Soal dan Solusi UAS Struktur Aljabar II 2023

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Misalkan R adalah ring, J dan K masing-masing ideal di R, dengan $J \subseteq K$.

(a). Tunjukkan $\frac{K}{J} \subseteq \frac{R}{J}$.

(b). Tunjukkan $\frac{K}{J}$ ideal di $\frac{R}{J}$.

(c). Tunjukkan $\frac{R/J}{K/J}$ merupakan ring faktor. Didefinisikan pemetaan

$$\begin{aligned} \theta : \quad R/J &\to R/K \\ a + J &\mapsto \theta(a+J) = a + K. \end{aligned}$$

(d). Buktikan θ homomorfisma surjektif.

(e). Buktikan $\ker(\theta) = K/J$.

Penyelesaian.

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa J ideal di K. Cukup dibuktikan bahwa untuk setiap $j \in J$ dan $k \in K$ berlaku $jk, kj \in J$. Ambil sebarang $j \in J$ dan $k \in K$. Karena $K \subseteq R$, maka $k \in R$. Karena J ideal di R, maka $jk, kj \in J$ seperti yang ingin dibuktikan.

(a). Ambil sebarang $k + J \in \frac{K}{J}$ di mana $k \in K$. Karena $K \subseteq R$, maka $k \in R$ yang menunjukkan $k + J \in \frac{R}{J}$. Terbukti bahwa $\frac{K}{J} \subseteq \frac{R}{J}$.

(b). Karena J ideal di K dan J ideal di R, maka $\frac{K}{J}$ dan $\frac{R}{J}$ masing-masing membentuk ring faktor. Jelas bahwa $\frac{K}{J}$ tak kosong berdasarkan definisi ring. Ambil sebarang $k_1 + J, k_2 + J \in \frac{K}{J}$ di mana $k_1, k_2 \in K$. Perhatikan bahwa

$$(k_1 + J) - (k_2 + J) = (k_1 - k_2) + J \quad \text{dan} \quad (k_1 + J)(k_2 + J) = k_1k_2 + J.$$

Karena K ideal di R, maka $k_1 - k_2 \in K$ dan $k_1k_2 \in K$ yang menunjukkan $(k_1 + J) - (k_2 + J) \in \frac{K}{J}$ dan $(k_1 + J)(k_2 + J) \in \frac{K}{J}$. Jadi, $\frac{K}{J}$ subring dari $\frac{R}{J}$. Ambil sebarang $k + J \in \frac{K}{J}$ dan $r + J \in \frac{R}{J}$ di mana $k \in K$ dan $r \in R$. Maka

$$(k + J)(r + J) = kr + J \quad \text{dan} \quad (r + J)(k + J) = rk + J.$$

Karena K ideal di R, maka $kr, rk \in K$ yang menunjukkan $(k+J)(r+J) \in \frac{K}{J}$ dan $(r+J)(k+J) \in \frac{K}{J}$. Terbukti bahwa $\frac{K}{J}$ ideal di $\frac{R}{J}$.

(c). Karena $\frac{K}{J}$ ideal di $\frac{R}{J}$, maka $\frac{R/J}{K/J}$ membentuk ring faktor, terbukti.

(d). Akan dibuktikan θ well-defined. Ambil sebarang $x+J \in \frac{R}{j}$ dan $y+J \in \frac{R}{J}$ yang memenuhi $x+J = y+J$ di mana $x, y \in R$. Ini berarti $x-y \in J$ dan karena $J \subseteq K$ memberikan $x-y \in K \iff x+K = y+K$. Dari sini diperoleh

$$\theta(x+J) = x+K = y+K = \theta(y+J) \implies \theta(x+J) = \theta(y+J)$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Akan dibuktikan θ surjektif. Ambil sebarang $r+K \in \frac{R}{K}$ di mana $r \in R$, tinjau terdapat $r+J \in \frac{R}{J}$ sedemikian sehingga $\theta(r+J) = r+K$ sehingga terbukti bahwa θ surjektif.

Akan dibuktikan θ homomorfisma. Ambil sebarang $a+J, b+J \in \frac{R}{J}$ di mana $a, b \in R$. Ini berarti

$$\theta\Big((a+J)+(b+J)\Big) = \theta\Big((a+b)+J\Big) = (a+b)+K = (a+K)+(b+K) = \theta(a+J)+\theta(b+J).$$

Di sisi lain,

$$\theta\Big((a+J)(b+J)\Big) = \theta(ab+J) = ab+K = (a+K)(b+K) = \theta(a+J)\theta(b+J).$$

Terbukti bahwa θ homomorfisma.

Jadi, terbukti bahwa θ merupakan homomorfisma surjektif.

(e). Ambil sebarang $x+J \in \ker(\theta)$ di mana $x \in R$. Tinjau bahwa 0_R+K merupakan elemen nol di $\frac{R}{K}$, ini berarti

$$0_R+K = \theta(x+J) = x+K \implies 0_R+K = x+K \iff x-0_R \in K \iff x \in K.$$

Ini berarti $x+J \in \frac{K}{J}$ sehingga diperoleh $\ker(\theta) \subseteq \frac{K}{J}$.

Ambil sebarang $k+J \in \frac{K}{J}$ di mana $k \in K$. Ini berarti $\theta(k+J) = k+K = 0_R+K$ yang menunjukkan bahwa $k+J \in \ker(\theta)$. Jadi, $\frac{K}{J} \subseteq \ker(\theta)$.

Dari sini, terbukti bahwa $\ker(\theta) = \frac{K}{J}$.

▼

Question 2

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

(a). Tentukan semua ideal di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$.

(b). Tentukan semua ideal maksimal di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$. Jelaskan.

(c). Tentukan dua ideal yang bukan ideal prima di $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$. Jelaskan.

Penyelesaian.

Teorema. Misalkan A dan B masing-masing merupakan ring dengan elemen satuan. Maka semua ideal dari $A \times B$ berbentuk $I \times J$ di mana I ideal dari A dan J ideal dari B.

Teorema. Semua ideal dari $\mathbb{Z}_n$ berbentuk $k\mathbb{Z}_n$ di mana k merupakan faktor positif dari n.

(a). Perhatikan bahwa $\mathbb{Z}_6$ dan $\mathbb{Z}_2$ merupakan ring dengan elemen satuan, yaitu $1_{\mathbb{Z}_6} = \overline{1}$ dan $1_{\mathbb{Z}_2} = \overline{1}$ sehingga teorema di atas dapat diterapkan. Perhatikan bahwa ideal dari $\mathbb{Z}_6$ adalah

$$A_1 = 1\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6, \quad A_2 = 2\mathbb{Z}_6 = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\right\}, \quad A_3 = 3\mathbb{Z}_6 = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\}, \quad A_4 = 6\mathbb{Z}_6 = \left\{\overline{0}\right\}.$$

Semua ideal dari $\mathbb{Z}_2$ adalah $B_1 = 1\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$ dan $B_2 = 2\mathbb{Z}_2 = \left\{\overline{0}\right\}$. Maka semua ideal dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ berbentuk $A_i \times B_j$ di mana $i \in \{1, 2, 3\}$ dan $j \in \{1, 2\}$, yaitu:

$$\begin{aligned}
S_1 &= A_1 \times B_1 = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 \\
S_2 &= A_1 \times B_2 = \mathbb{Z}_6 \times \left\{\overline{0}\right\} = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{1}, \overline{0}\right), \left(\overline{2}, \overline{0}\right), \left(\overline{3}, \overline{0}\right), \left(\overline{4}, \overline{0}\right), \left(\overline{5}, \overline{0}\right)\right\} \\
S_3 &= A_2 \times B_1 = 2\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{1}\right), \left(\overline{2}, \overline{0}\right), \left(\overline{2}, \overline{1}\right), \left(\overline{4}, \overline{0}\right), \left(\overline{4}, \overline{1}\right)\right\} \\
S_4 &= A_2 \times B_2 = 2\mathbb{Z}_6 \times \left\{\overline{0}\right\} = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{2}, \overline{0}\right), \left(\overline{4}, \overline{0}\right)\right\} \\
S_5 &= A_3 \times B_1 = 3\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2 = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{1}\right), \left(\overline{3}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{1}\right)\right\} \\
S_6 &= A_3 \times B_2 = 3\mathbb{Z}_6 \times \left\{\overline{0}\right\} = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{3}, \overline{0}\right)\right\} \\
S_7 &= A_4 \times B_1 = \left\{\overline{0}\right\} \times \mathbb{Z}_2 = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{1}\right)\right\} \\
S_8 &= A_4 \times B_2 = \left\{\overline{0}\right\} \times \left\{\overline{0}\right\} = \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right)\right\}
\end{aligned}$$

(b). Jelas S_6, S_7, S_8 bukan ideal maksimal karena $S_6, S_7, S_8 \subset S_5 \subset \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$.
Jelas S_4 bukan ideal maksimal kanrea $S_4 \subset S_3 \subset \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$.
Sisanya, S_2, S_3, S_5 tidak termuat dalam subhimpunan sejati lain dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$. Jadi, S_2, S_3, S_5 merupakan ideal maksimal.

(c). Tinjau S_8 bukan ideal prima karena $\left(\overline{0}, \overline{0}\right) = \left(\overline{2}, \overline{0}\right)\left(\overline{3}, \overline{0}\right)$, namun $\left(\overline{2}, \overline{0}\right), \left(\overline{3}, \overline{0}\right) \notin S_8$.
Tinjau S_7 bukan ideal prima karena $\left(\overline{0}, \overline{0}\right) = \left(\overline{2}, \overline{0}\right)\left(\overline{3}, \overline{0}\right)$, namun $\left(\overline{2}, \overline{0}\right), \left(\overline{3}, \overline{0}\right) \notin S_7$.

Question 3

Buktikan bahwa setiap field merupakan ring Euclid.

Penyelesaian.

Misalkan F merupakan field dan $f : F - \{0_F\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ dengan $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in F$.
Akan dibuktikan f well-defined. Ambil sebarang $x, y \in F$ dengan $x = y$, tinjau $d(x) = 1 = d(y) \implies d(x) = d(y)$, terbukti.
Ambil sebarang $a, b \in F - \{0_F\}$, tinjau $d(ab) = 1 \geq 1 = d(a) \implies d(ab) \geq d(a)$.
Ambil sebarang $a \in F$ dan $b \in F - \{0_F\}$. Karena $b \neq 0_F$, maka b merupakan unit sehingga b^{-1} ada di F. Tinjau bahwa

$$a = 1_F a = \left(bb^{-1}\right) a + 0_F = b\left(b^{-1}a\right) + 0_F.$$

Ini membuktikan bahwa terdapat $q, r \in F$ dengan $q = b^{-1}a$ dan $r = 0_F$ yang memenuhi $a = bq + r$.
Jadi, terbukti F merupakan ruang Euclid. ▼