Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Pengantar Peluang

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

1 Sebuah ujian berjenis pilihan ganda memiliki total 10 pertanyaan, di mana setiap pertanyaan terdiri atas 5 pilihan jawaban (dengan tepat satu jawaban yang benar untuk masing-masing pertanyaan). Seorang siswa mengambil ujian tersebut dan diminta untuk menjawab seluruh pertanyaan di dalamnya. Berapa probabilitas bahwa siswa tersebut mendapatkan sedikitnya jumlah jawaban yang benar sama seperti yang dia harapkan apabila ia menjawab seluruh pertanyaan secara acak.

2 Misalkan X merupakan variabel acak dengan fungsi pembangkit moment sebagai berikut.

$$M_X(t) = \frac{e^{at}}{1 - bt^2}, \quad -1 < t < 1.$$

Jika diketahui mean dari variabel acak X sebesar 2 dan variansinya sebesar 4, maka tentukan nilai dari $a - b$.

3 Satu kartu diambil berturut-turut secara acak dari setumpuk kartu bridge yang berjumlah 52 buah tanpa pengembalian. (Pengambilannya satu demi satu tanpa dikembalikan)
Jika X peubah acak menyatakan banyaknya kartu As yang terambil pada pengambilan kartu pertama, Y peubah acak menyatakan total kartu As yang terambil setelah pengambilan kartu yang kedua. Berikut FKP gabungan $f(x, y)$ yang belum lengkap.

$f(x,y)$		$y=0$	$y=1$	$y=2$
x	0	A	B	C
	1	D	$\frac{16}{221}$	E

Penjelasan: $f(1,1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$, yakni peluang kartu As yang terambil saat pengambilan pertama adalah satu buah dan total kartu As yang terambil setelah pengambilan kartu kedua sejumlah 1 buah:

$$f(1,1) = f(x = 1)f(y = 1 \mid x = 1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} = \frac{16}{221}.$$

(a) Lengkapi tabel FKP gabungan di atas yakni nilai-nilai dari A, B, C, D, dan E.

(b) Lengkapi juga FKP marginal untuk peubah acak X dan Y.

(c) Hitung $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.

4 Mbak Taylor tiba di halte bus dekat toko buku pada siang hari. Dia mengetahui waktu yang dibutuhkan (jam) hingga bus datang merupakan variabel acak X yang berdistribusi uniform $U\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Di sisi lain, BMKG menyatakan bahwa hujan akan turun pada suatu waktu di siang hari, dan waktu yang dibutuhkan (jam) hingga turun hujan adalah variabel acak Y yang berdistribusi $Exp(2)$.

(a) Dapatkan fungsi peluang gabungan $f(x, y)$.

(b) Hitung peluang akan turun hujan sebelum bus datang.

SOAL NOMOR

1

Sebuah ujian berjenis pilihan ganda memiliki total 10 pertanyaan, di mana setiap pertanyaan terdiri atas 5 pilihan jawaban (dengan tepat satu jawaban yang benar untuk masing-masing pertanyaan). Seorang siswa mengambil ujian tersebut dan diminta untuk menjawab seluruh pertanyaan di dalamnya. Berapa probabilitas bahwa siswa tersebut mendapatkan sedikitnya jumlah jawaban yang benar sama seperti yang dia harapkan apabila ia menjawab seluruh pertanyaan secara acak.

Solusi:

Misalkan X menyatakan variabel acak banyaknya jawaban yang benar. Akan ditentukan $\mathbb{P}(X = n)$ di mana n bilangan bulat dan $0 \le n \le 10$. Peluang menjawab sebuah soal dengan benar adalah $p = \frac{1}{5}$, sedangkan peluang menjawab sebuah soal dengan salah adalah $1 - p = \frac{4}{5}$. Apabila menjawab benar sebanyak n, maka banyak soal yang dijawab salah adalah $10 - n$. Meningat banyaknya kombinasi soal benar-salah adalah $\binom{10}{n}$, maka

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{10}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{5}}_{n} \cdot \underbrace{\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5}}_{10-n} = \binom{10}{n} \cdot \frac{1}{5^n} \cdot \frac{4^{10-n}}{5^{10-n}} = \frac{1}{5^{10}} \binom{10}{n} 4^{10-n}$$

untuk $n = 0, 1, \cdots, 10$, serta $\mathbb{P}(X = n) = 0$ untuk n selainnya. Dengan kata lain, $X \sim Bin\left(10, \frac{1}{5}\right)$ sehingga $\mathbb{E}[X] = np = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$. Jadi, akan ditentukan $\mathbb{P}(X \ge 2) = 1 - \mathbb{P}(X \le 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$, yaitu

$$\mathbb{P}(X \ge 2) = 1 - \frac{1}{5^{10}} \binom{10}{0} 4^{10} - \frac{1}{5^{10}} \binom{10}{1} 4^9 = \frac{5^{10} - 4^{10} - 10 \cdot 4^9}{5^{10}} = \boxed{\frac{5^{10} - 14 \cdot 4^9}{5^{10}}}.$$

SOAL NOMOR

2

Misalkan X merupakan variabel acak dengan fungsi pembangkit moment sebagai berikut.

$$M_X(t) = \frac{e^{at}}{1-bt^2}, \quad -1 < t < 1.$$

Jika diketahui mean dari variabel acak X sebesar 2 dan variansinya sebesar 4, maka tentukan nilai dari $a-b$.

Solusi:

Ingat bahwa untuk r bilangan asli berlaku $\mathbb{E}\left[X^r\right] = M^{(r)}(0)$. Akan ditentukan $2 = \mathbb{E}[X] = M'(0)$. Tinjau

$$M'(t) = \frac{ae^{at}\left(1-bt^2\right) - e^{at}(0-2bt)}{\left(1-bt^2\right)^2} = \frac{ae^{at}\left(1-bt^2\right) + 2bte^{at}}{\left(1-bt^2\right)^2}.$$

Diperoleh $2 = M'(0) = \dfrac{a \cdot 1 \cdot (1-0) + 0}{(1-0)^2} = a$. Akan ditentukan $\mathbb{E}\left[X^2\right] = M''(0)$. Tinjau

$$\begin{aligned} M''(t) &= \frac{\left(a^2e^{at}\left(1-bt^2\right) + ae^{at}(-2bt) + 2be^{at} + 2abte^{at}\right)\left(1-bt^2\right)^2}{(1-bt)^4} \\ &\quad - \frac{\left(ae^{at}\left(1-bt^2\right) + 2bte^{at}\right) \cdot 2\left(1-bt^2\right)(-2bt)}{(1-bt)^4} \\ M''(0) &= \frac{\left(a^2+0+2b+0\right)(1-0)^2 - (a+0)\cdot 2(1)(0)}{(1-0)^4} \\ &= a^2 + 2b \\ &= 4 + 2b. \end{aligned}$$

Karena $4 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = 4 + 2b - 2^2 = 2b$ sehingga $b = 2$. Jadi, $a - b = \boxed{0}$.

SOAL NOMOR **3**

Satu kartu diambil berturut-turut secara acak dari setumpuk kartu bridge yang berjumlah 52 buah tanpa pengembalian. (Pengambilannya satu demi satu tanpa dikembalikan)
Jika X peubah acak menyatakan banyaknya kartu As yang terambil pada pengambilan kartu pertama, Y peubah acak menyatakan total kartu As yang terambil setelah pengambilan kartu yang kedua. Berikut FKP gabungan $f(x, y)$ yang belum lengkap.

$f(x,y)$		y		
		0	1	2
x	0	A	B	C
	1	D	$\frac{16}{221}$	E

Penjelasan: $f(1,1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$, yakni peluang kartu As yang terambil saat pengambilan pertama adalah satu buah dan total kartu As yang terambil setelah pengambilan kartu kedua sejumlah 1 buah:

$$f(1,1) = f(x = 1)f(y = 1 \mid x = 1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} = \frac{16}{221}.$$

(a) Lengkapi tabel FKP gabungan di atas yakni nilai-nilai dari A, B, C, D, dan E.

(b) Lengkapi juga FKP marginal untuk peubah acak X dan Y.

(c) Hitung $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.

Solusi:

Nilai dari Y ditentukan dari banyaknya kartu As dari pengambilan pertama dan pengambilan kedua.

(a). Akan ditentukan $A = f(0, 0)$, yaitu tidak terambil kartu As di pengambilan pertama maupun kedua. Pengambilan pertama peluangnya adalah $\frac{48}{52}$, sedangkan pengambilan kedua peluangnya $\frac{47}{51}$. Jadi, $A = \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} = \boxed{\frac{188}{221}}$.
Akan ditentukan $B = f(0, 1)$, yaitu tidak terambil kartu As di pengambilan pertama dan terambil kartu As di pengambilan kedua. Pengambilan pertama peluangnya adalah $\frac{48}{52}$, sedangkan pengambilan kedua peluangnya $\frac{4}{51}$. Jadi, $B = \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \boxed{\frac{16}{221}}$.
Akan ditentukan $C = f(0, 2)$, yaitu tidak terambil kartu As di pengambilan pertama dan

terambil dua kartu As di pengambilan kedua. Namun, hal ini tidak mungkin karena setiap pengambilan hanya mengambil tepat satu kartu. Jadi, $C = \boxed{0}$.
Akan ditentukan $D = f(1,0)$, yaitu terambil kartu As pada pengambilan pertama sehingga tidak mungkin total setelah pengambilan keduanya adalah 0. Jadi, $D = \boxed{0}$.
Akan ditentukan $E = f(1,2)$, yaitu pada pengambilan pertama dan pengambilan kedua masing-masing terambil kartu As. Peluang pengambilan pertama adalah $\frac{3}{52}$, sedangkan peluang pengambilan kedua adalah $\frac{4}{51}$. Jadi, $E = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \boxed{\frac{1}{221}}$.

(b). Akan ditentukan peluang marginal X. Ingat bahwa $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{Y} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Diperoleh

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=0,Y=0) + \mathbb{P}(X=0,Y=1) + \mathbb{P}(X=0,Y=2) = \frac{188}{211} + \frac{16}{221} + 0 = \frac{204}{221},$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1,Y=0) + \mathbb{P}(X=1,Y=1) + \mathbb{P}(X=1,Y=2) = 0 + \frac{16}{221} + \frac{1}{221} = \frac{17}{221}.$$

Akan ditentukan peluang marginal Y. Ingat bahwa $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{X} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Diperoleh

$$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0,Y=0) + \mathbb{P}(X=1,Y=0) = \frac{188}{221} + 0 = \frac{188}{221},$$
$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=0,Y=1) + \mathbb{P}(X=1,Y=1) = \frac{16}{221} \cdot \frac{16}{221} = \frac{32}{221},$$
$$\mathbb{P}(Y=2) = \mathbb{P}(X=0,Y=2) + \mathbb{P}(X=1,Y=2) = 0 + \frac{1}{221} = \frac{1}{221}.$$

Jadi, peluang marginal Y adalah

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=0) = \frac{188}{221}, \quad \mathbb{P}(Y=1) = \frac{32}{221}, \quad \mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{221}}.$$

(c). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y \leq 1) &= \mathbb{P}(X+Y=0) + \mathbb{P}(X+Y=1) \\
&= \mathbb{P}(X=0,Y=0) + \mathbb{P}(X=0,Y=1) + \mathbb{P}(X=1,Y=0) \\
&= \frac{188}{221} + \frac{16}{221} + 0 \\
&= \boxed{\frac{204}{221}}.
\end{aligned}$$

Soal Nomor 4

Mbak Taylor tiba di halte bus dekat toko buku pada siang hari. Dia mengetahui waktu yang dibutuhkan (jam) hingga bus datang merupakan variabel acak X yang berdistribusi uniform $U\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Di sisi lain, BMKG menyatakan bahwa hujan akan turun pada suatu waktu di siang hari, dan waktu yang dibutuhkan (jam) hingga turun hujan adalah variabel acak Y yang berdistribusi $Exp(2)$.

(a) Dapatkan fungsi peluang gabungan $f(x, y)$.

(b) Hitung peluang akan turun hujan sebelum bus datang.

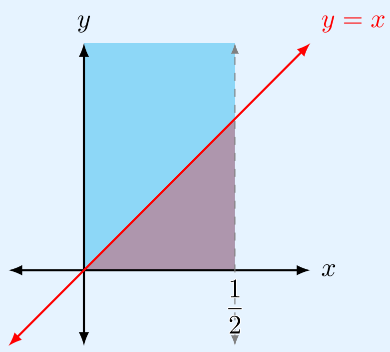
Solusi:

(a) Variabel acak X dan Y independen, maka $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. Karena $X \sim U\left(0, \frac{1}{2}\right)$ dan $Y \sim Exp(2)$, diperoleh

$$f_X(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \quad \text{dan} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Diperoleh $f(x, y) = \boxed{\begin{cases} e^{-y/2}, & 0 < x < \frac{1}{2}, y > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}}$.

(b) Dalam hal ini akan ditentukan $\mathbb{P}(X < Y)$. Daerah $x < y$ pada koordinat kartesian digambarkan derah biru berikut. Sedangkan, $\mathbb{P}(X \geq Y)$ digambarkan pada daerah merah.



Perhatikan bahwa $\mathbb{P}(X < Y) = 1 - \mathbb{P}(X \geq Y)$, kemudian

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq Y) &= \int_0^{1/2} \int_0^x f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \int_0^x e^{-y/2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \left[-2e^{-y/2}\right]_0^x \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \left(2 - 2e^{-x/2}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \left[2x + 4e^{-x/2}\right]_0^{1/2} \\
&= 1 + 4e^{-1/4} - (0 + 4) \\
&= 4e^{-1/4} - 3.
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbb{P}(X < Y) = \boxed{4 - 4e^{-1/4}}$.