Soal dan Solusi UAS Teori Grup Hingga 2023

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Pandang grup $(S_3, \circ)$ grup dari semua permutasi dari $S = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan suatu relasi $[,] : S_3 \times S_3 \to S_3$ di mana $[a, b] = a \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1}$ untuk setiap $a, b \in S_3$. Misalkan $H = \{[a, b] \mid a, b \in S_3\}$.

(a). Tuliskan 3 buah elemen H.

(b). Tunjukkan bahwa $[a, a]$ merupakan elemen identitas pada H relatif terhadap operasi pada S_3.

(c). Tentukan $[a, b]^{-1}$.

Penyelesaian.

Tinjau bahwa $S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3)\}$.

(a). Tinjau $[(1), (1)] = (1)(1)(1)^{-1}(1)^{-1} = (1)$ karena $(1)^{-1} = (1)$, ini berarti $(1) \in H$. Tinjau

$$[(1\ 2), (1\ 3)] = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)^{-1}(1\ 3)^{-1} = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 2\ 3)$$

yang menunjukkan $(1\ 2\ 3) \in H$. Selanjutnya,

$$[(1\ 2), (1\ 3\ 2)] = (1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2)^{-1}(1\ 3\ 2)^{-1} = (1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2)$$

yang menunjukkan $(1\ 3\ 2) \in H$. Jadi, tiga buah elemen H diantaranya adalah $(1), (1\ 2\ 3)$, dan $(1\ 3\ 2)$.

(b). Perhatikan bahwa $[a, a] = a \circ a \circ a^{-1} \circ a^{-1} = a \circ (1) \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = (1)$. Karena setiap elemen H merupakan elemen S_3 serta (1) merupakan elemen identitas di S_3, maka (1) juga berlaku elemen identitas pada H.

(c). Klaim bahwa $[a, b]^{-1} = b \circ a \circ b^{-1} \circ a^{-1}$ karena memenuhi invers kiri dan invers kanan, yaitu

$$\begin{aligned}
\left(a \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1}\right) \circ \left(b \circ a \circ b^{-1} \circ a^{-1}\right) &= a \circ b \circ a^{-1} \circ \left(b^{-1} \circ b\right) \circ a \circ b^{-1} \circ a^{-1} \\
&= a \circ b \circ a^{-1} \circ (1) \circ a \circ b^{-1} \circ a^{-1} \\
&= a \circ b \circ \left(a^{-1} \circ a\right) \circ b^{-1} \circ a^{-1} \\
&= a \circ b \circ (1) \circ b^{-1} \circ a^{-1} \\
&= a \circ \left(b \circ b^{-1}\right) \circ a^{-1} \\
&= a \circ (1) \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = (1),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(b \circ a \circ b^{-1} \circ a^{-1}\right) \circ \left(a \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1}\right) &= b \circ a \circ b^{-1} \circ \left(a^{-1} \circ a\right) \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1} \\
&= b \circ a \circ b^{-1} \circ (1) \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1} \\
&= b \circ a \circ \left(b^{-1} \circ b\right) \circ a^{-1} \circ b^{-1} \\
&= b \circ a \circ (1) \circ a^{-1} \circ b^{-1} \\
&= b \circ \left(a \circ a^{-1}\right) \circ b^{-1} \\
&= b \circ (1) \circ b^{-1} \\
&= b \circ b^{-1} \\
&= (1).
\end{aligned}
$$

Karena memenuhi invers kiri dan invers kanan, terbukti bahwa $[a, b]^{-1} = b \circ a \circ b^{-1} \circ a^{-1}$.

▼

Question 2

Misalkan p bilangan prima terkecil yang membagi order grup berhingga G. Buktikan bahwa sembarang subgrup dari G berindeks p adalah subgrup normal dalam G.

Penyelesaian.

Definisikan aksi G pada G/H dengan $a \cdot gH = agH$ untuk setiap $a \in G$ dan $gH \in G/H$. Tinjau

$$1_G \cdot gH = 1_G gH = gH \quad \text{dan} \quad a \cdot (b \cdot gH) = a \cdot bgH = abgH = (ab)gH = ab \cdot gH$$

yang mana memenuhi aksioma grup aksi. Ambil sebarang $a \in G$, tinjau pemetaan $f_a : G/H \to G/H$ dengan $f_a(gH) = a \cdot gH = agH$.

- Akan dibuktikan f_a well-defined. Ambil sebarang $g_1H, g_2H \in G/H$ dengan $g_1H = g_2H$. Ini berarti $f_a(g_1H) = a(g_1H) = a(g_2H) = f_a(g_2H)$, terbukti.
- Akan dibuktikan f_a surjektif. Ambil sebarang $gH \in G/H$, tinjau $a^{-1}gH \in G/H$ memenuhi
$$f_a\left(a^{-1}gH\right) = a^{-1}(agH) = \left(a^{-1}a\right)gH = 1_G gH = gH,$$
terbukti bahwa f_a surjektif.
- Akan dibuktikan bahwa f_a injektif. Ambil sebarang $g_1H, g_2H \in G/H$ yang memenuhi $f_a(g_1H) = f_a(g_2H)$. Ini berarti $a \cdot g_1H = a \cdot g_2H$. Ini menunjukkan
$$g_1H = 1_G \cdot g_1H = a^{-1}a \cdot g_1H = a^{-1} \cdot (a \cdot g_1H) = a^{-1} \cdot (a \cdot g_2H) = a^{-1}a \cdot g_2H = 1_G \cdot g_2H = g_2H,$$
terbukti bahwa f_a injektif.

Jadi, f_a merupakan fungsi bijektif (atau permutasi). Misalkan $K = G/H$, tinjau pemetaan $\tau : G \to S_K$ dengan $\tau(a) = f_a$. Ambil sebarang $a, b \in G$ yang memenuhi $a = b$, maka $\tau(a) = f_a = f_b = \tau(b)$. Untuk setiap $a, b \in G$, tinjau

$$\tau(ab) = f_{ab} = f_{ab}(x) = (ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) = f_a(b \cdot x) = f_a(f_b(x)) = (f_a \circ f_b)(x) = f_a f_b = \tau(a)\tau(b)$$

sehingga τ merupakan homomorfisma. Perhatikan bahwa $1_{S_K} = \text{id}$ dengan $\text{id}(x) = x \ \forall \ x \in gH$ merupakan elemen identitas di S_K. Misalkan $a \in \ker \tau$, maka $\text{id} = \tau(a) = f_a$ yang berarti $\text{id}(gH) = f_a(gH) \iff a \cdot gH = gH \iff (ag)H = gH$ untuk setiap $gH \in G/H$. Ini berarti $agg^{-1} \in H \iff a \in H$ yang menunjukkan bahwa $\ker \tau \subseteq H$. Karena $\ker \tau$ merupakan subgrup normal dari G dan menurut teorema Isomorfisma berlaku $\frac{G}{\ker \tau} \cong \tau(G)$ yang berarti $\left|\frac{G}{K}\right| = |\tau(G)|$, serta $\tau(G)$ adalah subgrup dari S_K. Karena $|K| = [G : H] = p$, ini menunjukkan $S_K \cong S_p$ yang menunjukkan bahwa $\tau(G)$ subgrup dari S_p. Dari Teorema Lagrange berlaku $|S_p| = p!$ habis dibagi $|\tau(G)| = \left|\frac{G}{\ker \tau}\right| = \frac{|G|}{|\ker \tau|}$. Berdasarkan Teorema Lagrange, $|G|$ habis dibagi $|\ker \tau|$. Notasikan $\nu_q(n) = k$ sebagai $q^k \mid n$, namun $q^{k+1} \mid n$ di mana $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dan q prima. Misalkan r sebarang faktor prima dari G yang lebih besar dari p, maka

$$A_r = \nu_r\left(\frac{|G|}{|\ker \tau|}\right) = \nu_r|G| - \nu_r|\ker \tau|.$$

Andaikan $A_r \neq 0$, maka $p!$ tidak akan habis dibagi $\frac{|G|}{|\ker \ tau|}$ yang mana kontradiksi. Jadi, $\nu_r\left(\frac{|G|}{|\ker \tau|}\right) = 0$ untuk setiap prima $r > p$. Di sisi lain, $A_p = \nu_p|G| - \nu_p|\ker \tau| = 1$ karena $p!$ habis dibagi p, namun tidak habis dibagi p^2. Jadi, $\frac{|G|}{|\ker\tau|} = p \iff |G| = p|\ker\tau|$. Di sisi lain, $[G : H] = p \iff |G| = p|H|$ yang menunjukkan $|H| = |\ker\tau|$. Karena $\ker\tau \subseteq H$, ini berarti haruslah $H = \ker\tau$ yang menunjukan subgrup normal dari G. ▼

Question 3

Misalkan G grup, X merupakan G-set dan $a \in G$. Definisikan suatu pemetaan $\sigma_a : X \to X$ di mana $\sigma_a(x) = a \cdot x$ untuk setiap $x \in X$.

(a). Buktikan σ_a pemetaan bijektif/permutasi dari X.

(b). Misalkan S_X himpunan semua permutasi dari X. Buktikan pemetaan $\theta : G \to S_X$ di mana $\theta(a) = \sigma_a$ untuk semua $a \in G$. Buktikan θ homomorfisma.

(c). Buktikan $\ker(\theta) = \{a \in G \mid a \cdot x = x \, \forall \, x \in G\}$.

Penyelesaian.

(a). Akan dibuktikan σ_a well-defined, ambil sebarang $x, y \in X$ yang memenuhi $x = y$. Maka $\sigma_a(x) = a \cdot x = a \cdot y = \sigma_a(y)$. Akan dibuktikan σ_a injektif. Ambil sebarang $x, y \in X$ yang memenuhui $\sigma_a(x) = \sigma_a(y) \iff a \cdot x = a \cdot y$. Ini berarti

$$x = 1_G \cdot x = \left(a^{-1}a\right) \cdot x = a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot (a \cdot y) = \left(a^{-1}a\right) \cdot y = 1_G \cdot y = y,$$

terbukti σ_a injektif. Akan dibuktikan σ_a surjektif. Ambil sebarang $x \in X$, tinjau $a^{-1} \cdot x \in X$ memenuhi

$$\sigma_a\left(a^{-1} \cdot x\right) = a \cdot \left(a^{-1} \cdot x\right) = aa^{-1} \cdot x = 1_G \cdot x = x,$$

terbukti.

(b). Akan dibuktikan θ well-defined, ambil sebarang $a, b \in G$ yang memenuhi $a = b$. Maka $\theta(a) = \sigma_a = \sigma_b = \theta(b)$ yang mana terbukti. Akan dibuktikan θ homomorfisma, ambil sebarang $a, b \in G$. Untuk setiap $x \in X$ berlaku

$$\sigma_{ab}(x) = (ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) = \sigma_a(b \cdot (x))\sigma_a(\sigma_b(x)) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(x).$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in X$, maka $\sigma_{ab} = \sigma_a\sigma_b \iff \theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$, terbukti.

(c). Tinjau $\mathrm{id}(x) = x$ untuk setiap $x \in X$ merupakan permtuasi identitas di S_X. Jika $a \in \ker\theta$, ini berarti $\theta(a) = \mathrm{id} \iff \sigma_a = \mathrm{id}$ sehingga $\sigma_a(x) = \mathrm{id}(x) = x \iff a \cdot x = x$ untuk setiap $x \in X$.

▼

Question 4

Perhatikan teorema Sylow berikut: Misal G grup berhingga. Jika p suatu bilangan prima dan p^k membagi $|G|$ untuk suatu $k \geq 0$, maka G mempunyai suatu subgrup berorder p^k. Tuliskan satu contoh subgrup yang memenuhi teorema Sylow jika $|G| = 36$ dan $k \geq 2$.

Penyelesaian.

Tinjau $|G| = 36$ habis dibagi $9 = 3^2$, ini berarti terdapat subgrup dari G dengan order $3^2 = 9$ sebagai salah satu contohnya. ▼