Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Teori Grup Fuzzy

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

$\boxed{\mathbf{1}}$ Misalkan $A = \{(x, \mu(x)), : x \in G\}$ suatu himpunan fuzzy dari grup G. Buktikan A subgrup fuzzy jika dan hanya jika

$$\mu\left(xy^{-1}\right) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \quad \forall x, y \in G.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Perhatikan himpunan fuzzy A, B, dan C pada suatu himpunan tak kosong X.

$$A = \{(x, \mu(x)) : x \in X\}, \quad B = \{(x, \beta(x)) : x \in X\}, \quad C = \{(x, \gamma(x)) : x \in X\}.$$

Buktikan bahwa $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Misalkan G suatu grup dengan elemen identitas e dan $A = \{(x, \mu(x)) : x \in G\}$ subgrup normal fuzzy dari G. Definisikan himpunan $H = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$. Buktikan H subgrup normal dari G.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Pandang grup G dengan elemen identitas e, $a \in G$, dan $A = \{(x, \mu(x)) : x \in G\}$ subgrup fuzzy dari G. Buktikan $\mu(a) = \mu(e)$ jika dan hanya jika $aA = A = Aa$.

Soal Nomor

1

Misalkan $A = \{(x, \mu(x)), : x \in G\}$ suatu himpunan fuzzy dari grup G. Buktikan A subgrup fuzzy jika dan hanya jika

$$\mu\left(xy^{-1}\right) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \quad \forall x, y \in G.$$

Solusi:

($\Rightarrow$) Jika A subgrup fuzzy dari G. Maka untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \quad \mu\left(x^{-1}\right) \geq \mu(x).$$

Selain itu, berlaku

$$\mu(x) = \mu\left(\left(x^{-1}\right)^{-1}\right) \geq \mu\left(x^{-1}\right) \implies \mu(x) \geq \mu\left(x^{-1}\right).$$

Jadi, $\mu(x) = \mu\left(x^{-1}\right)$ untuk setiap $x \in G$. Selain itu,

$$\mu(e) = \mu\left(xx^{-1}\right) \geq \min\left\{\mu(x), \mu\left(x^{-1}\right)\right\} = \mu(x) \implies \mu(e) \geq \mu(x) \quad \forall x \in G.$$

Akibatnya, untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu\left(xy^{-1}\right) \geq \min\left\{\mu(x), \mu\left(y^{-1}\right)\right) = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

seperti yang ingin dibuktikan.
($\Leftarrow$) Jika untuk setiap $x, y \in G$ berlaku

$$\mu\left(xy^{-1}\right) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}.$$

Untuk $y := x$, maka

$$\mu(e) = \mu\left(xx^{-1}\right) \geq \min\{\mu(x), \mu(x)\} = \mu(x) \implies \mu(e) \geq \mu(x) \quad \forall x \in G.$$

Untuk $x := e$ dan $y := x$,

$$\mu\left(x^{-1}\right) = \mu\left(ex^{-1}\right) \geq \min\{\mu(e), \mu(x)\} = \mu(x) \implies \mu\left(x^{-1}\right) \geq \mu(x).$$

Untuk $y := y^{-1}$,

$$\mu(xy) = \mu\left(x\left(y^{-1}\right)^{-1}\right) \geq \min\left\{\mu(x), \mu\left(y^{-1}\right)\right\} \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

sehingga $\mu(xy) = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$. Terbukti A subgrup fuzzy dari G.

Soal Nomor 2

Perhatikan himpunan fuzzy A, B, dan C pada suatu himpunan tak kosong X.

$$A = \{(x, \mu(x)) : x \in X\}, \quad B = \{(x, \beta(x)) : x \in X\}, \quad C = \{(x, \gamma(x)) : x \in X\}.$$

Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Solusi:

Ambil sebarang $x \in X$. Misalkan f fungsi keanggotaan $A \cap (B \cup C)$, maka

$$f(x) := f_{A \cap (B \cup C)} = \min\{\mu(x), f_{B \cup C}(x)\} = \min\{\mu(x), \max\{\beta(x), \gamma(x)\}\}.$$

Misalkan g fungsi keanggotaan $(A \cap B) \cup (a \cap C)$, maka

$$g(x) := g_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = \max\{g_{A \cap B}(x), g_{A \cap C}(x)\} = \max\{\min\{\mu(x), \beta(x)\}, \min\{\mu(x), \gamma(x)\}\}.$$

Dalam hal ini ekuivalen dengan membuktikan

$$\min\{\mu(x), \max\{\beta(x), \gamma(x)\}\} = \max\{\min\{\mu(x), \beta(x)\}, \min\{\mu(x), \gamma(x)\}\}$$

untuk setiap $x \in X$. Selanjutnya, akan dituliskan $\mu := \mu(x), \beta := \beta(x)$, dan $\gamma := \gamma(x)$ untuk mempermudah penulisan. Karena B dan C simetris, tanpa mengurangi keumumsan misalkan $\beta \geq \gamma$. Oleh karena itu, sekarang ekuivalen dengan membuktikan

$$\min\{\mu, \beta\} = \max\{\min\{\mu, \beta\}, \min\{\mu, \gamma\}\}.$$

Akan dibuktikan $\min\{\mu, \beta\} \geq \min\{\mu, \gamma\}$. Perhatikan bahwa

$$\min\{\mu, \beta\} = \frac{\mu + \beta - |\mu - \beta|}{2}, \quad \min\{\mu, \gamma\} = \frac{\mu + \gamma - |\mu - \gamma|}{2}.$$

Menurut ketaksamaan segitiga,

$$\beta - \gamma = |\beta - \gamma| = |\gamma - \beta| = |\mu - \beta - (\mu - \gamma)| \geq |\mu - \beta| - |\mu - \gamma|.$$

Ketaksamaan tersebut ekuivalen pula dengan

$$\min\{\mu, \beta\} = \frac{\mu + \beta - |\mu - \beta|}{2} \geq \frac{\mu + \gamma - |\mu - \gamma|}{2} = \min\{\mu, \gamma\}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akibatnya,

$$\max\{\min\{\mu, \beta\}, \min\{\mu, \gamma\}\} = \min\{\mu, \beta\}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Soal Nomor

3

Misalkan G suatu grup dengan elemen identitas e dan $A = \{(x, \mu(x)) : x \in G\}$ subgrup normal fuzzy dari G. Definisikan himpunan $H = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$. Buktikan H subgrup normal dari G.

Solusi:

Akan dibuktikan $H \leq G$. Ambil sebarang $x, y \in H$, maka $\mu(x) = \mu(e) = \mu(y)$. Karena A subgrup fuzzy dari G, maka

$$\mu\left(xy^{-1}\right) \geq \min\left\{\mu(x), \mu\left(y^{-1}\right)\right\} = \min\{\mu(e), \mu(y)\} = \mu(e)$$

karena $\mu(e) \geq \mu(a)$ untuk setiap $a \in G$. Karena $\mu\left(xy^{-1}\right) \leq \mu(e)$, maka $\mu\left(xy^{-1}\right) = \mu(e)$. Ini berarti $xy^{-1} \in H$ sehingga terbukti $H \leq G$.
Akan dibuktikan H subgrup normal dari G. Ambil sebarang $g \in G$ dan $x \in H$. Karena A subgrup normal fuzzy dari G, maka

$$\mu\left(gxg^{-1}\right) = \mu(x) \implies gxg^{-1} \in H.$$

Terbukti H subgrup normal dari G.

Soal Nomor

4

Pandang grup G dengan elemen identitas e, $a \in G$, dan $A = \{(x, \mu(x)) : x \in G\}$ subgrup fuzzy dari G. Buktikan $\mu(a) = \mu(e)$ jika dan hanya jika $aA = A = Aa$.

Solusi:

($\Leftarrow$) Jika $aA = A = Aa$. Karena $aA = A$, untuk setiap $x \in G$ berlaku

$$(a\mu)(x) = \mu(x) \iff \mu\left(a^{-1}x\right) = \mu(x) \quad \forall x \in G.$$

Pilih $x := a$, maka $\mu(e) = \mu(a)$ seperti yang ingin dibuktikan.
($\Rightarrow$) Jika $\mu(a) = \mu(e)$. Karena A subgrup fuzzy dari G, maka $\mu(e) \geq \mu(x)$ untuk setiap $x \in G$ dan

$$\mu(x) = \mu(ex) = \mu\left(aa^{-1}x\right) \geq \min\left\{\mu(a), \mu\left(a^{-1}x\right)\right\} = \min\{\mu(e), (a\mu)(x)\} = (a\mu)(x).$$

Selain itu, $\mu\left(x^{-1}\right) = \mu(x)$ sehingga

$$(a\mu)(x) = \mu\left(a^{-1}x\right) \geq \min\left\{\mu\left(a^{-1}\right), \mu(x)\right\} = \min\{\mu(a), \mu(x)\} = \min\{\mu(e), \mu(x)\} = \mu(x).$$

Karena $(a\mu)(x) \geq \mu(x)$ dan $\mu(x) \geq (a\mu)(x)$, ini berarti $(a\mu)(x) = \mu(x)$ untuk setiap $X \in G$. Terbukti $aA = A$. Kemudian, untuk pembuktian $A = Aa$ dapat dibuktikan secara analog. Terbukti $aA = A = Aa$.