Soal dan Solusi UAS Struktur Aljabar I 2022

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Diketahui suatu grup $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, ad - bc \neq 0; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ dan

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, ac \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R}).$$

Periksa apakah H merupakan subgrup normal dari $GL_2(\mathbb{R})$. Berikan penjelasannya.

Penyelesaian.

Tidak. Tinjau $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ dan $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ karena $2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \neq 0$ dan $1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1 \neq 0$. Tinjau

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \notin H,$$

jadi H bukan subgrup normal $GL_2(\mathbb{R})$. ▼

Question 2

Diketahui dua buah grup terhadap operasi perkalian yang sesuai, yaitu

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\} \quad \text{dan} \quad \text{bilangan kompleks } -\{0\}.$$

Didefinisikan suatu fungsi

$$\varphi : G \to \mathbb{C}-\{0\} \quad \text{dengan} \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)=a+bi \quad \text{untuk setiap} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in G.$$

(a). Periksa apakah φ merupakan pemetaan injektif, surjektif, atau bijektif.

(b). Tunjukkan φ merupakan suatu homomorfisma.

(c). Tentukan kernel dari φ dan berikan penjelasannya.

Komentar. Soal aslinya adalah $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$ yang mana ini bukan grup (why?) Jadi, dalam pembahasan ini akan dimodifikasi sebagaimana soal di atas.

Penyelesaian.

(a). Akan dibuktikan φ injektif. Misalkan $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\in G$ yang memenuhi $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right)$. Dari sini diperoleh $a+bi=c+id$ yang memberikan $a=c$ dan $b=d$ mengingat $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Akibatnya, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ seperti yang ingin dibuktikan.

Akan dibuktikan φ surjektif. Ambil sebarang $x+iy\in\mathbb{C}-\{0\}$ di mana $x,y\in\mathbb{R}$. Ini berarti x dan y tidak keduanya nol yang berarti $x^2+y^2>0$. Tinjau bahwa $\varphi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right)=x+iy$ sehingga terbukti φ surjektif.

Karena φ injektif dan surjektif, maka φ bijektif.

(b). Ambil sebarang $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\in G$, maka

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}\right) \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
&= (a+ib)(c+id) \\
&= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Terbukti φ homomorfisma.

(c). Tinjau 1 unsur identitas di $(\mathbb{C} - \{0\}, \times)$ dan misalkan $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \ker\varphi$. Maka

$$1 = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + bi \implies a = 1, b = 0.$$

Jadi, $\ker\varphi = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Question 3

Diketahui grup himpunan bilangan bulat modulo 24, $\mathbb{Z}_{24}$, serta S dan J masing-masing merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_{24}$ dengan $S = \left\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}\right\}$ dan $J = \left\{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\right\}$. Definisikan $S + J = \{s + j \mid s \in S, j \in J\}$.

(a). Tentukan semua elemen dalam grup faktor $\frac{S+J}{J}$ dan $\frac{S}{S \cap J}$.

(b). Gambarkan kondisi isomorfisma yang mungkin dari $\frac{S+J}{J}$ ke $\frac{S}{S \cap J}$ dalam diagram panah. Berikan penjelasannya.