



Departemen Matematika

# Ujian Tengah Semester

## *Teori Ukuran*

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Matematika 2022

[wildan-wicaksono.github.io](https://wildan-wicaksono.github.io)

2024

# Soal

- 1 Let  $m$  be measure on  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}$  and suppose  $A$  is a fixed in  $\mathcal{M}$ . The function  $\lambda$  is defined on  $\mathcal{M}$  for  $E \in \mathcal{M}$  by

$$\lambda(E) = m(A \cap E).$$

Prove that  $\lambda$  is a measure on  $\mathcal{M}$ .

- 2 Misalkan  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Buatlah dua macam aljabar- $\sigma$  dengan memberikan alasannya, selain  $\mathcal{P}(X)$  dan  $\{X, \emptyset\}$ .
- 3 Misalkan  $\mathbb{Q}$  himpunan semua bilangan rasional. Buktikan bahwa ukuran luar,  $m^*(\mathbb{Q}) = 0$ .

Let  $m$  be measure on  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}$  and suppose  $A$  is a fixed in  $\mathcal{M}$ . The function  $\lambda$  is defined on  $\mathcal{M}$  for  $E \in \mathcal{M}$  by

$$\lambda(E) = m(A \cap E).$$

Prove that  $\lambda$  is a measure on  $\mathcal{M}$ .

**Solusi:**

Perhatikan bahwa untuk setiap  $E \in \mathcal{M}$  berlaku  $\lambda(E) = m(A \cap E) \geq 0$  dan  $\lambda(\emptyset) = m(A \cap \emptyset) = m(\emptyset) = 0$ . Misalkan  $\{A_n\}_n$  barisan himpunan disjoint di  $\mathcal{M}$ , ini berarti  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$ . Selain itu,  $\{A \cap A_n\}_n$  juga barisan himpunan disjoint di  $\mathcal{M}$  sehingga

$$\lambda\left(\bigcup_n A_n\right) = m\left(A \cap \bigcup_n A_n\right) = m\left(\bigcup_n A \cap A_n\right) = \sum_n m(A \cap A_n) = \sum_n \lambda(A_n).$$

Terbukti  $\lambda$  measure di  $\mathcal{M}$ .

Misalkan  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Buatlah dua macam aljabar- $\sigma$  dengan memberikan alasannya, selain  $\mathcal{P}(X)$  dan  $\{X, \emptyset\}$ .

**Solusi:**

Misalkan  $A$  merupakan  $\sigma$ -algebra. Jika  $\{1\} \in A$ , maka  $\{2, 3, 4\} = \{1\}^c \in A$ . Ini berarti  $X = \{1\} \cup \{2, 3, 4\} \in A$  dan  $\emptyset = \{1\} \cap \{2, 3, 4\} \in A$ . Jadi,  $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, X\}$  merupakan  $\sigma$ -algebra.

Misalkan  $B$  merupakan  $\sigma$ -algebra. Jika  $\{1, 2\} \in B$ , maka  $\{3, 4\} = \{1, 2\}^c \in B$  sehingga  $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \in B$  dan  $\emptyset = \{1, 2\} \cap \{3, 4\} \in B$ . Jadi,  $B = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$  merupakan  $\sigma$ -algebra.

---

Misalkan  $\mathbb{Q}$  himpunan semua bilangan rasional. Buktikan bahwa ukuran luar,  $m^*(\mathbb{Q}) = 0$ .

**Solusi:**

Karena  $\mathbb{Q}$  terbilang, maka  $m^*(\mathbb{Q}) = 0$ .