Soal dan Solusi UTS Teori Bilangan 2023

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Menggunakan prinsip induksi dan sifat keterbagian, buktikan bahwa $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ habis dibagi 21 untuk setiap bilangan asli n.

Penyelesaian.

Misalkan $p(n) : 21 \mid 4^{n+1} + 5^{2n-1}$. Untuk $n = 1$, maka $4^2 + 5^1 = 21 \implies 21 \mid 4^2 + 5^1$ sehingga $p(1)$ benar. Asumsikan untuk suatu $n = k$, $p(k)$ benar, yakni $21 \mid 4^{k+1} + 5^{2k-1}$. Untuk $n = k + 1$,

$$\begin{aligned} 4^{k+2} + 5^{2k+1} &= 4^{k+1} \cdot 4 + 5^{2k-1} \cdot 25 \\ &= 4^{k+1} \cdot 4 + 5^{2k-1}(21 + 4) \\ &= 4^{k+1} \cdot 4 + 21 \cdot 5^{2k-1} + 4 \cdot 5^{2k-1} \\ &= 4\left(4^{k+1} + 5^{2k-1}\right) + 21 \cdot 5^{2k-1}. \end{aligned}$$

Karena $21 \mid 4^{k+1} + 5^{2k-1} \implies 21 \mid 4\left(4^{k+1} + 5^{2k-1}\right)$ dan $21 \mid 21 \cdot 5^{2k-1}$, maka $21 \mid 4\left(4^{k+1} + 5^{2k-1}\right) + 21 \cdot 5^{2k-1}$ sehingga $p(k+1)$ benar. Menurut induksi, terbukti bahwa $21 \mid 4^{n+1} + 5^{2n-1}$ untuk setiap bilangan asli n. ▼

Question 2

Dengan menggunakan algoritma euclide, tentukan nilai $\text{fpb}(-2022, 1856)$.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
-2022 &= 1856(-2) + 1690 \\
1856 &= 1690(1) + 166 \\
169 &= 166(10) + 30 \\
166 &= 30(5) + 16 \\
30 &= 16(1) + 14 \\
16 &= 14(1) + \boxed{2} \\
14 &= 2(7) + 0.
\end{aligned}$$

Jadi, $\text{fpb}(-2022, 1856) = 2$. ▼

Question 3

Tentukan sisa dari $2013^{2015^{2017}}$ ketika dibagi 7.

Penyelesaian.

Karena $2013 \equiv 4 \pmod 7$, maka $2013^{2015^{2017}} \equiv 4^{2015^{2017}} \pmod 7$. Tinjau bahwa $4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 7 \implies 4^3 \equiv 1 \pmod 7$, maka

$$4^{2015^{2017}} \equiv 4^{2015^{2017} \pmod 3} \pmod 7.$$

Perhatikan pula $2015 \equiv -1 \pmod 3 \implies 2015^{2017} \equiv (-1)^{2017} \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$ dan diperoleh $2015^{2017} \equiv 2 \pmod 3$. Jadi,

$$2013^{2015^{2017}} \equiv 4^{2015^{2017}} \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 2 \pmod 7.$$

Jadi, sisanya adalah 2. ▼

Question 4

Seekor bebek jantan berharga 5 koin, bebek betina 3 koin dan 1 koin dapat ditukar dengan 3 anak bebek. Ambrodol memiliki 100 koin dan ingin menghabiskannya untuk membeli 100 ekor bebek. Tentukan semua kemungkinan banyaknya bebek jantan, bebek betina, dan anak bebek yang diperoleh Ambrodol.

Penyelesaian.

Misalkan j dan b breturut-turut menyatakan banyak bebek yang dibeli Ambrodol di mana $j, b \in \mathbb{N}_0$. Karena 1 koin ditukar dengan 3 anak bebek, maka banyak anak bebek adalah $3n$ di mana $n \in \mathbb{N}_0$. Diperoleh sistem persamaan $b + j + 3n = 100$ dan $5j + 3b + n = 100$. Kurangkan kedua persamaan memperoleh

$$4j + 2b - 2n = 0 \iff n = 2j + b.$$

Kita punya $100 = 5j + 3b + n = 7j + 4b \implies 100 = 7j + 4b$. Tinjau modulo 4,

$$100 \equiv 7j + 4b \pmod 4 \iff 0 \equiv (-1)j + 0b \pmod 4 \iff 0 \equiv -j \pmod 4 \iff j \equiv 0 \pmod 4.$$

Misalkan $j = 4j_0$ di mana $j_0 \in \mathbb{N}_0$. Maka $100 = 7j + 4b = 28j_0 + 4b \implies 25 = 7j_0 + b \iff b = 25 - 7j_0$. Sehingga kemungkinan nilai dari j_0 adalah $j_0 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Tinjau $n = 2j + b = 8j_0 + b$.

- Jika $j_0 = 0$, maka $b = 25$ dan diperoleh $n = 8j_0 + b = 25$. Jadi, $(b, j, 3n) = (25, 0, 75)$ yang artinya Ambrodol mendapatkan 25 bebek betina dan 75 anak bebek.
- Jika $j_0 = 1$, maka $b = 18$ dan diperoleh $n = 8j_0 + b = 26$. Jadi, $(b, j, 3n) = (18, 4, 78)$ yang artinya Ambrodol mendapatkan 18 bebek betina, 4 bebek jantan, dan 78 anak bebek.
- Jika $j_0 = 2$, maka $b = 11$ dan diperoleh $n = 8j_0 + b = 27$. Jadi, $(b, j, 3n) = (11, 8, 81)$ yang artinya Ambrodol mendapatkan 11 bebek betina, 8 bebek jantan, dan 81 anak bebek.
- Jika $j_0 = 3$, maka $b = 4$ dan diperoleh $n = 8j_0 + b = 28$. Jadi, $(b, j, 3n) = (4, 3, 84)$ yang artinya Ambrodol mendapatkan 4 bebek betina, 3 bebek jantan, dan 84 anak bebek.

▼