# Soal dan Solusi UTS Struktur Aljabar I 2022

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

**Question 1**

Diberikan himpunan $G = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{R} \text{ dan } m, n \text{ tidak keduanya } 0 \right\}$. Buktikan bahwa himpunan $G$ terhadap operasi perkalian matriks membentuk grup abelian (grup komutatif).

**Penyelesaian.**

Akan dibuktikan $G$ merupakan grup. Perhatikan bahwa $m, n \in \mathbb{R}$ tidak keduanya nol ekuivalen dengan $m, n \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $m^2 + n^2 > 0$ (kondisi $m^2 + n^2 = 0$ jika dan hanya jika $m = n = 0$).

- Akan dibuktikan $(G, \times)$ tertutup. Ambil sebarang $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in G$ di mana $m^2+n^2 > 0$ dan $x^2 + y^2 > 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx - ny & my + nx \\ -nx - my & -ny + mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx - ny & my + nx \\ -(my + nx) & mx - ny \end{pmatrix} \in G,$$

terbukti.

- Akan dibuktikan berlaku sifat asosiatif. Ambil sebarang $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ di mana $m^2 + n^2 > 0$, $x^2 + y^2 > 0$, dan $a^2 + b^2 > 0$. Maka

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} mx - ny & my + nx \\ -(my + nx) & mx - ny \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (mx - ny)a - (my + nx)b & (mx - ny)b + (my + nx)a \\ -(my + nx)a - (mx - ny)b & -(my + nx)b + (mx - ny)a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m(ax - by) + n(-ay - bx) & m(ay + bx) + n(ax - by) \\ -m(ay + bx) - n(ax - by) & m(ax - by) + n(-ay - bx) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax - by & bx + ay \\ -ay - bx & ax - by \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right],
\end{aligned}$$

terbukti.

- Akan dibuktikan $(G, \times)$ memiliki elemen identitas. Tinjau $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ merupakan elemen identitas di $G$ karena untuk setiap $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \in G$ dengan $m, n \in \mathbb{R}$ dan $m^2 + n^2 > 0$ memenuhi

$$\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix}.$$

  Terbukti $G$ merupakan elemen identitas, yaitu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Akan dibuktikan setiap elemen di $G$ memiliki invers. Ambil sebarang $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \in G$ di mana $m, n \in \mathbb{R}$ dengan $m^2 + n^2 > 0$. Karena $m^2 + n^2 \neq 0$, maka $\frac{m}{m^2+n^2}, \pm\frac{n}{m^2+n^2} \in \mathbb{R}$. Selain itu,

$$\left(\frac{m}{m^2 + n^2}\right)^2 + \left(\frac{n}{m^2 + n^2}\right)^2 = \frac{1}{m^2 + n^2} > 0.$$

  Ini berarti $\begin{pmatrix} \frac{m}{m^2+n^2} & -\frac{n}{m^2+n^2} \\ \frac{n}{m^2+n^2} & \frac{m}{m^2+n^2} \end{pmatrix} \in G$ dan memenuhi

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{m^2+n^2} & -\frac{n}{m^2+n^2} \\ \frac{n}{m^2+n^2} & \frac{m}{m^2+n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{m}{m^2+n^2} & -\frac{n}{m^2+n^2} \\ \frac{n}{m^2+n^2} & \frac{m}{m^2+n^2} \end{pmatrix}.$$

  Jadi, $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m^2+n^2} & -\frac{n}{m^2+n^2} \\ \frac{n}{m^2+n^2} & \frac{m}{m^2+n^2} \end{pmatrix}$ yang membuktikan setiap elemen di $G$ memiliki invers.

Jadi, $G$ merupakan grup. Terlebih lagi, untuk setiap $\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ dengan $m, n, x, y \in \mathbb{R}$, $m^2 + n^2 > 0$, dan $x^2 + y^2 > 0$ berlaku

$$\begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx - ny & my + nx \\ -(my + nx) & mx - ny \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ -n & m \end{pmatrix}$$

yang berarti $G$ abelian. Terbukti $G$ merupakan grup abelian. ▼

**Question 2**

Misalkan $H$ dan $K$ keduanya merupakan subgrup dari grup $G$. Buktikan bahwa $H \cup K$ adalah subgrup dari $G$ jika dan hanya jika $H \subseteq K$ atau $K \subseteq H$.

**Penyelesaian.**

($\Leftarrow$) Jika $H \subseteq K$ atau $K \subseteq H$, akan dibuktikan bahwa $H \cup K$ subgrup dari $G$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $H \subseteq K$. Maka berlaku $H \cup K = K$ yang jelas subgrup dari $G$.

($\Rightarrow$) Jika $H \cup K$ subgrup dari $G$, akan dibuktikan bahwa $H \subseteq K$ atau $K \subseteq H$. Andaikan $H \nsubseteq K$ dan $K \nsubseteq H$, ini berarti $H \setminus K$ dan $K \setminus H$ masing-masing tak kosong. Misalkan $x \in H \setminus K$ dan $y \in K \setminus H$, jelas bahwa $x, y \in H \cup K$. Karena $H \cup K$ subgrup dari $G$, maka $xy \in H \cup K$. Maka berlaku $xy \in H$ atau $xy \in K$.

Misalkan $xy \in H$. Karena $x \in H \setminus K \implies x \in H$ dan $H$ merupakan subgrup dari $G$, maka $x^{-1} \in H$. Ini berarti $y = ey = \left(x^{-1}x\right) y = x^{-1}(xy) \in H$, namun ini kontradiksi karena $y \in K \setminus H$. Secara analog, jika $xy \in K$ akan diperoleh $x \in K$ yang mana kontradiksi. Jadi, haruslah $H \subseteq K$ atau $K \subseteq H$. ▼

**Question 3**

Diberikan himpunan $A = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ dan $B = \{\overline{0}, \overline{2}\} \subseteq \mathbb{Z}_4$. Definisikan operasi $\bigoplus$ pada grup $A \times B$, sebagai berikut:

$$(m, n) \bigoplus (p, q) = (m + p, n + q)$$

untuk setiap $(m, n), (p, q) \in A \times B$.

(a). Tentukan semua anggota dari $A \times B$.

(b). Hitunglah semua order elemen di $A \times B$.

(c). Carilah 2 subgrup sejati dari $A \times B$.

(d). Periksa apakah $(A \times B, \bigoplus)$ merupakan grup siklik. Jika benar merupakan grup siklik, sebutkan semua unsur yang merupakan pembangun atau generator di $A \times B$.

**Penyelesaian.**

(a). $A \times B = \left\{ \left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{2}\right), \left(\overline{2}, \overline{0}\right), \left(\overline{2}, \overline{2}\right), \left(\overline{4}, \overline{0}\right), \left(\overline{4}, \overline{2}\right) \right\}$.

(b). Tinjau bahwa $\left(\overline{0}, \overline{0}\right)$ merupakan elemen identitas di $G := A \times B$ karena $\left(\overline{0}, \overline{0}\right) \bigoplus \left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{a}, \overline{b}\right) \bigoplus \left(\overline{0}, \overline{0}\right)$ untuk setiap $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in G$. Ini berarti elemen $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) \in G$ memiliki order $n$ apabila $n$ bilangan asli terkecil yang memenuhi $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)^n = \left(n\overline{a}, n\overline{b}\right)$. Dari sini diperoleh $o\left(\left(\overline{0}, \overline{0}\right)\right) = 1$, $o\left(\left(\overline{0}, \overline{2}\right)\right) = 2$, $o\left(\left(\overline{2}, \overline{0}\right)\right) = 3$, $o\left(\left(\overline{2}, \overline{2}\right)\right) = 6$, $o\left(\left(\overline{4}, \overline{0}\right)\right) = 3$, dan $o\left(\left(\overline{4}, \overline{2}\right)\right) = 6$.
**Catatan.** Penentuan order dapat ditinjau dengan $o\left(\left(\overline{a}, \overline{b}\right)\right) = \text{kpk}(o(a), o(b))$. Dapat dibuktikan sebagai berikut, misalkan $o\left(\left(\left(\overline{a}, \overline{b}\right)\right) = n$, maka $\left(n\overline{a}, n\overline{b}\right) = \left(\left(\overline{0}, \overline{0}\right)\right.$. Ini berarti $n\overline{a} = \overline{0}$ dan $n\overline{b} = \overline{0}$ yang berarti $o(a) \mid n$ dan $o(b) \mid n$. Akibatnya, $\text{kpk}(o(a), o(b)) \mid n$. Di sisi lain,

$$o\left(\left(\left(\overline{a}, \overline{b}\right)\right)^{\text{kpk}(o(a), o(b))} = \left(\text{kpk}(o(a), o(b))\overline{a}, \text{kpk}(o(a), o(b))\overline{b}\right) = \left(\left(\overline{0}, \overline{0}\right)\right.$$

karena $o(a), o(b) \mid \text{kpk}(o(a), o(b))$. Jadi, $n = \text{kpk}(o(a), o(b))$.

(c). Tinjau $A_1 = \left\{ \left(\overline{0}, \overline{0}\right) \right\} \subseteq G$ merupakan subgrup dari $G$ karena $\left(\overline{0}, \overline{0}\right) \bigoplus \left(\overline{0}, \overline{0}\right) = \left(\overline{0}, \overline{0}\right) \in G$ dan $\left(\overline{0}, \overline{0}\right)^{-1} = \left(\overline{0}, \overline{0}\right) \in G$.
Tinjau $A_2 = \left\{ \left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{2}\right) \right\} \subseteq G$ dan perhatikan tabel berikut.

| $\bigoplus$ | $\left(\overline{0}, \overline{0}\right)$ | $\left(\overline{0}, \overline{2}\right)$ |
|---|---|---|
| $\left(\overline{0}, \overline{0}\right)$ | $\left(\overline{0}, \overline{0}\right)$ | $\left(\overline{0}, \overline{2}\right)$ |
| $\left(\overline{0}, \overline{2}\right)$ | $\left(\overline{0}, \overline{2}\right)$ | $\left(\overline{0}, \overline{0}\right)$ |

Berlaku sifat tertutup pada $(A_2, \bigoplus)$, kemudian $\left(\overline{0}, \overline{0}\right)^{-1} = \left(\overline{0}, \overline{0}\right)$ dan $\left(\overline{0}, \overline{2}\right)^{-1} = \left(\overline{0}, \overline{2}\right)$ yang menunjukkan invers setiap elemennya di $G$. Jadi, $A_2$ subgrup dari $G$.
**Catatan.** Salah satu strategi untuk menentukan subgrup dari hasil kali kartesian dua grup dapat menggunakan fakta: jika $X$ subgrup adri $G$ dan $Y$ subgrup dari $H$, maka $X \times Y$ subgrup dari $G \times H$. Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(d). Ya. Pembaca dapat memverivikasinya dengan meninjau $\left\langle\left(\overline{a}, \overline{b}\right)\right\rangle$ untuk setiap $\left\langle\left(\overline{a}, \overline{b}\right)\right\rangle \in G$. Identifikasi lainnya dapat menggunakan lemma berikut.

**Lemma.** Jika $G$ grup berhingga dengan order $n$ dan terdapat $g \in G$ yang memenuhi $g^n = e$, maka $G$ grup siklis.

*Bukti.* Akan dibuktikan bahwa $\langle g\rangle = \left\{e, g, g^2, \cdots, g^{n-1}\right\} = G$. Andaikan $\langle g\rangle = G$, maka terdapat $1 \leq i < j \leq n-1$ yang memenuhi $g^i = t = g^j$ untuk suatu $t \in G$. Ini berarti $g^i = g^j \iff e = g^j g^{-i} = g^{j-i}$. Ini haruslah $o(g) \mid j-i \implies n \mid j-i$, kontradiksi karena $|j-i| \leq n-1$. Jadi, haruslah $\langle g\rangle = G$ yang berarti $G$ grup siklis.

Dari lemma dan (b), tinjau $o\left(\left(\overline{2}, \overline{2}\right)\right) = 6 = o\left(\left(\overline{4}, \overline{2}\right)\right)$ yang mana $o(A \times B) = 6$, ini berarti $A \times B$ grup siklis dengan dua elemen tersebut sebagai generatornya.

▼