Soal dan Solusi UTS Struktur Aljabar I 2023

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Diberikan suatu himpunan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ dengan operasi pergandaan $\bigotimes$ sebagai berikut:

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(c + d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Selidiki apakah $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], \bigotimes\right)$ merupakan grup? Jika bukan grup, apakah struktur aljabar merupakan semigrup atau monoid? Berikan penjelasannya

Penyelesaian.

Akan ditunjukkan bahwa $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], \bigotimes\right)$ monoid, namun tidak membentuk grup. Jelas $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ tak kosong karena $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.

- Akan dibuktikan $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], \bigotimes\right)$ bersifat tertutup. Ambil sebarang $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ di mana $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Diperoleh

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}.$$

  Karena $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$, maka $a_1a_2 + 2b_1b_2 \in \mathbb{Q}$ dan $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Q}$ sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) &= (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \\ \Longrightarrow \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) &\in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]. \end{aligned}$$

  Jadi, $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], \bigotimes\right)$ tertutup.

- Akan dibuktikan $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], \bigotimes\right)$ bersifat asosiatif. Ambil sebarang $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2}, a_3 + b_3\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ di mana $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Q}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} &\left(\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right)\right) \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right) \\ &= \left((a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right) \\ &= (a_1a_2 + 2b_1b_2)a_3 + 2(a_1b_2 + a_2b_1)b_3 + \left((a_1a_2 + 2b_1b_2)b_3 + (a_1b_2 + a_2b_1)a_3\right)\sqrt{2} \\ &= (a_1a_2a_3 + 2a_3b_1b_2 + 2a_1b_2b_3 + 2a_2b_1b_3) + (a_1a_2a_3 + 2b_1b_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

  Lakukan perhitungan yang sama dan diperoleh

$$\begin{aligned} &\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(\left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right)\right) \\ &= (a_1a_2a_3 + 2a_3b_1b_2 + 2a_1b_2b_3 + 2a_2b_1b_3) + (a_1a_2a_3 + 2b_1b_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Jadi, $\left(\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\right)\bigotimes\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\right)$ sehingga berlaku sifat asosiatif.

- Perhatikan bahwa $1=1+0\sqrt{2}$ elemen identitas di $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right],\bigotimes\right)$ karena untuk sebarang $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ berlaku

$$\begin{aligned}\left(1+0\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a+b\sqrt{2}\right)&=(1\cdot a+0\cdot b)+(1\cdot b+0\cdot a)\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\\\left(a+b\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(1+0\sqrt{2}\right)&=(a\cdot 1+b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 1)\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}.\end{aligned}$$

- Tinjau untuk sebarang $a+b\sqrt{2}$ berlaku

$$\left(0+0\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a+b\sqrt{2}\right)=(0\cdot a+0\cdot b)+(0\cdot b+0\cdot a)\sqrt{2}=0.$$

  Artinya, tidak terdapat $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ sedemikian sehingga $0\bigotimes\left(a+b\sqrt{2}\right)=1$. Jadi, 0 tidak memiliki invers.

Karena sifat yang terpenuhi adalah sifat tertutup, asosiatif, dan terdapat elemen identitas di $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right],\bigotimes\right)$, maka $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right],\bigotimes\right)$ merupakan monoid. ▼

Question 2

Diberikan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \right\}$ dan $(M, \times)$ membentuk grup. Jika $N = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix} \middle| \ p, q, r \in \mathbb{R}, pr \neq 0 \right\}$. Tunjukkan bahwa N merupakan subgrup dari M.

Penyelesaian.

Tinjau bahwa setiap anggota N merupakan anggota M karena anggota N dapat diperoleh dengan mensubtitusikan $a = p, b = 0, c = q, d = r$ serta terpenuhi $ad = pr \neq 0 = bc$, jadi $N \subset M$. Selain itu, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ karena $1 \cdot 1 \neq 0$ sehingga N tak kosong. Ambil sebarang $a, b \in N$, misalkan $a = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ q_1 & r_1 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ q_2 & r_2 \end{pmatrix}$ di mana $p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ dan $p_1 r_1, p_2 r_2 \neq 0$. Artinya, $p_1, r_1, p_2, r_2 \neq 0$. Maka

$$ab = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ q_1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2 & 0 \\ q_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 p_2 & 0 \\ p_2 q_1 + q_2 r_1 & r_1 r_2 \end{pmatrix}.$$

Karena $p_1 p_2, r_1 r_2, p_2 q_1 + q_2 r_1 \in \mathbb{R}$ dan $p_1 p_2 r_1 r_2 \neq 0$, maka $ab \in N$. Selain itu, tinjau sebarang $\begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix} \in N$ berlaku $\begin{vmatrix} p & 0 \\ q & r \end{vmatrix} = pr - q \cdot 0 = pr \neq 0$, maka setiap anggota dari N merupakan matriks invertible. Sehingga diperoleh untuk sebarang $a = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix} \in N$ berlaku

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & r \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{pr - q \cdot 0} \begin{pmatrix} r & 0 \\ -q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r}{pr} & \frac{0}{pr} \\ -\frac{q}{pr} & \frac{p}{pr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ -\frac{q}{pr} & \frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Karena $pr \neq 0 \implies p, r \neq 0$, maka $\frac{1}{p}, -\frac{q}{pr}, \frac{1}{r} \in \mathbb{R}$ dan $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{pr} \neq 0$. Jadi, $a^{-1} \in N$. Karena N bersifat tertutup dan setiap elemennya memiliki invers, maka N subgrup dari M. ▼

Question 3

Diketahui grup $G = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dengan operasi perkalian modulo 14, dinotaiskan $\times_{14}$, sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a \times_{14} b = ab \pmod{14}$.

(a). Tentukan elemen invers dari setiap elemen G. Berikan penjelasannya.

(b). Tentukan semua generator yang mungkin dalam G. Jelaskan alasannya.

(c). Tentukan sebuah subgrup beroder 3 dari G, kemudian tentukan koset dari subgrup tersebut pada G.

Penyelesaian.

Tabel berikut menunjukkan bahwa 8 merupakan elemen identitas di $(G, \times_{14})$.

$\times_{14}$	2	4	6	8	10	12
2	4	8	12	2	6	10
4	8	2	10	4	12	6
6	12	10	8	6	4	2
8	2	4	6	8	10	12
10	6	12	4	10	2	8
12	10	6	2	12	8	4

(a). Elemen invers dari a, yaitu a^{-1}, yang memenuhi sifat $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ di mana e elemen identitas di grup tersebut. Oleh karena itu, elemen invers untuk setiap $a \in G$ diperoleh dengan meninjau $aa^{-1} = 8 = a^{-1}a$. Sehingga diperoleh $2^{-1} = 4, 4^{-1} = 2, 6^{-1} = 6, 8^{-1} = 8, 10^{-1} = 12$, dan $12^{-1} = 10$.

(b). Tinjau $10^1 = 10, 10^2 = 2, 10^3 = 6, 10^4 = 4, 10^5 = 12$, dan $10^6 = 8$. Artinya, $\langle 10 \rangle = G$ sehingga G grup siklis. Selain itu, tinjau $o(G) = 6$ dan $o(10) = 6$. Sehingga semua pembangun dari G adalah 10^m di mana $m \leq 6$ dan relatif prima dengan 6. Jadi, semua pembangun dari G adalah $10^1 = 10$ dan $10^5 = 12$.

(c). Tinjau bahwa $A = \{2, 4, 8\}$ merupakan subgrup dari G karena memenuhi sifat tertutup dan masing-masing elemen A memiliki invers di A, yakni $2^{-1} = 4, 4^{-1} = 2$, dan $8^{-1} = 8$. Karena

$\times_{14}$	2	4	8
2	4	8	2
4	8	2	4
8	2	4	8

$\times_{14}$ bersifat komutatif, maka koset kanan dan koset kiri akan sama sehingga cukup diperlihatkan koset kiri dari A dalam G.

$$
\begin{aligned}
2 \times_{14} A &= \{4, 8, 2\} \\
4 \times_{14} A &= \{8, 2, 4\} \\
6 \times_{14} A &= \{12, 10, 6\} \\
8 \times_{14} A &= \{2, 4, 8\} \\
10 \times_{14} A &= \{6, 12, 8\} \\
12 \times_{14} A &= \{10, 6, 12\}.
\end{aligned}
$$

Jadi, semua koset dari subgrup A adalah $\{2, 4, 8\}$ dan $\{6, 10, 12\}$.

▼