Soal dan Solusi UAS Struktur Aljabar I 2023

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

(a). Diketahui grup $G = \left(\mathbb{Z}_7 - \{\overline{0}\}\right) \times \left(\mathbb{Z}_3 - \{\overline{0}\}\right)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian yang didefinisikan untuk setiap $(a, b), (c, d) \in G$ berlaku

$$(a, b) \cdot (c, d) = \Big((a \cdot c) \mod 7, (b \cdot d) \mod 3\Big)$$

dan subgrup $H = \left\{\left(\overline{1}, \overline{1}\right), \left(\overline{2}, \overline{2}\right), \left(\overline{4}, \overline{2}\right)\right\}$ dari G. Tentukan indeks H dalam G dan semua koset dari H dalam G. Berikan penjelasan.

(b). Misalkan $(G, *)$ merupakan grup dan himpunan center dari G, dinotasikan $Z(G)$, didefinisikan sebagai

$$Z(G) = \{x \in G \mid x * y = y * x, \forall\, y \in G\}.$$

Tunjukkan $Z(G)$ merupakan subgrup normal dari G.

Penyelesaian.

(a). Perhatikan tabel berikut.

	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{2})$	$(\overline{2},\overline{1})$	$(\overline{2},\overline{2})$	$(\overline{3},\overline{1})$	$(\overline{3},\overline{2})$	$(\overline{4},\overline{1})$	$(\overline{4},\overline{2})$	$(\overline{5},\overline{1})$	$(\overline{5},\overline{2})$	$(\overline{6},\overline{1})$	$(\overline{6},\overline{2})$
$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{2})$	$(\overline{2},\overline{1})$	$(\overline{2},\overline{2})$	$(\overline{3},\overline{1})$	$(\overline{3},\overline{2})$	$(\overline{4},\overline{1})$	$(\overline{4},\overline{2})$	$(\overline{5},\overline{1})$	$(\overline{5},\overline{2})$	$(\overline{6},\overline{1})$	$(\overline{6},\overline{2})$
$(\overline{2},\overline{2})$	$(\overline{2},\overline{2})$	$(\overline{2},\overline{1})$	$(\overline{4},\overline{2})$	$(\overline{4},\overline{1})$	$(\overline{6},\overline{2})$	$(\overline{6},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{2})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{3},\overline{2})$	$(\overline{3},\overline{1})$	$(\overline{5},\overline{2})$	$(\overline{5},\overline{1})$
$(\overline{4},\overline{2})$	$(\overline{4},\overline{2})$	$(\overline{4},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{2})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{5},\overline{2})$	$(\overline{5},\overline{1})$	$(\overline{2},\overline{2})$	$(\overline{2},\overline{1})$	$(\overline{6},\overline{2})$	$(\overline{6},\overline{1})$	$(\overline{3},\overline{2})$	$(\overline{3},\overline{1})$

Dari tabel diperoleh bahwa masing-masing koset kiri dari H dalam G saling berbeda, yaitu

$$\begin{aligned}
\left(\overline{1},\overline{1}\right)H &= \left\{\left(\overline{1},\overline{1}\right), \left(\overline{2},\overline{2}\right), \left(\overline{4},\overline{2}\right)\right\}, & \left(\overline{1},\overline{2}\right)H &= \left\{\left(\overline{1},\overline{2}\right), \left(\overline{2},\overline{1}\right), \left(\overline{4},\overline{1}\right)\right\}, \\
\left(\overline{2},\overline{1}\right)H &= \left\{\left(\overline{1},\overline{1}\right), \left(\overline{2},\overline{1}\right), \left(\overline{4},\overline{2}\right)\right\}, & \left(\overline{2},\overline{2}\right)H &= \left\{\left(\overline{1},\overline{1}\right), \left(\overline{2},\overline{2}\right), \left(\overline{4},\overline{1}\right)\right\}, \\
\left(\overline{3},\overline{1}\right)H &= \left\{\left(\overline{3},\overline{1}\right), \left(\overline{5},\overline{2}\right), \left(\overline{6},\overline{2}\right)\right\}, & \left(\overline{3},\overline{2}\right)H &= \left\{\left(\overline{3},\overline{2}\right), \left(\overline{5},\overline{1}\right), \left(\overline{6},\overline{1}\right)\right\}, \\
\left(\overline{4},\overline{1}\right)H &= \left\{\left(\overline{1},\overline{2}\right), \left(\overline{2},\overline{2}\right), \left(\overline{4},\overline{1}\right)\right\}, & \left(\overline{4},\overline{2}\right)H &= \left\{\left(\overline{1},\overline{1}\right), \left(\overline{2},\overline{1}\right), \left(\overline{4},\overline{2}\right)\right\}, \\
\left(\overline{5},\overline{1}\right)H &= \left\{\left(\overline{3},\overline{2}\right), \left(\overline{5},\overline{1}\right), \left(\overline{6},\overline{2}\right)\right\}, & \left(\overline{5},\overline{2}\right)H &= \left\{\left(\overline{3},\overline{1}\right), \left(\overline{5},\overline{2}\right), \left(\overline{6},\overline{1}\right)\right\} \\
\left(\overline{6},\overline{1}\right)H &= \left\{\left(\overline{3},\overline{2}\right), \left(\overline{5},\overline{2}\right), \left(\overline{6},\overline{1}\right)\right\}, & \left(\overline{6},\overline{2}\right)H &= \left\{\left(\overline{3},\overline{1}\right), \left(\overline{5},\overline{1}\right), \left(\overline{6},\overline{2}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Jadi, indeks H dalam G adalah 12.

(b). Misalkan e merupakan elemen identitas di G. Karena $ge = eg$ untuk setiap $g \in G$, maka $e \in Z(G)$. Artinya, $Z(G)$ tak kosong. Cukup jelas apabila $x \in Z(G)$ maka $x \in G$ berdasarkan definisi $Z(G)$. Akan dibuktikan $Z(G) \leq G$, tinjau untuk setiap $a, b \in Z(G)$ maka $ag = ga$ dan $bg = gb$ untuk setiap $g \in G$. Maka

$$\left(ab^{-1}\right) g = a \left(b^{-1}g\right) = a \left(g^{-1}b\right)^{-1} = a \left(bg^{-1}\right)^{-1} = a \left(gb^{-1}\right) = (ag)b^{-1} = (ga)b^{-1} = g \left(ab^{-1}\right).$$

Karena $\left(ab^{-1}\right) g = g \left(ab^{-1}\right)$, ini artinya $ab^{-1} \in Z(G)$. Hal ini menunjukkan $Z(G) \leq G$. Selanjutnya, akan dibuktikan $Z(G) \triangleleft G$. Tinjau untuk sebarang $z \in Z(G)$ dan $g, g' \in G$ berlaku

$$\left(gzg^{-1}\right) g' = (gz)\, g^{-1}g' = (zg)g^{-1}g' = z \left(gg^{-1}\right) g' = zeg' = zg' = g'z.$$

Selanjutnya, tinjau

$$g'z = g'ez = g' \left(gg^{-1}\right) z = g'g \left(g^{-1}z\right) = g'g \left(zg^{-1}\right) = g' \left(gzg^{-1}\right).$$

Hal ini menunjukkan $\left(gzg^{-1}\right) g' = g' \left(gzg^{-1}\right)$ untuk setiap $g' \in G$. Ini artinya $gzg^{-1} \in Z(G)$. Hal ini membuktikan bahwa $Z(G) \triangleleft G$.

▼

Question 2

(a). Misalkan $(G, \bigoplus)$ dan $(H, \bigodot)$ masing-masing merupakan suatu grup. Buktikan bahwa jika $\theta : G \to H$ merupakan suatu epimorfisma maka grup faktor $G/\ker(\theta)$ isomorfik dengan H'.

(b). Diketahui $3\mathbb{Z} = \langle 3 \rangle = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ dan $15\mathbb{Z} = \langle 15 \rangle = \{15x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ masing-masing merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. Tentukan elemen dari grup faktor $\frac{3\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}}$. Jelaskan.

(c). Diberikan grup bilangan bulat modulo 5, yaitu $(\mathbb{Z}_5, +)$. Gambarkan diagram isomorfisma yang mungkin dari $\frac{3\mathbb{Z}}{15\mathbb{Z}}$ ke $\mathbb{Z}_5$. Berikan penjelasan.

Penyelesaian.

(a). Akan ditunjukkan $\ker(\theta) \lhd G$, misalkan e_G dan e_H berturut-turut menyatakan elemen identitas di G dan H. Diketahui bahwa θ merupakan homomorfisma yang surjektif. Perhatikan bahwa $\theta(e_G) = e_H$ sehingga $e_G \in \ker(\theta)$ yang menunjukkan $\ker(\theta)$ tak kosong. Cukup jelas apabila $g \in \ker(\theta)$ berakibat $g \in G$ berdasarkan definisi kernel. Untuk sebarang $g \in \ker(\theta)$ dan sebarang $p \in G$, maka

$$\theta\left(gpg^{-1}\right) = \theta(gp)\theta\left(g^{-1}\right) = \theta(g)\theta(p)\theta(g)^{-1} = \theta(g)e_H\theta(g)^{-1} = \theta(g)\theta(g)^{-1} = e_H$$

yang menunjukkan $gpg^{-1} \in \ker(\theta)$. Jadi, terbukti $\ker(\theta) \lhd G$ sehingga dapat dibentuk $G/\ker(\theta)$. Misalkan $K = \ker(\theta)$. Tinjau pemetaan $\varphi : G/K \to H$ dengan $\varphi(gK) = \theta(g)$ untuk setiap $gK \in G/K$. Akan dibuktikan bahwa φ merupakan isomorfisma. Pertama, akan dibuktikan bahwa φ injektif, ambil sebarang $g_1K, g_2K \in G/K$ sedemikian sehingga $\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K)$. Maka

$$\theta(g_1) = \varphi(g_1K) = \varphi(g_2K) = \theta(g_2) \implies \theta(g_1) = \theta(g_2).$$

Dari sini diperoleh

$$e_H = \theta(g_2)^{-1}\theta(g_1) = \theta\left(g_2^{-1}\right)\theta\left(g_1\right) = \theta\left(g_2^{-1}g_1\right) \implies g_2^{-1}g_1 \in K.$$

Berdasarkan sifat koset, berlaku $g_1K = g_2K$ dan dapat disimpulkan bahwa φ injektif. Kedua, akan dibuktikan bahwa φ surjektif. Ambil sebarang $h \in H$. Karena θ surjektif, maka terdapat $g \in G$ sedemikian sehingga $\theta(g) = h$. Dari sini diperoleh $\theta(g) = \varphi(gK)$ yang menunjukkan $h = \varphi(gK)$. Ini artinya untuk setiap $h \in H$ terdapat $gK \in G/K$ sehingga $\varphi(gK) = h$ yang menunjukkan φ surjektif. Ketiga, akan dibuktikan φ homomorfisma. Ambil sebarang $xK, yK \in G/K$ di mana $x, y \in G$, maka

$$\varphi(xKyK) = \varphi(xyK) = \theta(xy) = \theta(x)\theta(y) = \varphi(xK)\varphi(yK)$$

yang menunjukkan φ homomorfisma. Jadi, φ merupakan isomorfisma dan dapat disimpulkan bahwa $G/K \cong H$ seperti yang ingin dibuktikan.

(b). Tinjau $3x + 15\mathbb{Z} \in 3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ di mana $x \in \mathbb{Z}$. Tulis $x = 5t + r$ di mana t, r bilangan bulat dan $0 \leq r \leq 4$. Diperoleh

$$3x + 15\mathbb{Z} = 3(5t + r) + 15\mathbb{Z} = 15t + 3r + 15\mathbb{Z} = 3r + (15t + 15\mathbb{Z}) = 3r + 15\mathbb{Z}.$$

Karena $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dapat disimpulkan bahwa

$$3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{15\mathbb{Z}, 3 + 15\mathbb{Z}, 6 + 15\mathbb{Z}, 9 + 15\mathbb{Z}, 12 + 15\mathbb{Z}\}.$$

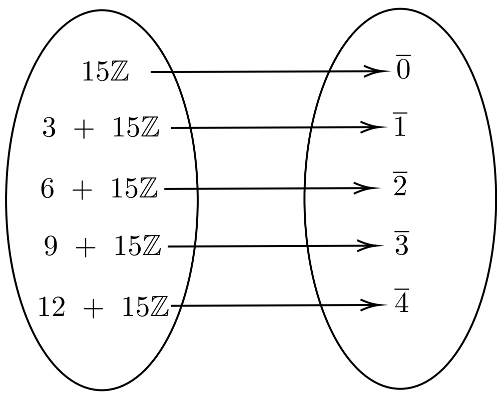
(c). Tinjau bahwa $15\mathbb{Z}$ merupakan elemen identitas di $3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dan $\overline{0}$ merupakan elemen identitas di $\mathbb{Z}_5$. Jadi, haruslah $15\mathbb{Z} \mapsto \overline{0}$. Selain itu, untuk $a \in 3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dan $b \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga $a \mapsto b$, maka $-a \mapsto -b$. Tinjau

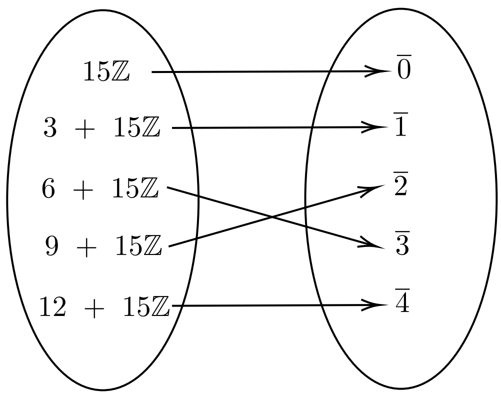
$$-(3+15\mathbb{Z}) = 12+15\mathbb{Z}, \quad -(12+15\mathbb{Z}) = 3+15\mathbb{Z}, \quad -(6+15\mathbb{Z}) = 9+15\mathbb{Z}, \quad -(9+15\mathbb{Z}) = 6+15\mathbb{Z},$$

$$-\overline{1} = \overline{4}, \quad -\overline{4} = \overline{1}, \quad -\overline{2} = \overline{3}, \quad -\overline{3} = \overline{2}.$$

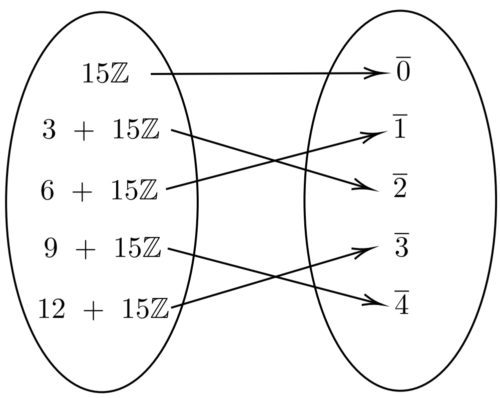
Kemudian tinjau juga apabila $a \mapsto b$ maka $o(a) = o(b)$ di mana $a \in 3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ dan $b \in \mathbb{Z}_5$. Tinjau bahwa dapat dicek order setiap elemen dari $\mathbb{Z}_5 - \{\overline{0}\}$ adalah 5, kemudian juga mudah dicek pula order setiap elemen dari $3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} - 15\mathbb{Z}$ juga 5.

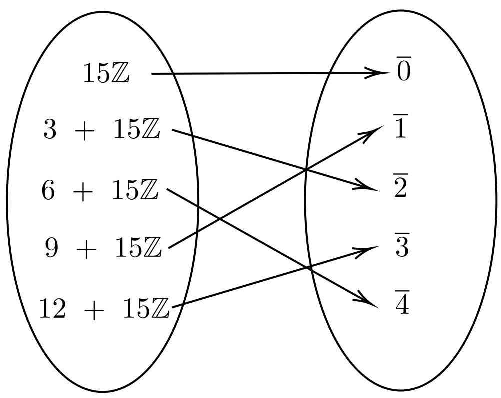
- Apabila $3 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{1}$, haruslah $12 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{4}$.
  Jika $6 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{2}$, maka $9 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{3}$. Begitu juga apabila $6 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{3}$, maka $9 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{2}$.



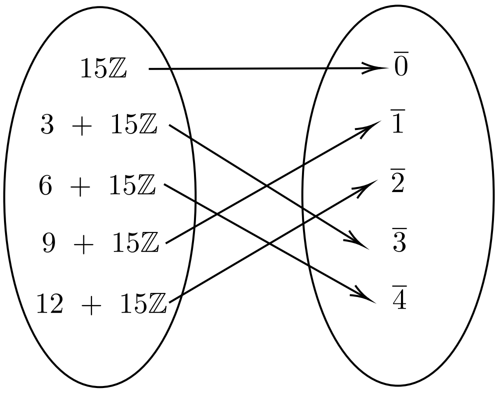


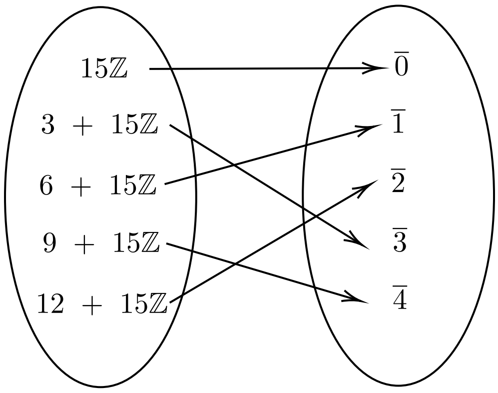
- Jika $3 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{2}$, haruslah $12 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{3}$.
  Jika $6 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{1}$, maka $9 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{4}$. Begitu juga apabila $6 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{4}$, maka $9 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{1}$.





- Jika $3 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{3}$, haruslah $12 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{2}$.
  Jika $6 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{1}$, maka $9 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{4}$. Begitu juga apabila $6 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{4}$, maka $9 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{1}$.





- Jika $3 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{4}$, haruslah $12 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{1}$.

  Jika $6 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{2}$, maka $9 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{3}$. Begitu juga apabila $6 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{3}$, maka $9 + 15\mathbb{Z} \mapsto \overline{2}$.