Soal dan Solusi UAS Pengantar Statistika Matematika 2024

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Pada kuesioner tentang pentingnya etika dan moral dalam pembinaan generasi muda menggunakan $n = 15$ responden untuk menguji hipotesis. Adapun hipotesanya adalah sebagai berikut: $H_0 : p = 0.5$ vs $H_A : p < 0.5$ dengan p merupakan proporsi. Jika uji statistik yang digunakan adalah X yang menyatakan banyaknya responden yang memilih pentingnya pembekalan etika dan moral dalam pembinaan generasi muda, tentukan tingkat signifikansi α jika dipilih daerah penolakan, yaitu $RR = \{X \leq 2\}$.

(A) $\alpha = 0.004$

(B) $\alpha = 0.003$

(C) $\alpha = 0.04$.

(D) $\alpha = 0.03$.

(E) Semua jawaban salah.

Penyelesaian.

Ingat bahwa $\alpha = \mathbb{P}(X \in RR : H_0 \text{ benar}) = \mathbb{P}(X \in RR : p = 0.5) = \mathbb{P}_{p=0.5}(X \leq 2)$. Ini berarti

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathbb{P}_{p=0.5}(X = 0) + \mathbb{P}_{p=0.5}(X = 1) + \mathbb{P}_{p=0.5}(X = 2) \\
&= \binom{15}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{15}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \\
&= \frac{1 + 15 + 105}{2^{15}} \\
&\approx 0.00369 \\
&\approx 0.004.
\end{aligned}$$

Jadi, tingkat signifikansinya adalah $\alpha = 0.004$ **(A)**.

Question 2

Diketahui $X_0, X_1, \cdots, X_{16}$ merupakan sampel acak dari distribusi normal $X_i \sim N(\mu, 1)$ dan akan diuji $H_0 : \mu = 20$ dengan tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$ berdasarkan *sample mean* $\overline{X}$. Tentukan daerah kritis pada $C = \{\overline{x} \mid \overline{x} \geq c\}$.

(A) $c = 20.41$

(B) $c = 19.21$

(C) $c = 20.19.$

(D) $c = 19.59.$

(E) Semua jawaban salah.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_{16}}{16} \sim N\left(\mu, \frac{1}{16}\right)$. Diperoleh

$$\alpha = \mathbb{P}(\overline{x} \in RR : H_0 \text{ benar}) \implies 0.05 = \mathbb{P}(\overline{x} \geq c : \mu = 20) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{x} - 20}{\frac{1}{4}} \geq \frac{c-20}{\frac{1}{4}}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{c-20}{\frac{1}{4}}\right)$$

di mana Z adalah variabel acak normal baku. Karena $z_{0.05} = 1.65$, maka

$$1.65 = \frac{c-20}{\frac{1}{4}} \implies c = 20 + \frac{1.65}{4} = 20.4125.$$

Jadi, $c = 20.41$ **(A)**. ▼

Question 3

Jika diberikan variabel acak X dari suatu distribusi eksponensial dengan parameter mean tidak diketahui θ. Diberikan pernyataan sebagai berikut.

(i). Interval dari 0 sampai dengan $-\frac{1}{\ln 0.05}$ adalah interval kepercayaan 95% untuk θ.

(ii). $\frac{(n-1)X}{\theta}$ merupakan kuantitas pivot.

(iii). $\frac{X}{\theta}$ merupakan kuantitas pivot.

Manakah pernyataan tersebut yang tidak sesuai?

(A) (i) dan (iii)

(B) (i) dan (ii)

(C) (i) saja

(D) (iii) saja

(E) (ii) saja

Penyelesaian.

FKP dari X adalah $f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$ untuk $x > 0$ dan bernilai 0 selainnya. Perhatikan bahwa $f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} = \frac{1}{\theta}g\left(\frac{x}{\theta}\right)$ di mana $g(x) = e^{-x}$ yang artinya θ merupakan parameter skala. Akibatnya, $\frac{X}{\theta}$ merupakan kuantitas pivot. Karena $n-1$ juga suatu konstan, maka $\frac{(n-1)X}{\theta}$ merupakan kuantitas pivot. Untuk membangun interval kepercayaan untuk θ, tinjau $\frac{2X}{\theta} \sim \chi^2(2)$. Maka

$$95\% = \mathbb{P}\left(\chi^2_{0.95}(2) < \frac{2X}{\theta}\right) = \mathbb{P}\left(0 < \theta < \frac{2X}{\chi^2_{0.95}(2)}\right) = \mathbb{P}\left(0 < \theta < \frac{2X}{0.103}\right)$$

yang berarti interval kepercayaannya adalah 0 sampai dengan $\frac{2X}{0.103}$. Jadi, pernyataan yang tidak sesuai adalah (i) saja **(C)**. ▼

Question 4

Dadu bersisi 6 dilempar berulangkali akan menghasilkan barisan peubah acak $X_0, X_1, X_2, X_3, \cdots$ dengan X_n merupakan mata dadu yang muncul pada lemparan ke-n. Suatu proses $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ didapatkan dari $X_0, X_1, X_2, X_3, \cdots$ dengan memperhatikan suku ke-X_{n-1} dan suku ke-X_n, yakni

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \text{jika } X_{n-1} = X_n \\ 0, & \text{jika } X_{n-1} \neq X_n \end{cases}.$$

Contoh: Jika nilai dari peubah acak $X_0, X_1, X_2, X_3, \cdots$ adalah 3 4 5 5 3 4 4 4 2 $\cdots$, maka nilai dari peubah acak $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ adalah 0 0 1 0 0 1 $\cdots$.

Jelas bahwa $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ merupakan **rantai markov** dengan *state space* $S = \{0, 1\}$ dan

$$\mathbb{P}(Y_n = j \mid Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \cdots, Y_{n-1} = i) = \mathbb{P}(Y_n = j \mid Y_{n-1} = i).$$

Tentukan matriks peluang transisi dari rantai Markov tersebut.

(A) $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

(B) $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(C) $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(D) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(E) Semua jawaban salah.

Penyelesaian.

Akan ditentukan $p_{00} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 \mid Y_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} \neq X_n \mid X_n \neq X_{n-1})$. Ini berarti menentukan peluang terjadinya $X_{n-1} \neq X_n \neq X_{n+1}$ dengan X_{n-1} dan X_n telah diketahui. Peluang terplihnya X_{n+1} dengan ketentuan tersebut adalah $\frac{5}{6}$. Jadi, $p_{00} = \frac{5}{6}$.

Akan ditentukan $p_{01} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} \neq X_n \mid X_n = X_{n-1})$. Ini berarti menentukan peluang terjadinya $X_{n-1} \neq X_n = X_{n+1}$ dengan X_{n-1} dan X_n telah diketahui. Peluang terpilihnya X_{n+1} dengan ketentuan tersebut adalah $\frac{1}{6}$.

Akan ditentukan $p_{10} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0 \mid Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} \neq X_n \mid X_n = X_{n-1})$. Ini berarti menentukan peluang terjadinya $X_{n-1} = X_n \neq X_{n+1}$ dengan X_{n-1} dan X_n telah diketahui. Peluang terpilih X_{n+1} dengan ketentuan tersebut adalah $\frac{5}{6}$.

Akan ditentukan $p_{11} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n \mid X_n = X_{n-1})$. Ini berarti menentukan peluang terjadinya $X_{n-1} = X_n = X_{n+1}$ dengan X_{n-1} dan X_n telah diketahui. Peluang terpilih X_{n+1} dengan ketentuan tersebut adalah $\frac{1}{6}$.

Jadi, peluang matriks transisinya adalah $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ **(B)**. ▼

Question 5

Suatu virus baru muncul dalam populasi yang terdiri dari dua *state* terpapar (0) dan terindeksi (1). Apabila diketahui matriks peluang transisinya adalah $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tentukan distribusi stasioner untuk kemunculan virus baru tersebut.

(A) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(B) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(C) $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(D) $\pi = \begin{pmatrix} a1 - a \end{pmatrix}$, $a \in [0, 1]$

(E) Semua jawaban salah.

Penyelesaian.

Untuk menentukan distribusi stasioner $\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ di mana $x + y = 1$, dalam hal ini menyelesaikan $\pi = \pi P$. Diperoleh

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} + y & \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

Diperoleh $x = \frac{x}{2} + y$ dan $y = \frac{x}{2}$ sehingga diperoleh penyelesaian $y = \frac{x}{2}$. Karena $x + y = 1$, maka $1 = x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}$ yang berarti $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **(B)**. ▼

Question 6

Pelanggan tiba di toko alat tulis mengikuti proses Poisson dengan tingkat kedatangan $\lambda = 4$ orang per jam. Mengingat toko buka pukul 09.00, berapa probabilitas bahwa tepat satu pelanggan telah tiba pada pukul 09.30 dan total lima pelanggan telah tiba sampai dengan pukul 11.30?

(A) 0.1020 **(C)** 0.0378 **(E)** Semua jawaban salah

(B) 0.2707 **(D)** 0.1396

Penyelesaian.

Definisikan $N(t)$ sebagai banyaknya kejadian setelah t jam, dihitung dari jam 09.00. Maka dalam hal ini sama saja dengan menentukan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1, N\left(\frac{5}{2}\right)=5\right) &= \mathbb{P}\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1, N\left(\frac{5}{2}\right)-N\left(\frac{1}{2}\right)=4\right) \\
&= \mathbb{P}\left(N\left(\frac{1}{2}\right)=1\right)\mathbb{P}\left(N\left(\frac{5}{2}\right)-N\left(\frac{1}{2}\right)=4\right) \\
&= \frac{e^{-\lambda\cdot\frac{1}{2}}\left(\lambda\cdot\frac{1}{2}\right)^1}{1!}\cdot\frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^4}{4!} && (\lambda = 2) \\
&= \frac{e^{-1}\cdot e^{-4}4^4}{24} \\
&\approx 0.071871.
\end{aligned}$$

Jadi, tidak ada jawaban yang benar **(E)** ▼

Catatan. Sebenarnya saya khawatir tidak memahami dengan baik maksud soal karena tidak ada opsi jawaban yang tepat. Kemungkinan lain yang saya sempat pikirkan adalah ”total lima pelanggan telah tiba sampai dengan 11.30” dimaksudkan untuk ”total lima pelanggan **setelah** 09.30 sampai 11.30”. Namun, kemungkinan ini juga tidak ada opsi jawaban yang sesuai. Solusi di atas merupakan pemahaman terbaik menurut saya.

Question 7

Sebuah perusahaan menggunakan baterai yang memiliki masa hidup yang mengikuti distribusi Weilbull dengan parameter bentuk $k = 2$ dan parameter skala $\lambda = 500$ jam. Ketika sebuah baterai habis, segera diganti dengan baterai baru dari jenis yang sama. Berapa jumlah penggantian baterai dalam waktu 2250 jam operasi?

(A) 7 kali

(B) 6 kali

(C) 4 kali

(D) 5 kali

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

Misalkan X menyatakan masa hidup yang mengikuti distribusi Weilbull dengan parameter bentuk $k = 2$ dan parameter skala $\lambda = 500$ jam. Maka

$$\mathbb{E}[X] = \lambda\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) = 500\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 500 \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 250 \cdot \sqrt{\pi} = 250\sqrt{\pi}.$$

Rata-rata penggantian baterai dalam satuan jam adalah $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{250\sqrt{\pi}}$. Dalam waktu 2250 jam, banyaknya penggantian baterai adalah $\frac{2250}{250\sqrt{\pi}} \approx 5.0777$, yaitu ada sebanyak 5 kali **(B)**. ▼

Question 8

Banyaknya permintaan pembuatan akte kelahiran pada loket Dispendukcapil di kota tertentu mengikuti distribusi Poisson dengan rate kedatangan pemohon $\lambda = \frac{5 \text{ orang}}{15 \text{ menit}}$. Pegawai Dinas Kependudukan dan catatan sipil tidak melayani sampai dengan setidaknya terdapat 5 pemohon yang antri di loket tersebut. Dapatkan rata-rata waktu tunggu sehingga pegawai Dispenduk segera melakukan pelayanan kepada pemohon akte kelahiran.

(A) 20 menit

(B) 75 menit

(C) 25 menit

(D) 15 menit

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa $\lambda = \frac{1}{3}$/menit. Misalkan S_n sebagai variabel acak waktu dari jam buka hingga orang ke-n datang. Dalam hal ini, akan ditentukan $\mathbb{E}[S_5]$. Ingat bahwa $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ dengan FKP $f(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$ untuk $t > 0$ dan bernilai 0 selainnya, sehingga $\mathbb{E}[S_n] = \frac{n}{\lambda}$. Jadi, $\mathbb{E}[S_5] = \frac{5}{\frac{1}{3}} = 15$ menit **(D)**. ▼

Question 9

Program studi Sarjana Matematika ingin menentukan apakah jumlah peminat perkuliahan semester antara terbesar pada 5 mata kuliah yang ditawarkan merata atau tidak. Berdasarkan kuisioner yang telah disebarkan diperoleh data berikut.

Nama Mata Kuliah	Banyak Peminat
Kalkulus I	18
Kalkulus II	18
Kalkulus III	20
Pengantar Peluang	32
Pengantar Statistika Matematika	32

Jika dilakukan pengujian hipotesis bahwa jumlah peminat perkuliahan semester antara terdirstribusi secara merata di kelima mata kuliah tersebut dan diasumsikan tingkat signifikansi $\alpha = 0.05$, manakah pernyataan berikut yang sesuai?

(A) p-value bernilai lebih besar dari 0.05

(B) p-value lebih besar dari 0.025 tapi tidak melebihi 0.05

(C) Statistik pengujinya bernilai antara 14 sampai 16

(D) Statistik pengujinya bernilai lebih dari 16

(E) Semua jawaban salah.

Penyelesaian.

Uji hipotesis yang dilakukan adalah H_0 : mahasiswa terdistribusi merata vs H_A : mahasiswa tidak terdistribusi merata. Total mahasiswa adalah $18+18+20+32+32 = 120$. Jika mahasiswa terdistribusi merata, maka ekspetasi frekuensi tiap kelas adalah $\mu = \frac{120}{5} = 24$. Akan dilakukan dengan uji chi-square, dengan uji statistik $\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ di mana O_i frekuensi pada suatu kelas dan E_i adalah ekspetasi frekuensi kelas tersebut. Maka

$$\chi^2 = \frac{(18-24)^2}{24} + \frac{(18-24)^2}{24} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(32-24)^2}{24} + \frac{(32-24)^2}{24} = 9$$

dengan derajat kebebasan $df = 5 - 1 = 4$. Berdasarkan tabel, $\chi^2_{0.1}(4) = 6.251$ dan $\chi^2_{0.05}(4) = 9.488$. Karena $6.251 < 9 < 9.488$, ini berarti p-value dari uji yang dilakukan berada di antara 0.05 dan 0.1. Jadi, p-value bernilai lebih besar dari 0.05 **(A)**. ▼

Question 10

Rania memiliki raket pengusir nyamuk elektrik yang menggunakan satu baterai. Jika baterai yang digunakan mengalami kerusakan, Rania segera menggantinya dengan baterai baru. Diketahui *life time* baterai (dalam jam) terdistribusikan secara eksponensial dengan parameter $\lambda = 0.15$. Berapa kali Rania melakukan pembaharuan jika waktu memakai baterai sudah dilakukan selama 300 jam?

(A) 10

(B) 30

(C) 15

(D) 45

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

Misalkan X menyatakan variabel acak *life time* baterai dengan $X \sim Exp(\lambda) = Exp(0.15)$, maka $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.15}$. Rata-rata penggantian baterai dalam satuan jam adalah $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} = 0.15$. Jadi, banyaknya Rania melakukan pembaharuan jika waktu pemakai baterai sudah dilakukan selama 300 jam adalah $\frac{300}{\mathbb{E}[X]} = 300(0.15) = 45$ **(D)**. ▼