Departemen Matematika

# Ujian Akhir Semester

*Teori Ukuran*


Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io


2024

# Soal

$\boxed{\mathbf{1}}$ Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, inerval $I_n = \left[a + \frac{1}{n}, b\right) \subseteq \mathbb{R}$. Hitung

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$$

di mana untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $a + \frac{1}{n} < b$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Diketahui jika himpunan $A$ dan $B$ terukur, maka $A \cup B$ terukur. Dengan menggunakan argumen ini,

(a) Buktikan $A \cap B$ terukur.

(b) Buktikan bahwa $A \setminus B$ terukur.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Jika fungsi $f$ dan $g$ terukur pada himpunan $E$ terukur, maka fungsi $f \cdot g$ terukur. Gunakan fakta ini untuk membuktikan bahwa fungsi $h = \frac{f}{g}$ terukur di mana $g \neq 0$ a.e.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Misalkan $f^+ = \max\{f, 0\}$ dan $f^- = \max\{-f, 0\}$. Buktikan jika $f$ terukur maka $f^+$ dan $f^-$ terukur.

Soal Nomor

# 1

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, inerval $I_n = \left[a + \frac{1}{n}, b\right) \subseteq \mathbb{R}$. Hitung

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$$

di mana untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $a + \frac{1}{n} < b$.

**Solusi:**

Akan dibuktikan bahwa $(a, b) = \bigcup_n \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$. Jelas bahwa $\left[a + \frac{1}{n}, b\right) \subseteq (a, b)$. Misalkan $x \in (a, b)$ yang berarti $x - a > 0$. Dari Archimedes terdapat bilangan asli $N$ yang memenuhi $\frac{1}{x-a} < N$ atau $\frac{1}{N} < x - a$ sehingga $a + \frac{1}{N} < x < b$ yang menunjukkan $x \in \left[a + \frac{1}{N}, b\right)$. Jadi, $x \in \bigcup_n \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$ sehingga $(a, b) \subseteq \bigcup_n \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$. Diperoleh

$$m\left(\bigcup_n I_n\right) = m(a, b) = \boxed{b - a}.$$

Soal Nomor

# 2

Diketahui jika himpunan $A$ dan $B$ terukur, maka $A \cup B$ terukur. Dengan menggunakan argumen ini,

(a) Buktikan $A \cap B$ terukur.

(b) Buktikan bahwa $A \setminus B$ terukur.

**Solusi:**

(a) Karena $A, B$ terukur, maka $A^c, B^c$ terukur. Ini berakibat $A^c \cup B^c$ terukur sehingga $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ terukur.

(b) Karena $A$ terukur dan $B^c$ terukur, dari bagian (b) berlaku $A \setminus B = A \cap B^c$ terukur.

Soal Nomor

# 3

Jika fungsi $f$ dan $g$ terukur pada himpunan $E$ terukur, maka fungsi $f \cdot g$ terukur. Gunakan fakta ini untuk membuktikan bahwa fungsi $h = \dfrac{f}{g}$ terukur di mana $g \neq 0$ a.e.

**Solusi:**

Definisikan $E(g > a) = \{x : g(x) > a\}$. Perhatian bahwa

$$E(1/g > a) = \begin{cases} E\left(g < 1/a\right) \cap E(g > 0), & a > 0 \\ E(g > 0), & a = 0 \\ E(g > 0) \cup \left[E(g < 0) \cap E(g < 1/a)\right], & a < 0 \end{cases}.$$

Mengingat $g$ terukur, ini menunjukkan bahwa $1/g$ terukur. Karena $f$ terukur, mka $f/g = f \cdot 1/g$ terukur.

## Soal Nomor 4

Misalkan $f^+ = \max\{f, 0\}$ dan $f^- = \max\{-f, 0\}$. Buktikan jika $f$ terukur maka $f^+$ dan $f^-$ terukur.

**Solusi:**

Perhatikan bahwa

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{f + |f|}{2}, \quad f^- = \frac{-f + |-f|}{2} = \frac{|f| - f}{2}.$$

Karena $f$ terukur, maka $|f|$ terukur. Maka $f + |f|$ dan $|f| - f$ terukur sehingga diperoleh $f^+$ dan $f^-$ terukur.