Soal dan Solusi UTS Pengantar Statistika Matematika 2024

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Tentukan distribusi sampling dari $Y_1 = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ dan $Y_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ untuk sampel acak ukuran n: $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim Uniform(0, 1)$.

Di sini akan ada dua asumsi dari soal ini: menentukan masing-masing FDK dan FKP terkait atau gabungannya.

Untuk asumsi menentukan masing-masing FDK dan FKP Y_1 dan Y_n.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa FKP dari X_i adalah $f_{X_i}(x) = 1$ untuk $0 < x < 1$ dan 0 selainnya. Maka FDK dari X_i adalah $F_{X_i}(x) = \int\limits_0^x 1 \, d\xi = x$ untuk $0 < x < 1$. Maka FDK dari Y_1 adalah

$$\begin{aligned}
F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}(Y_1 \leq y) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > y) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) > y) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y)\mathbb{P}(X_2 > y) \cdots \mathbb{P}(X_n > y) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 > y)^n \\
&= 1 - [1 - \mathbb{P}(X_1 \leq y)]^n \\
&= 1 - (1 - y)^n, \quad 0 < y < 1.
\end{aligned}$$

Diperoleh FKP dari Y_1 adalah

$$f_{Y_1}(y) = \frac{dF_{Y_1}}{dy} = 0 - n(1-y)^{n-1}(-1) = n(1-y)^{n-1}, \quad 0 < y < 1$$

dan nol selainnya. Diperoleh pula FDK dari Y_n adalah

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(y) &= \mathbb{P}(Y_n \leq y) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq y)\mathbb{P}(X_2 \leq y) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq y)^n \\
&= y^n, \quad 0 < y < 1.
\end{aligned}$$

Ini berarti FKP dari Y_n adalah $f_{Y_n}(y) = \frac{dF_{Y_n}}{dy} = ny^{n-1}$ untuk $0 < y < 1$ dan nol selainnya. ▼

Untuk asumsi menentukan FDK dan FKP gabungan Y_1 dan Y_n.

Penyelesaian.

FKP gabungan dari $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ dengan Y_i menyatakan orde ke-i dari $X_1, X_2, \cdots, X_n$, yaitu

$$f_{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n}(y_1, y_2, \cdots, y_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f_{X_1}(y_i) = n!, \quad 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 1.$$

FKP marginal $Y_1, Y_3, Y_4, \cdots, Y_n$ adalah

$$f_{Y_1,Y_3,\cdots,Y_n}(y_1, y_3, \cdots, y_n) = \int_{y_1}^{y_3} n!\, dy_2 = n!(y_3 - y_1), \quad 0 < y_1 < y_3 < \cdots < y_n < 1.$$

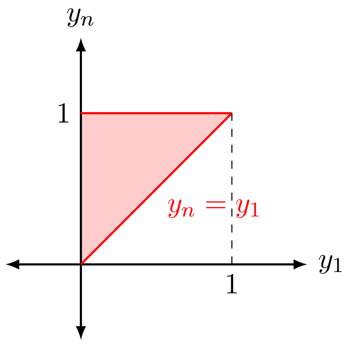
FKP marginal $Y_1, Y_4, Y_5, \cdots, Y_n$ adalah

$$f_{Y_1,Y_4,\cdots,Y_n}(y_1, y_4, \cdots, y_n) = \int_{y_1}^{y_4} n!(y_3 - y_1)\, dy_3 = \frac{n!}{2}(y_4 - y_1)^2$$

yang diperoleh dengan melakukan substitusi $u = y_3 - y_1,\ du = dy_3$. Dengan melanjutkan proses ini seterusnya, diperoleh FKP marginal Y_1, Y_n adalah

$$f_{Y_1,Y_n}(y_1, y_n) = \frac{n!}{(n-2)!}(y_n - y_1)^{n-2} = n(n-1)(y_n - y_1)^{n-2}, \quad 0 < y_1 < y_n < 1$$

dan nol selainnya. Daerah yang diarsir menyatakan himpunan $S = \{(y_1, y_n) : 0 < y_1 < y_n < 1\}$.



Definisikan FDK (Y_1, Y_n) sebagai $F_{Y_1,Y_n}(a, b) = \mathbb{P}(Y_1 \leq a, b \leq y_n)$. Akan ditentukan F_{Y_1,Y_n} dengan memerhatikan daerah S.

- Jika $a, b \leq 0$, jelas bahwa $F_{Y_1,Y_n}(a, b) = 0$.
- Jika $a, b \geq 1$, jelas bahwa $F_{Y_1,Y_n}(a, b) = 1$.
- Jika $0 < a < 1$. Tinjau bahwa apabila $b < 0 < a$, maka semua titik-titik pada $S_1 = \{(y_1, y_n) : y_1 \leq a, y_n \leq b\}$ tidak berada di dalam dan pada S, akibatnya $f_{Y_1,Y_n}(y_1, y_n) = 0$ untuk setiap $(a, b) \in S_1$. Jadi,

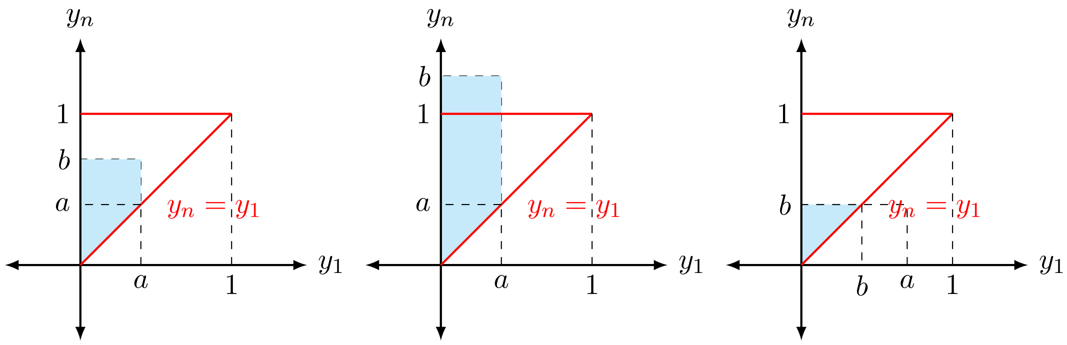
  $$F_{Y_1,Y_n}(a, b) = \iint_{S_1} f_{Y_1,Y_n}(y_1, y_n)\, dS_1 = 0.$$

  Tinjau apabila $0 < a \leq b < 1$ yang diilustrasikan pada gambar kiri. Perhatikan himpunan titik-titik $S_2 = \{(y_1, y_n) : y_1 \leq a, y_n \leq b\}$ yang mana sebagian titiknya berada di S dan ada yang tidak. Untuk titik $(y_1, y_n) \in S_2 \setminus S$ jelas berakibat $f_{Y_1,Y_n}(y_1, y_n) = 0$. Oleh karena itu, batas pengintegralan cukup dilakukan pada daerah biru, misalkan

  $$D_2 = \{(y_1, y_n) : y_1 \leq y_n \leq a\} \cup \{(y_1, y_n) : 0 < y_1 \leq a, a < y_n \leq b\}.$$

Misalkan $D_{21} = \{(y_1, y_n) : y_1 \le y_n \le a\}$ dan $D_{22} = \{(y_1, y_n) : 0 < y_1 \le a, a < y_n \le b\}$

$$F_{Y_1,Y_n}(a,b) = \iint\limits_{D_2} f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)\; dD_2 = \iint\limits_{D_{21}} f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)\; dD_{21} + \iint\limits_{D_{22}} f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)\; dD_{22}.$$



Perhatikan bahwa

$$\iint\limits_{D_{21}} f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)\; dD_2 = \int_0^a \int_0^{y_n} n(n-1)(y_n - y_1)^{n-2}\; dy_1\; dy_n = n(n-1) \int_0^a \int_0^{y_n} (y_n - y_1)^{n-2}\; dy_1\; dy_n.$$

Misalkan $u = y_n - y_1$, maka $du = -dy_1$, diperoleh

$$\int_0^{y_n} (y_n - y_1)^{n-2}\; dy_1 = \int_{y_n}^{0} u^{n-2}(-du) = \frac{1}{n-1} y_n^{n-1}.$$

Ini berarti

$$\iint\limits_{D_{21}} f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n) = n(n-1) \int_0^a \frac{1}{n-1} y_n^{n-1}\; dy_n = n \int_0^a y_n^{n-1}\; dy_n = a^n.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_{22}} f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)\; dD_{22} &= \int_0^a \int_a^b n(n-1)(y_n - y_1)^{n-2}\; dy_n\; dy_1 \\
&= \int_0^a n(b-y_1)^{n-1} - n(a-y_1)^{n-1}\; dy_1 \\
&= b^n - (a-b)^n - a^n.
\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $F_{Y_1,Y_n}(y_1, y_n) = b^n - (a-b)^n$ untuk $0 < a \le b < 1$.
Jika $b \ge 1$ yang berarti daerah himpunan titik-titiknya sebagaimana gambar tengah, kemudian sebagaimana argumen sebelumnya, diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
F_{Y_1,Y_n}(a,b) &= \int_0^a \int_0^{y_n} f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)\; dy_1\; dy_n + \int_0^a \int_a^1 f_{Y_1,Y_n}(a,b)\; dy_1\; dy_n \\
&= a^n + 1^n - (a-1)^n - a^n \\
&= 1 - (a-1)^n
\end{aligned}$$

untuk $0 < a < 1 \leq b$.

Tinjau bahwa untuk $0 < b \leq a$ dengan $0 < b < 1$ (di sini dapat berlaku untuk $a < 1$ maupun $a \geq 1$). Sebagaimana argumen sebelumnya,

$$F_{Y_1,Y_n}(a,b) = \int\limits_0^b \int\limits_0^{y_n} f_{Y_1,Y_n}(y_1,y_n)\, dy_1\, dy_n = b^n.$$

- Jika $0 < b < 1$. Untuk $a < 0 < b$ diperoleh $F_{Y_1,Y_n}(a,b) = 0$. Untuk $0 < a \leq b < 1$ telah terhitung di kasus sebelumnya, begitu juga untuk $0 < b \leq a < 1$. Untuk $a \geq 1$ juga telah terhitung di kasus sebelumnya.

Jadi, FDK dari (Y_1, Y_n) adalah

$$F_{Y_1,Y_n}(a,b) = \begin{cases} 0, & a \leq 0 \vee b \leq 0 \\ b^n - a^n - (a-b)^n, & 0 < a \leq b < 1 \\ 1 - (a-1)^n, & 0 < a < 1 \leq b \\ b^n, & 0 < b \leq a, 0 < b < 1 \\ 1, & a, b \geq 1 \end{cases}.$$

▼

Question 2

Pandang suatu variabel acak $\{X_n\}$ dengan FKP

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n+1}, \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{n-2}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(a). Tentukan fungsi distribusi kumulatifnya,

(b). Tentukan distribusi pendekatan bagi X_n, yaitu $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$.

(c). Selidiki apakah $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ distribusi yang degenerate.

Perhatikan bahwa

$$\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) = 1$$

yang menunjukkan bahwa $\mathbb{P}(X_n = c) = 0$ untuk $c \notin \{0, 1, 2, 3\}$.

(a). Didefinisikan $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$. Untuk $x < 0$ jelas berakibat $F_n(x) = 0$. Untuk $0 \leq x < 1$ diperoleh $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}$. Untuk $1 \leq x < 2$ diperoleh $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$. Untuk $2 \leq x < 3$ diperoleh $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n + 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n+1}$. Untuk $3 \leq x$ diperoleh $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) = 1$. Jadi, distribusi kumulatifnya adalah

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{n}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n+1}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}.$$

(b). Tinjau bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = 0 + 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Pandang $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$ yang mana tidak kontinu di $x = 2$ dan kontinu di selainnya. Tinjau bahwa untuk setiap titik x yang $F(x)$ kontinu berlaku $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$. Ini menunjukkan bahwa $F(x)$ merupakan distribusi pendekatan dari $F_n(x)$.

(c). Ya, karena $f(2) = F(2^+) - F(2^-) = 1 - 0 = 1$ yang artinya FKP dari distribusi tersebut memiliki peluang 1 di satu titik $x = 2$ (artinya nol untuk selainnya).

Question 3

Sampel acak ukuran n: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ dengan fungsi kepadatan peluang:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, & 0 < x < \theta, \theta > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Dapatkan estimator dari θ menggunakan metode momen.

Penyelesaian.

Karena hanya menentukan estimator untuk satu parameter, cukup diselesaikan $\mu_1 = M_1$ di mana

$$M_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \overline{X} \quad \text{dan} \quad \mu_1 = \mathbb{E}[X].$$

Perhatikan bahwa

$$\mu_1 = \mathbb{E}[x] = \int_0^\theta \frac{2x\theta - 2x^2}{\theta^2}\, dx = \left[\frac{x^2\theta - \frac{2}{3}x^3}{\theta^2}\right]_{x=0}^{x=\theta} = \frac{\theta^3 - \frac{2}{3}\theta^3}{\theta^2} = \frac{\theta}{3}.$$

Dari $\overline{X} = \frac{\theta}{3}$, diperoleh estimator untuk θ adalah $\hat{\theta} = 3\overline{X}$. ▼

Question 4

Pandang $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ sebagai sampel acak dengan FKP

$$f(y) = e^{-(y-\mu)}, \quad -\infty < \mu < y < \infty.$$

(a). Tunjukkan bahwa $Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ merupakan statistik sufisien/cukup bagi μ.

(b). Tentukan UMVUE bagi μ.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa FDK dari Y_i adalah

$$F_{Y_i}(y) = \int_{\mu}^{y} e^{-(\xi-\mu)} d\xi = \int_{0}^{y-\mu} e^{-u}\, du = 1 - e^{-(y-\mu)}, \quad y > \mu$$

yang diperoleh dengan melakukan substitusi $u = \xi - \mu$, $du = d\xi$.

(a). Perhatikan bahwa FDK dari $Y_{(1)}$ adalah

$$\begin{aligned} F_{Y_{(1)}}(y) &= \mathbb{P}(Y_{(1)} \le y) = 1 - \mathbb{P}(Y_{(1)} > y) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > y, Y_2 > y, \cdots, Y_n > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y_1 > y)\mathbb{P}(Y_2 > y) \cdots \mathbb{P}(Y_n > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y_1 > y)^n \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(Y_1 \le y))^n \\ &= 1 - e^{-n(y-\mu)} \\ &= 1 - e^{-ny+n\mu}. \end{aligned}$$

Diperoleh bahwa FKP dari $Y_{(1)}$ adalah

$$f_{Y_{(1)}}(y) = \frac{dF_{Y_{(1)}}}{dy} = 0 - e^{-ny+n\mu}(-y) = ye^{-ny+n\mu}.$$

Kemudian, perhatikan bahwa

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n \mid y_{(1)}) = \frac{f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2) \cdots f_{Y_n}(y_n)}{f_{Y_{(1)}}(y)} = \frac{e^{-\sum y_i + n\mu}}{ye^{-ny+n\mu}} = \frac{1}{y} e^{-\sum y_i}$$

yang tidak bergantung terhadap μ. Jadi, $Y_{(1)}$ statistik cukup untuk μ.

(b). Akan dibuktikan bahwa $\overline{Y} - 1$ merupakan UMVUE bagi μ dengan $\overline{Y} = \frac{Y_1+Y_2+\cdots+Y_n}{n}$. Perhatikan bahwa

$$\mathbb{E}[Y_i] = \int_{\mu}^{\infty} ye^{-(y-\mu)}\, dy = \int_{0}^{\infty} (u+\mu)e^{-u}\, du = \int_{0}^{\infty} ue^{-u} + \mu \int_{0}^{\infty} e^{-u} = \Gamma(2) + \mu \cdot 1 = 1 + \mu.$$

Ini berarti

$$\mathbb{E}\left[\overline{Y} - 1\right] = \mathbb{E}\left[\overline{Y}\right] - 1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i] - 1 = \frac{1}{n} \cdot n(\mu+1) - 1 = \mu$$

yang berarti $\overline{Y} - 1$ tak bias. Kemudian,

$$\text{BBCR} = \frac{\left(\frac{d}{d\mu}\mu\right)^2}{n\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\mu} \ln f(y;\mu)\right]^2} = \frac{1}{n\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\mu} - (y-\mu)\right]^2} = \frac{1}{n\mathbb{E}\left[1^2\right]} = \frac{1}{n}.$$

Akan dibuktikan bahwa $\operatorname{Var}\left(\overline{Y}-1\right)=\frac{1}{n}$. Dari sifat variansi,

$$\operatorname{Var}\left(\overline{Y}-1\right)=\operatorname{Var}\left(\overline{Y}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(Y_i).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_i^2\right]&=\int\limits_{\mu}^{\infty}y^2e^{-(y-\mu)}\,dy=\int\limits_{0}^{\infty}(u+\mu)^2e^{-u}\,du=\int\limits_{0}^{\infty}u^2e^{-u}\,du+2\mu\int\limits_{0}^{\infty}ue^{-u}\,du+\mu^2\int\limits_{0}^{\infty}e^{-u}\,du\\&=\Gamma(3)+2\mu\Gamma(2)+\mu^2\cdot 1\\&=2+2\mu+\mu^2.\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa

$$\operatorname{Var}(Y_i)=\mathbb{E}\left[Y_i^2\right]-(\mathbb{E}[Y_i])^2=2+2\mu+\mu^2-(\mu+1)^2=1.$$

Ini berarti

$$\operatorname{Var}\left(\overline{Y}-1\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(Y_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n=\frac{1}{n}.$$

Karena $\operatorname{Var}\left(\overline{Y}-1\right)=\text{BBCR}$, ini menunjukkan $\overline{Y}-1$ UMVUE bagi μ.

▼