\end{aligned}
$$

sehingga $BPCP'$ segiempat talibusur. Karena $DE \parallel BC, PD \parallel BP'$, dan $PE \parallel CP'$, ini berarti homothety $h(A, r) : \triangle DEP \mapsto \triangle BCP'$. Ini membuktikan bahwa $h(A, r) : P \mapsto P'$ sehingga A, P, P' segaris. Karena $\angle PBP' = 90^\circ$, maka PP' merupakan diameter lingkaran luar segitiga BCP'. Mengingat $h(A, r) : \triangle DEP \mapsto \triangle BCP'$, maka $h(A, r) : O \mapsto O'$ sehingga A, O, O' segaris. Karena A, P, P' segaris dan P, O', P juga segaris, dapat disimpulkan bahwa A, O, P, O', P' segaris.

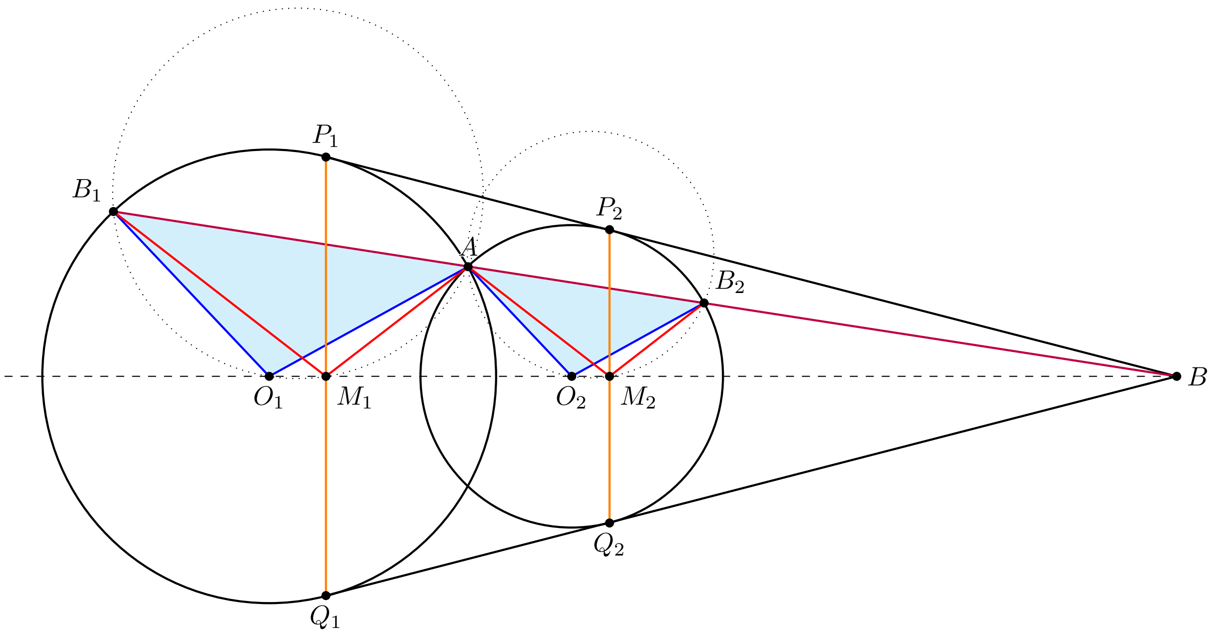
Karena O' juga merupakan titik pusat lingkaran luar segitiga BPC, maka terbukti bahwa AP melalui titik pusat lingkaran luar segitiga EPD dan BPC.

§4.2. International Mathematical Olympiad 1983 #2

Contoh 4.2: IMO 1983 #2

Misalkan A adalah salah satu dari dua titik perpotongan berbeda dari dua lingkaran tak kongruen C_1 dan C_2 yang berpusat di O_1 dan O_2, berturut-turut. Salah satu garis singgung persekutuan kedua lingkaran menyinggung C_1 di P_1 dan C_2 di P_2, sedangkan garis singgung yang lain menyinggung C_1 di Q_1 dan C_2 di Q_2. Misalkan M_1 adalah titik tengah P_1Q_1 dan M_2 adalah titik tengah P_2Q_2. Buktikan bahwa $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $r_2 < r_1$ di mana r_i menyatakan panjang jari-jari lingkaran C_i. Cukup *well-known* bahwa P_1P_2, Q_1Q_2, dan O_1O_2 berpotongan di satu titik, mudah dibuktikan dengan memanfaatkan kekongruenan (diserahkan kepada pembaca). Misalkan titik perpotongan ketiga garis tersebut adalah B. Selain itu, misalkan garis AB memotong lingkaran C_1 dan C_2 berturut-turut di titik B_1 dan B_2 di mana $B_1, B_2 \neq A$. Untuk membuktikan $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$, hal ini ekuivalen dengan membuktikan $O_1AM_1 = \angle O_2AM_2$. Pertama, kita klaim bahwa M_1 dan M_2 juga terletak pada garis BO_1.



Gambar 17: IMO 1983 #2

Tinjau bahwa dari Power of Point berlaku $BP_1^2 = \text{Pow}_{C_1}(B) = BQ_1^2$ sehingga $BP_1 = BQ_1$. Karena panjang $M_1P_1 = M_1Q_1$, $BP_1 = BQ_1$, dan $BM_1 = BM_1$, maka $\triangle BM_1P_1 \cong \triangle BM_1Q_1$ sehingga berakibat $\angle P_1BM_1 = \angle Q_1BM_1$. Artinya, BM_1 garis bagi $\angle P_1BQ_1$. Padahal, BO_1 juga garis bagi $\angle P_1BQ_1$ yang membuktikan bahwa B, M_1, dan O_1 segaris. Secara analog, B, M_2, O_2 segaris. Jadi, M_1 dan M_2 terletak pada garis BO_1.

Perhatikan bahwa homothety $h\left(B, \frac{r_1}{r_2}\right)$ memetakan C_2 ke C_1. Ini berarti $h\left(B, \frac{r_1}{r_2}\right) : P_2 \mapsto P_1$ dan $h\left(B, \frac{r_1}{r_2}\right) : Q_2 \mapsto Q_1$. Jadi, $h\left(B, \frac{r_1}{r_2}\right) : P_2Q_2 \mapsto P_1Q_1$ yang menunjukkan $h\left(B, \frac{r_1}{r_2}\right) : M_2 \mapsto M_1$. Selain itu, tinjau bahwa $h\left(B, \frac{r_1}{r_2}\right)$ memetakan B_2 ke A dan memetakan A ke B_1. Dari sini,

dapat disimpulkan bahwa homothety $h\left(B, \frac{r_1}{r_2}\right)$ memetakan $O_2M_2B_2A$ ke $O_1M_1AB_1$. Dari sini diperoleh $\angle O_2AM_2 = \angle O_1B_1M_1$.
Kita klaim bahwa segiempat $O_2M_2B_2A$ dan $O_1M_1AB_1$ masing-masing segiempat siklis. Tinjau bahwa $\angle O_2P_2B = \angle P_2M_2B = 90^\circ$ sehingga berlaku $BP_2^2 = BM_2 \cdot BO_2$. Dari Power of Point,

$$BM_2 \cdot BO_2 = BP_2^2 = BB_2 \cdot BA \implies BM_2 \cdot BO_2 = BB_2 \cdot BA$$

sehingga $O_2M_2B_2A$ siklis. Kemudian, homthety $h\left(B, \frac{r_1}{r_2}\right) : O_2M_2B_2A \mapsto O_1M_1AB_1$ menunjukkan $O_1M_1AB_1$ juga siklis. Diperoleh

$$\angle O_2AM_2 = \angle O_1B_1M_1 = \angle O_1AM_1 \implies \angle O_2AM_2 = \angle O_1AM_1$$

seperti yang ingin dibuktikan.

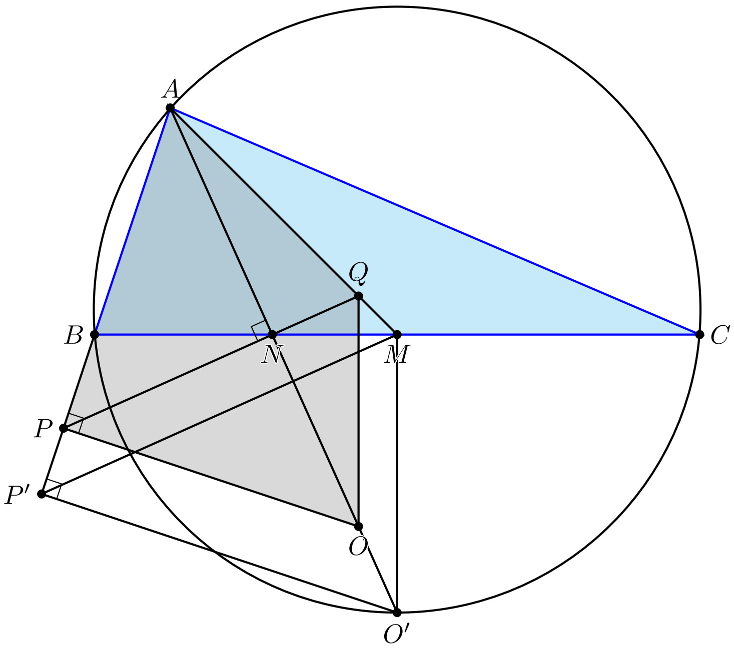
Remark. *Pembuktikan $BM_2 \cdot BO_2 = BP_2^2$ dapat dibuktikan dengan kesebangunan pada $\triangle BP_2M_2 \sim \triangle BO_2P_2$. Bahasan lebih jauh tentang titik M_1 dan M_2 dibahas pada pembahasan inversi.*

§4.3. Asian Pacific Mathematical Olympiad 2000 #3

Contoh 4.3

Misalkan ABC merupakan segitiga. Garis berat dan garis bagi yang melalui titik A memotong BC berturut-turut di titik M dan N. Garis yang tegak lurus NA di N memotong MA dan BA berturut-turut di titik Q dan P. Titik O merupakan perpotongan garis yang tegak lurus BA di P dengan AN. Buktikan bahwa QO tegak lurus BC.

Jika panjang $AB = AC$, maka $M = N = Q$, $B = P$, akibatnya $ABOC$ layang-layang dan jelas berakibat $OQ \equiv OM$ tegak lurus BC. Jika panjang $AB \neq AC$, WLOG panjang $AB < AC$.



Gambar 18: APMO 2000 #3

Misalkan AN memotong lingkaran luar segitiga ABC sekali lagi di titik O'. Tinjau $\angle O'CB = \angle O'AB = \angle O'AC = \angle O'BC \implies \angle O'CB = \angle O'BC$ sehingga panjang $O'B = O'C$. Akibatnya, $O'M \perp BC$. Secara intutif, dari sini termotivasi untuk membuktikan bahwa terdapat suatu homothety $h(A, r) : O'M \mapsto OQ$. Selain itu, dari sini termotivasi untuk mendefinisikan titik baru yang hampir secara analog dengan soal: definisikan P' sebagai titik pada AB sedemikian sehingga $O'P' \perp AB$, maka akan dibuktikan bahwa garis yang melalui P' tegak lurus AN melalui M. Sekali lagi, dalam hal ini perlu membuktikan bahwa terdapat homothety dengan pusat A yang memetakan segiepmat $APOQ$ ke segiempat $AP'O'M$.
Tinjau bahwa $OP \parallel O'P'$, ini artinya terdapat suatu homothety $h(A, k) : P' \mapsto P$ dan $h(A, k) : O' \mapsto O$. Sekarang, tujuan kita adalah membuktikan $MP' \perp AN$. Tinjau $\angle BP'O' + \angle AMO' = 180°$, maka $BP'O'M$ siklis. Dari sini diperoleh

$$\angle BP'M = 90° - \angle O'P'M = 90° - \angle O'BM = 90° - \angle O'BC = 90° - \angle O'AC = 90° - \angle O'AB = 90° - \angle O'AP'.$$

Dari sini diperoleh bahwa $AO' \perp MP'$ seperti yang ingin dibuktikan. Ini menunjukkan bahwa $PQ \parallel P'M$ sehingga terdapat suatu homothety dengan pusat A yang membahwa $P'M$ ke PQ. Karena $h(A, k) : P' \mapsto P$, ini menunjukkan bahwa $h(A, k) : M \mapsto Q$. Karena $h(A, k)$ memetakan M ke Q dan O' ke O, ini membuktikan bahwa $h(A, k) : MO' \mapsto OQ$. Karena $MO' \perp BC$, maka $OQ \perp BC$ seperti yang ingin dibuktikan.

§4.4. KTO Matematika Agustus 2023 #15

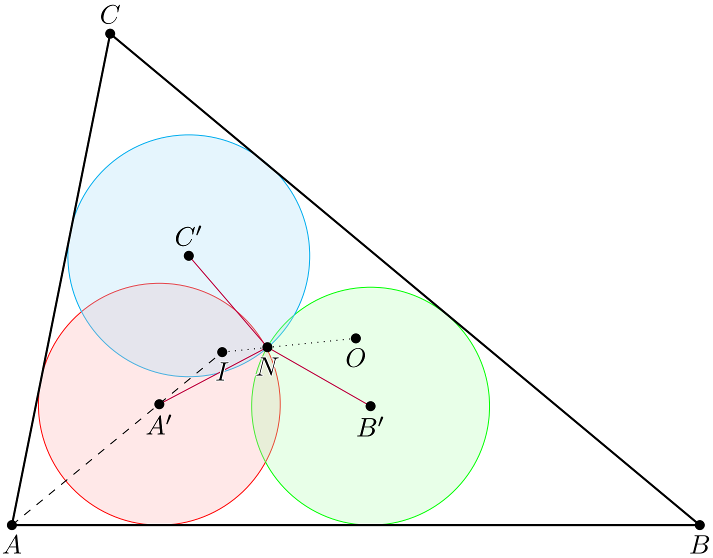
Contoh 4.4: KTOM Agustus 2023 #15, Wildan Bagus Wicaksono

Diberikan segitiga ABC yang memiliki panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luarnya berturut-turut adalah 1 dan 3. Misalkan I menyatakan titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Suatu titik N terletak di dalam segitiga ABC yang memenuhi kondisi berikut: Misalkan ω_A menyatakan lingkaran yang melalui titik N serta menyinggung sisi AC dan AB. Definisikan ω_B dan ω_C secara analog. Maka, lingkaran ω_A, ω_B, dan ω_C kongruen.
Jika panjang IN adalah s, maka nilai dari $10s$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{p} - \sqrt{q}$ di mana p dan q bilangan asli. Tentukan nilai dari $p + q$.

Misalkan O menyatakan pusat lingkaran luar segitiga ABC. Kita klaim bahwa I, N, dan O segaris. Misalkan A', B', dan C' berturut-turut merupakan pusat ω_A, ω_B, dan ω_C. Notasikan $r = 1$ sebagai panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC, $R = 3$ sebagai panjang jari-jari lingkaran luar segitiga ABC, dan t panjang jari-jari $\omega_A, \omega_B, \omega_C$.
Perhatikan bahwa ω_A menyinggung AB dan AC, maka terdapat suatu homothety $h(A, a)$ yang memetakan ω_A ke lingkaran dalam segitiga ABC dengan $a = \frac{r}{t} = \frac{1}{t}$ (mengapa?). Ini berarti homothety $h(A, a)$ memetakan A' ke titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC, yaitu I. Jadi, $h(A, a) : A' \mapsto I$ yang menandakan A, A', dan I segaris. Secara analog, B, B', I segaris dan C, C', I segaris, dengan $h\left(B, \frac{1}{t}\right)$ dan $h\left(C, \frac{1}{t}\right)$ berturut-turut memetakan ω_B dan ω_C ke

lingkaran dalam segitiga ABC. Hal ini menunjukkan

$$\frac{AI}{AA'}=\frac{BI}{BB'}=\frac{CI}{CC'}=\left|\frac{r}{t}\right|=\frac{r}{t}\implies\frac{AI}{AA'}=\frac{BI}{BB'}=\frac{CI}{CC'}=\frac{1}{t}\implies\frac{IA'}{IA}=\frac{IB'}{IB}=\frac{IC'}{IC}=\frac{r-t}{r}.$$



Gambar 19: KTOM Agustus 2023 #15, oleh Wildan Bagus Wicaksono

Dapat disimpulkan bahwa suatu homothety $h(I,d)$ memetakan A',B',C' berturut-turut ke A,B,C yang menunjukkan $h(I,d):\triangle A'B'C'\mapsto\triangle ABC$ di mana $d>0$. Akan kita tentukan d lebih spesifik. Misalkan D adalah titik singgung lingkaran dalam segitiga ABC dengan AB dan ID memotong $A'B'$ di D'. Homothety $h(I,d):D\mapsto D'$ menandakan bahwa D' juga titik singgung lingkaran dalam segitiga $A'B'C'$ dengan panjang jari-jari $ID'=ID-DD'=1-t$. Karena $h(I,d):D\mapsto D'$, maka

$$ID=|d|ID'\iff d=|d|=\frac{ID}{ID'}=\frac{t}{1-t}\implies h\left(I,\frac{t}{1-t}\right):\triangle A'B'C'\mapsto\triangle ABC.$$

Perhatikan bahwa panjang $NA'=NB'=NC'=t$, maka N adalah titik pusat lingkaran luar segitiga $A'B'C'$ dan lingkaran luarnya memiliki panjang jari-jari t. Karena homothety $h\left(A,\frac{1-t}{t}\right)$ memetakan lingkaran luar segitiga $A'B'C'$ ke lingkaran luar segitiga ABC, maka

$$R=\left|\frac{t}{1-t}\right|t=\frac{t}{1-t}\cdot t=\frac{t^2}{1-t}\implies 3=\frac{t^2}{1-t}\iff 0=t^2+3t-3\implies t=\frac{\sqrt{21}-3}{2}.$$

Maka homothety $h\left(I,\frac{t}{1-t}\right)$ memetakan N ke titik pusat lingkaran luar segitiga ABC, yaitu O, atau $h\left(I,\frac{t}{1-t}\right):N\mapsto O$. Jadi, I,N,O segaris dan berlaku perbandingan

$$OI=\left|\frac{t}{1-t}\right|NI=\frac{t}{1-t}NI\iff IN=\frac{1-t}{t}OI=\frac{1-\frac{\sqrt{21}-3}{2}}{\frac{\sqrt{21}-3}{2}}OI=\frac{5-\sqrt{21}}{\sqrt{21}-3}OI=\frac{\sqrt{21}-3}{6}OI.$$

Kita tahu bahwa $OI=\sqrt{R(R-2r)}=\sqrt{3(3-2)}=\sqrt{3}$, diperoleh

$$s=NI=\frac{\sqrt{21}-3}{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\implies 10s=5\sqrt{7}-5\sqrt{3}=\sqrt{175}-\sqrt{75}.$$

Jadi, $p=175$ dan $q=75$ sehingga $p+q=\boxed{250}$.

Remark. *Pembaca yang belum familiar dengan Teorema Euler $OI^2 = R(R-2r)$ dapat membacanya pada Power of Point halaman 14.*

§5. Problems

Soal belum tentu terurut berdasarkan tingkat kesulitan. Soal tertentu yang memiliki label $\star$ diberikan solusinya.

Soal 5.1. Diketahui ω_1 dan ω_2 adalah dua lingkaran yang bersinggungan dalam.

(a). Perlihatkan bahwa terdapat homothety yang membawa ω_1 ke ω_2. Tentukan titik pusat homothety tersebut.

(b). Tunjukkan bahwa kedua titik pusat ω_1 dan ω_2 segaris dengan titik singgung kedua lingkaran tersebut.

Teorema 5.2. Diberikan O dan Q dua titik yang berbeda, kemudian tinjau homothety $h(O,k)$ dan $H(Q,p)$.

(a). Buktikan bahwa komposisi $h(O,k) \circ h(Q,p)$ juga merupakan homothety.
Catatan. Apabila sebarang titik A dikenakan $h(O,k) \circ h(Q,p)$ maka bayangannya dapat diperoleh dengan $h(Q,p) : A \mapsto A'$, $h(O,k) : A' \mapsto A''$, dan $h(Q,p) \circ h(O,k) : A \mapsto A''$.

(b). Jika $p \neq 1$, buktikan bahwa $h(O,k) \circ h(Q,p) = h(R,kp)$ di mana R terletak pada garis OQ yang memenuhi $\overrightarrow{RQ} = k(p-1)\overrightarrow{QO}$.

Soal 5.3. Misalkan P adalah suatu titik di dalam persegi $ABCD$. Buktikan bahwa titik berat dari segitiga ABP, BCP, CDP, dan DAP membentuk persegi.

Soal 5.4 (USAMO 1993 #2)**.** Misalkan $ABCD$ adalah segiempat yang diagonal $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ berpotongan tegak lurus di E. Buktikan bahwa pencerminan titik E terhadap $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ terletak pada satu lingkaran.

Soal 5.5. Misalkan ABC segitiga lancip dan titik X berada di lingkaran luar segitiga ABC sedemikian sehingga $\overline{AX}$ sejajar $\overline{BC}$, di mana $X \neq A$. Misalkan G adalah titik berat dari segitiga ABC dan K adalah kaki tinggi dari titik A ke $\overline{BC}$. Buktikan bahwa K, G, X segaris.$\star$

Lemma 5.6 (Lemma 3.7)**.** Diberikan segitiga ABC dan I merupakan titik pusat lingkaran dalamnya. Lingkaran tersebut menyinggung BC di titik D, kemudian X merupakan pencerminan titik D terhadap I.

(a). Buktikan bahwa panjang $BD = CA'$.

(b). Jika M titik tengah BC, buktikan bahwa $\overline{IM} \parallel AA'$ di mana A' merupakan titik singgung A-Excircle dengan BC.

Lemma 5.7 (Archimedes)**.** Diberikan lingkaran ω_1 dan dua titik A, B yang berbeda terletak pada lingkaran tersebut. Konstruksikan lingkaran ω_2 yang bersinggungan dalam dengan ω_1 di T dan menyinggung $\overline{AB}$ di K.

(a). Misalkan M adalah titik tengah busur AB yang tidak mengandung titik T. Buktikan bahwa T, K, M segaris.

(b). Tunjukkan bahwa $\triangle TMB \sim \triangle BMK$. Hal ini menunjukkan bahwa $MK \cdot MT = MB^2$ yang berarti $MA^2 = MB^2 = \text{Pow}_{\omega_2}(M)$.

Soal 5.8 (Russia 2000, Grade 10 #7)**.** Dua lingkaran bersinggungan dalam di titik N. Busur BA dan BC dari lingkaran yang lebih besar menyinggung lingkaran yang lebih kecil berturut-turut di titik K dan M. Titik Q dan P berturut-turut merupakan titik tengah busur AB dan busur BC yang tidak mengandung titik N. Lingkaran luar BQK dan BPM berpotongan sekali lagi di titik L. Buktikan bahwa $BPLQ$ jajargenjang.

Soal 5.9 (Russia 2001, Grade 10 #3)**.** Misalkan lingkarna ω_1 bersinggungan dalam dengan lingkaran ω_2 di N. Ambil sebarang titik K pada ω_1, kemudian buat garis singgung AB dari ω_1 yang dan memotong ω_2 di titik A dan B. Misalkan M adalah titik tengah busur AB yang berlawanan sisi dengan titik N. Buktikan bahwa panjang jari-jari lingkaran luar segitiga KBM tidak bergantung dengan pemilihan letak titik K.

Soal 5.10 (IMO 1999 #2)**.** Dua lingkaran Ω_1 dan Ω_2 bersinggungan dalam dengan lingkaran Ω berturut-turut di titik M dan N, di mana pusat Ω_2 berada di Ω_1. Tali busur persekutuan dari lingkaran Ω_1 dan Ω_2 memotong Ω di titik A dan B. Jika MA dan MB memotong Ω_1 di C dan D, buktikan bahwa CD menyinggung Ω_2. ⋆

Soal 5.11 (KTOM Juni 2022 #16)**.** Misalkan H dan O berturut-turut adalah titik tinggi dan titik pusat lingkaran luar segitiga ABC. Ternyata, garis yang melalui A dan titik tengah $\overline{BC}$ tegak lurus terhadap $\overline{OH}$. Jika panjang $\overline{BC} = 4$, tentukan nilai dari $AB^2 + AC^2$.

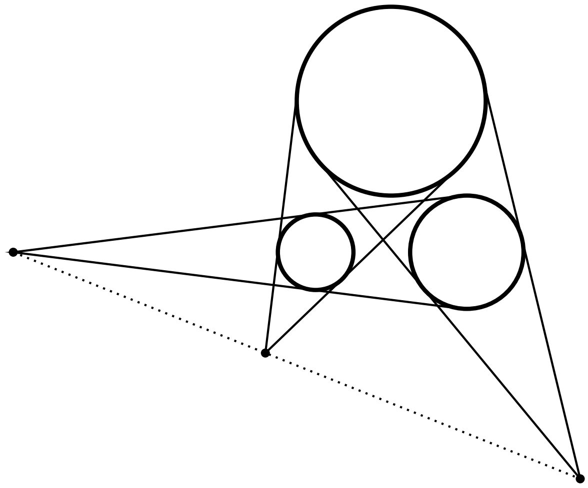
Soal 5.12 (AIME 2007 #15)**.** Empat lingkaran $\omega, \omega_A, \omega_B$, dan ω_C yang identik terletak di dalam segitiga ABC sedemikian sehingga ω_A menyinggung sisi AB dan AC, ω_B menyinggung sisi BC dan BA, ω_C menyinggung sisi CA dan CB, dan ω bersinggungan luar dengan ω_A, ω_B, dan ω_C. Jika panjang sisi-sisi segitiga ABC adalah $13, 14, 15$, maka panjang jari-jari ω dapat dinyatakan sebagai $\frac{m}{n}$ di mana m, n bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai $m + n$.

Soal 5.13 (PEMNAS 2023 #25)**.** Pada segitiga ABC, misalkan A_1 menyatakan titik pusat lingkaran yang menyinggung perpanjangan sisi AB, perpanjangan sisi AC, dan segmen BC. Definisikan B_1 dan C_1 dengan cara yang serupa. Misalkan O dan O_1 berturut-turut menyatakan pusat lingkaran luar dari segitiga ABC dan segitiga $A_1B_1C_1$. Sedangkan, titik I merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Jika panjang $IC_1 = 7$, $OC_1 = 2\sqrt{14}$, dan $O_1C_1 = 9$, maka panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC dapat dinyatakan sebagai $\dfrac{p}{q}$ di mana p dan q adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai dari $p + q$.

Soal 5.14. Pada segitiga ABC, misalkan T_a adalah titik singgung lingkaran dalam dengan BC, dan M_a adalah titik tengah garis tinggi ABC dari titik A. Definisikan T_b, T_c, M_b, dan M_c secara serupa. Buktikan bahwa T_aM_a, T_bM_b, dan T_cM_c berpotongan di satu titik.

Soal 5.15. Diberikan segitiga ABC dan lingkaran dalamnya menyinggung BC, CA, AB berturut-turut di titik D, E, F. Garis bagi segitiga ABC yang melalui A, B, C berturut-turut memotong lingkaran luar segitiga ABC di titik A', B', C'. Buktikan bahwa $A'D, B'E$, dan $C'F$ berpotongan di satu titik.

Teorema 5.16 (Monge)**.** Diberikan tiga lingkaran yang tidak saling kongruen. Dari setiap pasang dua lingkaran, dibuat garis singgung persekutuan luar dan berpotongan di suatu titik. Sebut titik-titik ini adalah P, Q, dan R. Buktikan bahwa P, Q, dan R segaris. ⋆



Lemma 5.17 (Mixtilinear Incircles)**.** Diberikan segitiga ABC. Didefinisikan A-mixtilinear sebagai lingkaran yang menyinggung segmen AB, segmen AC, dan busur BC yang tidak mengandung titik A. Didefinisikan pula B-mixtilinear dan C-mixtilinear dengan cara yang serupa. Misalkan T_A, T_B, dan T_C berturut-turut titik pusat A-mixtilinear, B-mixtilinear, dan C-mixtilinear. Buktikan bahwa AT_A, BT_B, dan CT_C berpotongan di satu titik.

Soal 5.18 (Bay Area 2013 #3)**.** Misalkan H adalah titik tinggi segitiga lancip ABC. Buktikan bahwa segitiga yang dibentuk dari titik pusat lingkaran luar ABH, BCH, dan CAH kongruen dengan segitiga ABC.

Soal 5.19 (OSN 2012 #3)**.** Misalkan $ABCD$ adalah trapesium di mana panjang $AB < CD$ (di mana hanya ada satu pasang sisi yang sejajar). Misalkan AC dan BD berpotongan di titik E, sedangkan AD dan BC berpotongan di titik F. Konstruksi jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa EF melalui titik tengah dari segmen KL. ⋆

Soal 5.20. Diberikan persegi panjang $ABCD$, kemudian konstruksi lingkaran ω yang menyinggung $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$. Garis singgung ω dari titik A dan titik B berpotongan di titik E. Jika O adalah perpotongan diagonal $ABCD$ dan X titik singgung ω dengan $\overline{CD}$, tunjukkan bahwa E, X, O segaris.

Soal 5.21. Misalkan $ABCD$ adalah trapesium di mana $AB > CD$ dan $AB \parallel CD$. Titik K dan L berturut-turut berada di segmen AB dan CD sedemikian sehingga $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Misalkan terdapat tiitk P, Q pada garis KL sedemikian sehingga $\angle APB = \angle BCD$ dan $\angle CQD = \angle ABC$. Buktikan bahwa P, Q, B, C terletak pada lingkaran yang sama.

Soal 5.22 (APMO 2004 #2)**.** Misalkan O dan H berturut-turut adalah titik pusat lingkaran luar dan titik tinggi dari segitiga lancip ABC. Buktikan bahwa salah satu dari segitiga AOH, BOH, dan COH luasnya merupakan jumlah dari luas dua segitiga lainnya. $\star$

Soal 5.23. Misalkan I, O berturut-turut adalah titik pusat lingkaran dalam dan lingkaran luar dari segitiga ABC. Selain itu, misalkan D, E, F berturut-turut adalah titik pusat lingkaran luar dari segitiga BIC, CIA, AIB. Misalkan P, Q, R berturut-turut adalah titik tengah dari segmen DI, EI, FI. Buktikan bahwa titik pusat lingkaran luar segitiga PQR merupakan titik tengah dari segmen IO.

Soal 5.24. Misalkan H dan O berturut-turut adalah titik tinggi dan titik pusat lingkaran luar segitiga ABC. Lingkaran dalam segitiga ABC berpusat di I menyinggung sisi BC di K. Jika $IO \parallel BC$, buktikan bahwa $AO \parallel HK$.

Soal 5.25 (KTOM Juli 2016 #11)**.** Diberikan segitiga lancip ABC dengan panjang diameter lingkaran luar 25. Titik D, E, F pada sisi BC, CA, AB berturut-turut sehingga AD, BE, CF adalah garis tinggi dari segitiga ABC. Jika keliling dari segitiga DEF adalah 32, tentukan luas dari segitiga tersebut.

Soal 5.26 (IMO 1992 #4)**.** Pada sebuah bidang misalkan C adalah sebuah lingkaran, L garis singgung terhadap C, dan M adalah titik pada L. Tentukan lokus (kedudukan) dari semua titik P yang memenuhi kondisi: terdapat dua titik Q, R pada L sehingga M adalah titik tengah dari QR dan C merupakan lingkaran dalam segitiga PQR.

Soal 5.27 (Romania TST 2013)**.** Lingkaran Ω dan ω bersingugungan di titik P (ω di dalam Ω). Busur AB dari Ω menyinggung ω di C, kemudian garis PC memotong Ω sekali lagi di titik Q. Busur QR dan QS dari Ω menyinggung ω. Misalkan I, X, dan Y berturut-turut titik bagi dari segitiga APB, ARB, dan ASB. Buktikan bahwa $\angle PXI + \angle PYI = 90°$.

Soal 5.28 (Wildan Bagus Wicaksono)**.** Diberikan trapesium $ABCD$ di mana AB sejajar CD, AD tidak sejajar BC, dan panjang $AB \neq CD$. Garis AD dan BC berpotongan di titik E, sedangkan AC dan BD berpotongan di titik F. Lingkaran luar segitiga ECF memotong perpanjangan CD di titik T_1 di mana $T_1 \neq C$, sedangkan lingkaran luar segitiga EFB memotong perpanjangan AB di titik T_2 di mana $T_2 \neq B$. Garis ET_1 memotong garis AB di titik P_2 dan garis ET_2 memotong garis CD di titik P_1. Jika BT_1 dan CP_2 berpotongan di M, sedangkan AP_1 dan DT_2 berpotongan di N, buktikan bahwa M, N, dan F segaris. $\star$

Lemma 5.29 (Nagel Point)**.** Misalkan ABC adalah segitiga. Misalkan lingkaran singgung luar ABC yang berlawanan dengan A menyinggung BC di D, definisikan serupa untuk E pada AC dan F pada AB.

(a). Buktikan bahwa AD, BE, CF berpotongan di satu titik N. Titik ini disebut Nagel Point.

(b). Misalkan G adalah titik berat dari segitiga ABC dan I titik bagi segitiga ABC. Buktikan bahwa I, G, N segaris dalam urutan tersebut (yang disebut Garis Nagel), kemudian tunjukkan juga panjang $GN = 2IG$.

Soal 5.30 (USAMO 2001 #2)**.** Misalkan ABC adalah segitiga di mana ω sebagai lingkaran dalamnya. Titik D_1 dan E_1 berturut-turut merupakan titik singgung ω dengan BC dan AC. Titik D_2 dan E_2 berturut-turut berada pada sisi BC dan AC, sedemikian sehingga panjang $CD_2 = BD_1$ dan $CE_2 = AE_1$, kemudian misalkan P adalah perpotongan dari segmen AD_2 dan BE_2. Lingkaran ω memotong segmen AD_2 di dua titik, di mana titik yang berada lebih dekat dengan titik A adalah Q. Buktikan bahwa panjang $AQ = D_2P$.

Soal 5.31 (USAMO 2015 #2)**.** Segiempat $APBQ$ memiliki lingkaran luar ω di mana $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ dan panjang $AP = AQ < BP$. Misalkan X merupakan variabel titik pada segmen PQ. Garis AX memotong ω sekali lagi di titik S (di mana $S \neq A$). Titik T pada busur AQB dari ω sedemikian sehingga XT tegak lurus AX. Misalkan M adalah titik tengah busur ST. Apabila X digerakkan sepanjang segmen PQ, buktikan bahwa M bergerak pada suatu busur lingkaran. $\star$

§6. Hint

Petunjuk yang diberikan dalam satu nomor bisa memuat lebih dari satu petunjuk. Jadi, alangkah baiknya berusaha hingga benar-benar menyerah.

5.1. Pusat homothety merupakan titik singgung persekutuannya.

5.2. Bagian (a) gunakan definisi, kemudian bagian (b) gunakan Teorema Menelaus.

5.3. Buat garis berat yang melalui P dari masing-masing segitiga dan kontruksikan titik potongnya dengan AB, BC, CD, DA. Sekarang, apa kondisi yang ekuivalen dengan yang ingin dibuktikan?

5.4. Gunakan sifat pencerminan, kemudian apa kondisi ekuivalen dengan yang ingin dibuktikan?

5.5. Misalkan AG memotong BC di M, tentukan perbandingan $AX : KM$.

5.6. Bagian (a) gunakan Teorema 3.5 dan Teorema 3.6. Bagian (b) cukup gunakan bagian (a).

5.7. Bagian (a), konstruksikan garis singgung ω_1 di M. Ingat kembali Soal 5.1.

5.8. Langsung dengan Lemma 5.7.

5.9. Hoho.. Anda tidak memerlukan hint di sini :p.

5.10. Konstruksikan garis singgung persekutuan ω_1 dan ω_2, kemudian identifikasi salah satu titik A atau B.

5.11. Apa titik perpotongan antara garis berat dengan garis OG? Perpanjang garis berat hingga memotong lingkaran.

5.12. Motivasinya hampir sama dengan Contoh 4.4.

5.13. Buktikan bahwa $AA_1 \perp B_1C_1$. Apa hubungan lingkaran luar ABC dengan segitiga $A_1B_1C_1$?

5.14. Saya tidak langsung memberikan nomor lemmanya, mungkin Anda perlu membacanya kembali. Apakah yang menjadi titik konkurensinya?

5.15. Terdapat homothety yang membawa segitiga DEF ke $A'B'C'$. Apa titik konkurensinya?

5.16. Perpotongan garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran merupakan titik pusaat homothety yang memetakan sebuah lingkaran ke lingkaran lainnya. Lihat juga Teorema 5.2.

5.17. Apa homohety yang terkait dengan A-mixtilinear, B-mixtilinear, dan C-mixtilinear? Gunakan Lemma 5.16.

5.18. Gunakan Lemma 3.2. Apa hubungan antara lingkaran luar segitiga ABC dengan lingkaran luar segitiga ABH?

5.19. Pertama, buktikan FE garis berat segitiga ADC. Kemudian, tinjau perpotongan EK dengan AD dan EL dengan BC, apa hubungan antara garis yang menghubungkan titik potong tersebut dengan AB dan KL?

5.20. Apakah titik X? Perpanjang EX hingga memotong AB. Anda mungkin tertarik dengan Lemma 3.7.

5.21. Konstruksikan perpotongan AD dan BC. Apa kondisi yang bisa didapatkan dari $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$? Dari homothety $h(X,k) : AB \mapsto CD$, konstruksikan P' di mana $h(X,k) : P \mapsto P'$.

5.22. WLOG A, B berada pada sisi yang sama terhadap OH. Konstruksi titik berat G dan M titik tengah $\overline{AB}$. Tentukan hal ekuivalen dengan yang ingin dibuktikan.

5.23. Misalkan AI memotong lingkaran luar segitiga ABC di titik D', apakah titik D'? Titik manakah yang menjadi pusat homothety?

5.24. Misalkan X adalah pencerminan titik K terhadap I. Buktikan bahwa A, X, dan O segaris. Lihat juga Lemma 3.7.

5.25. Nyatakan segitiga DEF dalam bentuk R di mana R panjang jari-jari lingkaran. Buktikan bahwa $DE = R\sin(2C)$, nyatakan sisi lainnya dengan cara yang sama. Apakah lingkaran luar dari segitiga DEF? Terakhir, nyatakan $\sin(2A) + \sin(2B) + \sin(2C)$ dalam bentuk $[ABC]$ dan R.

5.26. Misalkan X adalah titik singgung L dengan C. Sebagai motivasi awal, lihat Lemma 5.6. Tinjau refleksi X terhadap M. Gunakan Lemma 3.7.

5.27. Misalkan QR dan QS memotong ω berturut-turut di titik M dan N. Apakah titik M dan N?

5.28. Konstruksikan titik tengah $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$. Buktikan bahwa panjang $DT_1 = CP_1$.

5.29. Bagian (a) gunakan Teorema Ceva. Bagian (b), konstruksikan lingkaran dalam segitiga ABC yang menyinggung BC di K dan $\overline{KK'}$ sebagai diameternya.

5.30. Apakah D_1Q dan P? Gunakan Lemma 5.26.

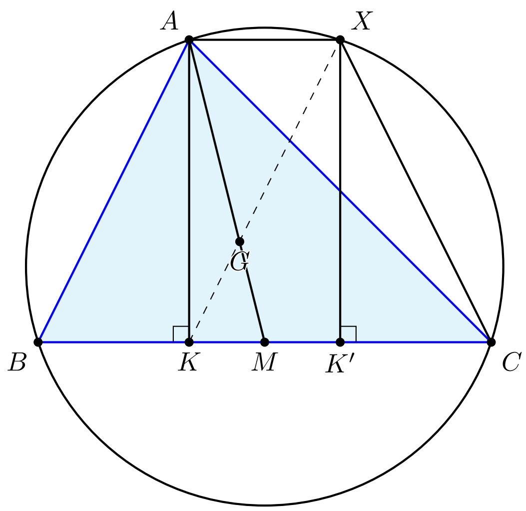
5.31. Konstruksikan C sebagai perpotongan PQ dan AT, serta H sebagai perpotongan TX dan SC. Buktikan SC tegak lurus AT. Perhatikan bahwa M, D, C, X terletak pada NPC dari AST, verivikasi bahwa NPC tersebut berpusat di tiitk tengah $\overline{AO}$. Buktikan M, D, P, Q siklis.

§7. Solusi Soal Terpilih

Membaca solusi dengan baik adalah membaca dengan mengikuti satu langkah demi langkah dengan menulis dan mencoret. Sebagian detail akan diserahkan kepada pembaca sehingga menulis dan mencoret akan dibutuhkan.

5.5. Misalkan M titik tengah BC dan K' pada BC sedemikian sehingga $XK' \perp BC$. Tinjau $\angle BCX = 180^\circ - \angle XAB = \angle ABC$ sehingga $ABCX$ trapesium sama kaki. Akibatnya, panjang $KB = K'C$ sehingga diperoleh panjang $MK = MK'$. Ini berarti panjang $AX = KK' = 2KM$ yang berarti $AX : KM = 2 : 1$. Tinjau bahwa $AG : GM = 2 : 1$ yang berarti $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : A \mapsto M$. Misalkan X' dengan $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : X \mapsto X'$, ini berarti $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : AX \mapsto MX'$ sehingga $MX' = \frac{1}{2}AX$ dan $MX' \parallel AX$. Kondisi ini menunjukkan bahwa $X = K$ yang menunjukkan $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : X \mapsto K$. Jadi, K, G, X segaris.

Solusi Alternatif. Tinjau K dan M terletak pada $\mathcal{N}_9$ (NPC) dari ABC. Karena $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : (ABC) \mapsto \mathcal{N}_9$ di mana (ABC) menyatakan lingkaran luar segitiga ABC serta $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : A \mapsto M$, dari sini dapat disimpulkan $h\left(G, -\frac{1}{2}\right) : X \mapsto K$.



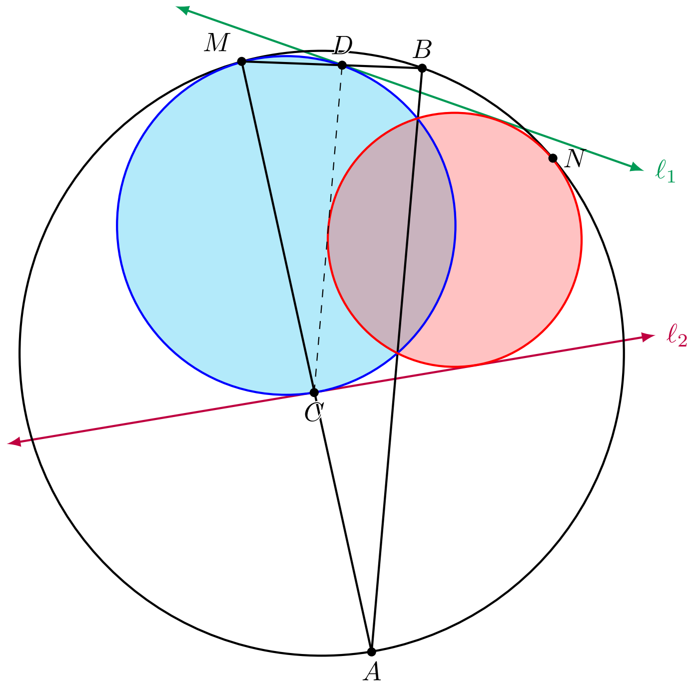
5.10. Misalkan ℓ_1 dan ℓ_2 merupakan garis singgung persekutuan luar Ω_1 dan Ω_2, kita klaim bahwa ℓ_1, ℓ_2 melalui C, D. Misalkan ℓ_2 menyinggung Ω_1 di C' dan MC' memotong Ω di A'. Perhatikan ℓ_2, dari **Lemma 5.7 (b)** berlaku $\text{Pow}_{\Omega_1}(A') = \text{Pow}_{\Omega_2}(A')$ (mengapa?), ini artinya A' terletak di radical axis Ω_1 dan Ω_2. Jadi, $A = A'$. Dari **Lemma 5.7 (a)** yang mana A, C', M segaris, ini artinya $C = C'$. Secara analog, dengan memerhatikan ℓ_1 diperoleh bahwa ℓ_1 melalui D.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa CD menyinggung Ω_2. Misalkan O_i dan R_i berturut-turut menyatakan pusat dan panjang jari-jari Ω_i untuk setiap $i \in \{1, 2\}$. Berdasarkan solusi pada **Contoh 4.2** dapat diperoleh $CD \perp O_1O_2$, misalkan CD dan O_1O_2 berpotongan di T. Sekarang ekuivalen dengan membuktikan bahwa T terletak di Ω_2, dengan kata lain, panjang $O_2T = R_2$. Misalkan ℓ_1 menyinggung Ω_2 di K. Tinjau bahwa $\angle DTO_2 +$

$\angle DKO_2 = 180^\circ$, maka DTO_2K siklis. Dari sini diperoleh

$$\angle O_2TK = \angle O_2DK = 90^\circ - \angle O_1DO_2 = 90^\circ - \angle O_1O_2D = 90^\circ - \angle TO_2D = 90^\circ - \angle TKD = \angle TKO_2$$

sehingga panjang $O_2T = O_2K = R_2$, seperti yang ingin dibuktikan.



5.16. Misalkan pusat ketiga lingkaran tersebut adalah P, Q, R yang memiliki panjang jari-jari berturut-turut r_P, r_Q, r_R. WLOG $r_P > r_Q > r_R$. Notasikan X_{PQ} titik potong garis singgung persekutuan luar lingkaran yang berpusat di P dan Q, definisikan X_{QR} dan X_{PR} dengan cara yang sama. Akan dibuktikan bahwa X_{PQ}, X_{QR}, dan X_{RP} segaris. Perhatikan bahwa X_{PQ} merupakan pusat homothety yang membawa lingkaran P ke Q, misalkan $h\left(X_{PQ}, \frac{r_Q}{r_P}\right) : \odot(P) \mapsto \odot(Q)$ di mana $\odot(P)$ menyatakan lingkaran yang berpusat di P. Dari **Teorema 5.2**, $h\left(A_Q, \frac{r_R}{r_P}\right) = h\left(X_{PQ}, \frac{r_Q}{r_P}\right) \circ h\left(X_{QR}, \frac{r_R}{r_Q}\right) : \odot(P) \mapsto \odot(R)$ dengan A_Q terletak di segmen $X_{PQ}X_{QR}$ karena $0 < \frac{r_R}{r_Q} < 1$. Di sisi lain,

$$h\left(X_{RP}, \frac{r_P}{r_R}\right) : \odot(R) \mapsto \odot(P) \iff h\left(X_{RP}, \frac{r_R}{r_P}\right) : \odot(P) \mapsto \odot(R).$$

Karena $\frac{r_R}{r_P} < 1$, maka R terletak di segmen $X_{RP}P$. Dari definisi,

$$\overrightarrow{X_{RP}R} = \frac{r_R}{r_P}\overrightarrow{X_{RP}P} \quad \text{dan} \quad \overrightarrow{A_QR} = \frac{r_R}{r_P}\overrightarrow{A_QP}.$$

Misalkan $X_{RP} = \mathbf{x}$, $R = \mathbf{r}$, $P = \mathbf{p}$, dan $A_Q = \mathbf{a}$, maka

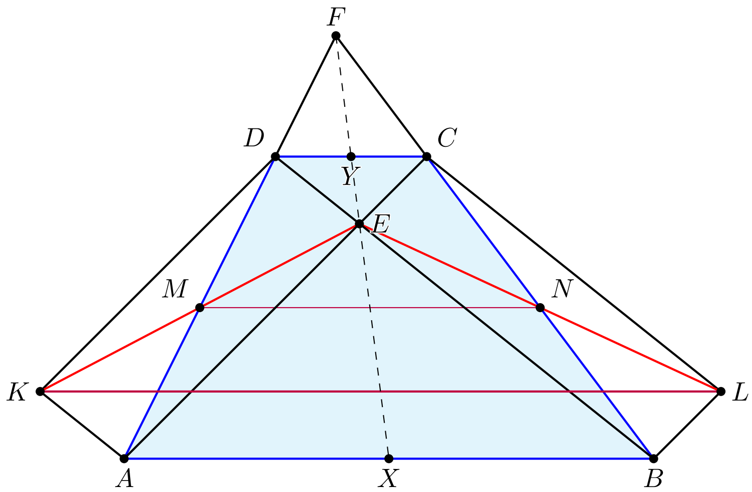
$$\mathbf{r} - \mathbf{x} = \frac{r_R}{r_P}(\mathbf{p} - \mathbf{x}) = \frac{r_R}{r_P}\mathbf{p} - \frac{r_R}{r_P}\mathbf{x} \iff \mathbf{r} - \frac{r_R}{r_P}\mathbf{p} = \left(1 - \frac{r_R}{r_P}\right)\mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \frac{\mathbf{r} - \frac{r_R}{r_P}\mathbf{p}}{1 - \frac{r_R}{r_P}}.$$

Secara analog, $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r} - \frac{r_R}{r_P}\mathbf{p}}{1 - \frac{r_R}{r_P}}$ sehingga diperoleh $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Jadi, $X_{RP} = A_Q$ yang membuktikan X_{PQ}, X_{QR}, dan X_{RP} segaris.

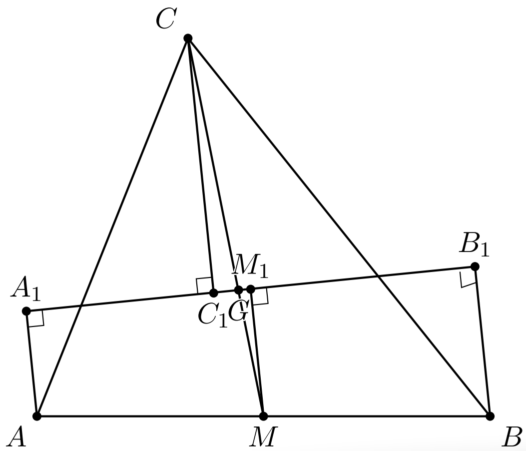
Catatan. Dalam solusi ini Anda perlu memiliki pengetahuan tentang vektor.

5.19. Misalkan X, Y berturut-turut merupakan titik tengah $\overline{CD}, \overline{AB}$. Tinjau $AB \parallel CD$ sehingga dapat diperoleh $\triangle FCD \sim \triangle FBA$. Maka terdapat homothety $h(F, r_1) : \overline{CD} \mapsto \overline{AB}$, ini berarti $h(F, r_1) : X \mapsto Y$. Jadi, F, X, Y segaris. Selain itu, $AB \parallel CD \implies \triangle ABE \sim \triangle CDE$ sehingga terdapat homothety $h(E, r_2) : \overline{CD} \mapsto \overline{AB}$. Jadi, $h(E, r_2) : X \mapsto Y$ sehingga E, X, Y segaris.

Misalkan EK, EL memotong AD, BC berturut-turut di titik M, N. Dari sifat jajargenjang, yaitu panjang $EM = MK$ dan $EN = NL$ yang berarti $h(E, 2) : M \mapsto K$ dan $h(E, 2) : N \mapsto L$. Kemudian, perhatikan bahwa panjang $DM = MA$ dan $CN = NB$ sehingga diperoleh $MN \parallel CD$ (mengapa?). Maka terdapat homothety $h(F, r_3) : \overline{CD} \mapsto \overline{MN}$, ini artinya homothety $h(F, r_3)$ memetakan X ke titik tengah $\overline{MN}$ sehingga titik tengah $\overline{MN}$, F, dan X segaris. Kemudian, homothety $h(E, 2)$ memetakan titik tengah $\overline{MN}$ ke titik tengah $\overline{KL}$, maka E, titik tengah $\overline{MN}$, dan titik tengah $\overline{KL}$ segaris. Mengingat F, E, dan titik tengah $\overline{MN}$ segaris, ini membuktikan bahwa FE melalui titik tengah $\overline{KL}$.



5.21. WLOG titik A dan B berada pada sisi yang sama terhadap garis OH. Misalkan M titik tengah $\overline{AB}$ sehingga kita peroleh $AM \cap OH = G$ di mana G titik berat $\triangle ABC$. Misalkan pula A_1 adalah hasil proyeksi titik A ke garis OH. Definisikan yang sama untuk B_1, C_1, dan M_1.



Maka

$$[AOH]+[BOH]=[COH] \iff \frac{AA_1 \cdot OH}{2}+\frac{BB_1 \cdot OH}{2}=\frac{CC_1 \cdot OH}{2} \iff AA_1+BB_1=CC_1.$$

Kita punya $\triangle MM_1G \sim \triangle CC_1G$ dan diperoleh bahwa

$$\frac{CC_1}{MM_1}=\frac{CG}{MG}=2 \iff CC_1=2MM_1.$$

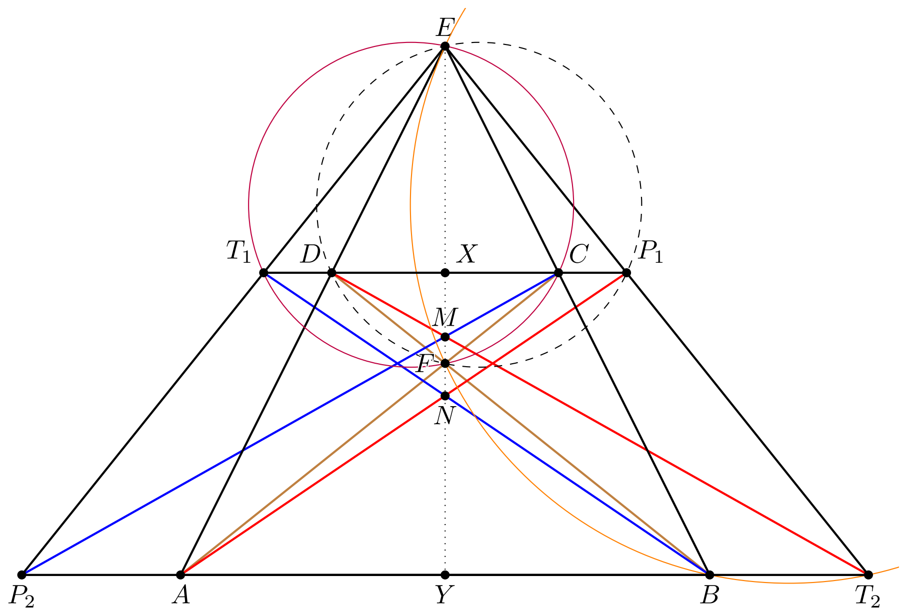
Maka sekarang ekuivalen dengan membuktikan $AA_1+BB_1=2MM_1$ yang mana jelas benar pada trapesium AA_1BB_1 mengingat M titik tengah $\overline{AB}$.

Remark. *Diberikan trapesium $ABCD$ di mana $AB \parallel CD$. Titik M_1 dan M_2 berturut-turut pada BC dan DA sehingga $MN \parallel AB$. Maka*

$$MN=\frac{AB \cdot CM+CD \cdot BM}{BC},$$

yang mana jika panjang $CM=MB$ diperoleh bahwa $2MN=AB+CD$. Pembuktian diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

5.27. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan panjang $AB>CD$. Misalkan X dan Y berturut-turut adalah titik tengah segmen AB dan segmen CD.



Klaim 1. E,X,Y segaris.

Tinjau $AB \parallel CD$ sehingga akan diperoleh $\triangle ECD \sim \triangle EBA$. Ini berarti terdapat suatu homothety $h(E,r_1):\overline{CD}\mapsto\overline{AB}$. Karena X dan Y berturut-turut titik tengah $\overline{CD}$ dan $\overline{AB}$, maka $h(E,r):X\mapsto Y$. Jadi, E,X,Y segaris.

Klaim 2. X, Y, F segaris.

Tinjau bahwa $AB \parallel CD$ sehingga akan diperoleh $\triangle FAB \sim \triangle FCD$. Ini berarti terdapat suatu homothety $h(F, r_2) : \overline{CD} \mapsto \overline{AB}$. Karena X dan Y berturut-turut titik tengah $\overline{CD}$ dan $\overline{AB}$, maka $h(F, r_2) : X \mapsto Y$. Jadi, X, F, Y segaris.

Klaim 3. P_1FDE siklis.

Karena ET_2BF siklis, maka

$$\angle EP_1D = \angle ET_2A = \angle ET_2B = 180^\circ - \angle EFB = \angle EFD \implies \angle EP_1D = \angle EFD$$

yang menyimpulkan EP_1FD siklis.

Klaim 4. Panjang $DT_1 = CP_1$ dan panjang $AP_2 = BT_2$.

Dari Power of Point pada lingkaran luar $ECFT_1$ dan lingkaran luar $EDFP_1$ berlaku

$$T_1X \cdot XC = EX \cdot XF = DX \cdot XP_1 \implies T_1X \cdot XC = DX \cdot XP_1 \iff DX = XP_1.$$

Karena panjang $DX = XC$, maka $DT_1 = CP_1$. Tinjau bahwa $h(E, r_1) : \overline{DT_1} \mapsto AP_2$ dan $h(E, r_1) : \overline{CP_1} \mapsto BT_2$. Karena panjang $DT_1 = CP_1$, maka panjang $AP_2 = BT_2$.
Perhatikan bahwa X dan Y merupakan titik tengah $\overline{P_1T_1}$ dan $\overline{P_2T_2}$. Misalkan P_2D dan T_2C berpotongan di E_2. Tinjau homothety $h(E_2, r_3) : \overline{CD} \mapsto \overline{P_2T_2}$ dan diperoleh $h(E_2, r_3) : X \mapsto Y$ yang berarti E_2, X, Y segaris. Karena E, X, Y segaris, jadi E_2 terletak pada garis EY. Secara analog pada Klaim 1, diperoleh X, M, Y segaris. Secara analog, pada trapesium ABP_1T_1 berlaku X, N, Y segaris.
Jadi, X, M, F, N, Y segaris dan diperoleh M, F, N segaris.

5.31. Misalkan pula C adalah perpotongan PQ dan AT, H adalah perpotongan TX dan SC, dan O pusat ω. Tinjau bahwa $AP = AQ$ sehingga $APBQ$ merupakan layang-layang dan kita peroleh $AB \perp PQ$. Misalkan O' adalah titik tengah $\overline{AO}$. Notasikan $\measuredangle$ besaran sudut yang diambil modulo 180°.

Klaim 1. $SC \perp AT$.

Tinjau bahwa

$$\measuredangle ACX = 90^\circ - \measuredangle BAC = 90^\circ - \measuredangle BAT = 90^\circ - \measuredangle BST = \measuredangle TSA = \measuredangle TSX \implies \measuredangle ACX = \measuredangle TSA$$

sehingga $SXCT$ siklis. Kita punya $\angle SCT = \angle SXT = 90^\circ$ dan klaim kita terbukti (selain itu hal ini menunjukkan PQ tidak mungkin sejajar ST). Maka H adalah titik tinggi dari $\triangle AST$ dan misalkan E perpotongan PQ dan ST. Misalkan AH memotong BC di D, maka $AD \perp BC$.

Klaim 2. M, D, P, Q siklis dengan lingkaran luarnya berpusat di titik tengah $\overline{AO}$.

Kita punya C, X, M, D siklis dengan lingkaran luarnya adalah NPC dari AST. Tinjau pula $TSXC$ dan $TSPQ$ siklis, dari Power of Point, kita punya

$$EQ \cdot EP = ET \cdot ES = EC \cdot EX = ED \cdot EM \implies EQ \cdot EP = ED \cdot EM.$$

Maka D, M, P, Q siklis dan misalkan lingkaran luarnya adalah Ω. Misalkan M' adalah hasil proyeksi O' pada $\overline{ST}$. Kita punya $OM \parallel O'M' \parallel AD$ mengingat $OM \perp ST$. Maka $MODA$ merupakan trapesium karena O' titik tengah AO, maka M' adalah titik tengah MD. Maka $O'M'$ garis sumbu $\overline{MD}$. Selain itu, kita tahu bahwa AO' merupakan garis sumbu PQ mengingat $APBQ$ layang-layang. Kita peroleh bahwa O' titik pusat Ω. Kita tahu bahwa P, Q, dan O' tetap, maka Ω juga tetap sehingga M berada di Ω untuk sembarang posisi X di $\overline{PQ}$.