



Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Pengantar Peluang

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

1 Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n merupakan variabel acak yang saling independen dan $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Manakah dari kalimat berikut merupakan pernyataan yang salah?

(A) Jika X_i berdistribusi Binomial $Bin(m_i, p)$ maka Y berdistribusi Binomial $Bin\left(\sum_{i=1}^n m_i, p\right)$.

(B) Jika X_i berdistribusi Poisson $Poi(\lambda_i)$ maka Y berdistribusi Poisson $Poi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i, p\right)$.

(C) Jika X_i berdistribusi Negatif Binomial $NB(r_i, p)$ maka Y berdistribusi Negatif Binomial $NB\left(\sum_{i=1}^n r_i, p\right)$.

(D) Jika X_i berdistribusi Negatif Binomial $NB(r_i, p)$ maka Y berdistribusi Negatif Binomial $NB\left(\sum_{i=1}^n r_i, p\right)$.

(E) Jika X_i berdistribusi Geometrik $Geo(p)$ maka Y berdistribusi Geometrik $Geo(np)$.

2 Jika Y_1 dan Y_2 variabel acak bebas stokastik yang berdistribusi eksponensial dengan FKP gabungan

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(y_1+y_2)}, & y_1 > 0, y_2 > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Jacobian dari transformasi $X_1 = Y_1 + Y_2$ dan $X_2 = e^{Y_1}$ adalah

(A) $|J| = X_1$

(C) $|J| = \frac{1}{X_2}$

(D) $|J| = \frac{1}{X_2^2}$

(B) $|J| = \frac{X_2}{X_1}$

(E) Semua jawaban salah

3 Tes diagnostik untuk mengetahui adanya suatu penyakit mempunyai dua kemungkinan hasil: 1 untuk ada penyakit dan 0 untuk tidak ada penyakit. Misalkan X menunjukkan keadaan penyakit pasien, dan Y menunjukkan hasil tes diagnostik. Fungsi probabilitas dari X dan Y diberikan sebagai berikut:

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0,800,$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 0,050$$

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0,025,$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0,125$$

Hitung $Var(Y | X = 1)$.

(A) 0,13

(B) 0,15

(C) 0,20

(D) 0,51

(E) 0,71

4 Diketahui variabel acak $X \sim N(0, 1)$. Dengan menggunakan teknik fungsi pembangkit momen, dapatkan distribusi dari transformasi $Y = aX - b$.

(A) $Y \sim N(a, b^2)$

(C) $Y \sim N(-a, b^2)$

(E) Semua jawaban salah

(B) $Y \sim N(-b, a^2)$

(D) $Y \sim N(-b, a)$

5 Diberikan fungsi probabilitas gabungan dari X dan Y sebagai berikut:

		Y		
		0	1	4
X	1	0,10	0,05	0,15
	3	0,05	0,20	0,25
	5	0,15	0,00	0,05

Manakah dari pernyataan berikut adalah benar?

- (A) Nilai fungsi marjinal X untuk $X = 3$ adalah 0,45
- (B) X dan Y independen
- (C) $\mathbb{P}(X < 5 \mid Y = 4) = 0,67$
- (D) $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- (E) $\mathbb{E}[X \mid Y = 4] \approx 2,44$

6 $X_1, X_2,$ dan X_3 merupakan variabel acak yang memiliki varians sama, namun memiliki koefisien korelasi $\rho_{12} = 0,3, \rho_{13} = 0,5,$ dan $\rho_{23} = 0,2.$ Dapatkan koefisien korelasi dari fungsi linier $Y = X_1 + X_2$ dan $Z = X_2 + X_3.$

- (A) 0,50
- (B) 0,60
- (C) 0,70
- (D) 0,80
- (E) 0,90

7 Diketahui X dan Y merupakan variabel acak dengan fungsi peluang gabungan

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}, & 0 \leq x < y < \infty \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Tentukan FKP marjinal dari $Y.$

- (A) $f(y) = 2e^{-2y} (1 - e^{-y}), y > 0$
- (B) $f(y) = 2e^{-2y} (1 - e^{-2y}), y > 0$
- (C) $f(y) = 2e^{-2y}, y > 0$
- (D) $f(y) = e^{-y} (1 - e^{-y}), y > 0$
- (E) Semua jawaban salah

8 Asumsikan bahwa X dan Y adalah variabel acak yang **bebas stokastik** dan diketahui $X \sim UNIFORM(-1, 1)$ dan $Y \sim UNIFORM(0, 1).$ Peluang bahwa persamaan kuadrat $t^2 + 2Xt + Y = 0$ mempunyai solusi bilangan real adalah

- (A) $\frac{2}{3}$
- (B) $\frac{3}{4}$
- (C) $\frac{1}{4}$
- (D) $\frac{1}{3}$
- (E) Semua jawaban salah

9 X dan Y merupakan variabel acak dengan fungsi peluang gabungan $f(x, y) = \frac{ay}{x^2}, x \geq 1, 0 \leq y \leq 1.$ Tentukan nilai harapan Y bersyarat $X, \mathbb{E}[Y \mid X].$

- (A) $\frac{1}{3}$
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) $\frac{2}{3}$
- (D) $\frac{3}{4}$
- (E) Semua jawaban salah

10 Pandang X_1 dan X_2 sebagai variabel acak independen. Selanjutnya, X_1 dan $Y = X_1 + X_2$ masing-masing berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas r_1 dan r , di mana $r_1 < r$. Tentukan distribusi dari X_2 .

(A) $\chi_{(r-r_1)}^2$

(C) $\chi_{(r/r_1)}^2$

(E) Semua jawaban salah

(B) $\chi_{(r_1/r)}^2$

(D) $\chi_{(r_1+r)}^2$

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n merupakan variabel acak yang saling independen dan $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Manakah dari kalimat berikut merupakan pernyataan yang salah?

- (A) Jika X_i berdistribusi Binomial $Bin(m_i, p)$ maka Y berdistribusi Binomial $Bin\left(\sum_{i=1}^n m_i, p\right)$.
- (B) Jika X_i berdistribusi Poisson $Poi(\lambda_i)$ maka Y berdistribusi Poisson $Poi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i, p\right)$.
- (C) Jika X_i berdistribusi Negatif Binomial $NB(r_i, p)$ maka Y berdistribusi Negatif Binomial $NB\left(\sum_{i=1}^n r_i, p\right)$.
- (D) Jika X_i berdistribusi Negatif Binomial $NB(r_i, p)$ maka Y berdistribusi Negatif Binomial $NB\left(\sum_{i=1}^n r_i, p\right)$.
- (E) Jika X_i berdistribusi Geometrik $Geo(p)$ maka Y berdistribusi Geometrik $Geo(np)$.

Solusi:

Akan diperiksa masing-masing pernyataan menggunakan FPM. Karena X_1, X_2, \dots, X_n saling bebas, maka berlaku

$$M_Y(t) = M_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

- (A) Karena $X_i \sim Bin(m_i, p)$, maka FPM dari X_i adalah $M_{X_i}(t) = (pe^t + q)^{m_i}$ di mana $q = 1 - p$. Dari sini diperoleh

$$M_Y(t) = (pe^t + q)^{m_1} (pe^t + q)^{m_2} \cdots (pe^t + q)^{m_n} = (pe^t + q)^{m_1+m_2+\dots+m_n}.$$

Ini menunjukkan $Y \sim Bin(m_1 + m_2 + \dots + m_n, p)$ sehingga pernyataan ini benar.

- (B) Karena $X_i \sim Poi(\lambda_i)$, maka FPM dari X_i adalah $M_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t-1)}$. Dari sini diperoleh

$$M_Y(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \cdots e^{\lambda_n(e^t-1)} = e^{\lambda_1(e^t-1)+\lambda_2(e^t-1)+\dots+\lambda_n(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)(e^t-1)}.$$

Ini menunjukkan bahwa $Y \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$ sehingga pernyataan ini benar.

(C) Karena $X_i \sim NB(r_i, p)$, maka FPM dari X_i adalah $M_{X_i}(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_i}$ di mana $q = 1 - p$. Dari sini diperoleh

$$M_Y(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_1} \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_2} \cdots \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_n} = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_1+r_2+\cdots+r_n}.$$

Ini menunjukkan bahwa $Y \sim NB(r_1 + r_2 + \cdots + r_n, p)$ sehingga pernyataan ini benar.

(D) Sebagaimana pada C.

(E) Karena $X_i \sim Geo(p)$, maka FPM dari X_i adalah $M_{X_i}(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$ di mana $q = 1 - p$. Dari sini diperoleh

$$M_Y(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) \cdots \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^n.$$

Ini menunjukkan bahwa $Y \sim NB(n, p)$ sehingga pernyataan ini salah.

Jadi, jawaban yang tepat adalah **E**.

Jika Y_1 dan Y_2 variabel acak bebas stokastik yang berdistribusi eksponensial dengan FKP gabungan

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(y_1+y_2)}, & y_1 > 0, y_2 > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Jacobian dari transformasi $X_1 = Y_1 + Y_2$ dan $X_2 = e^{Y_1}$ adalah

(A) $|J| = X_1$

(C) $|J| = \frac{1}{X_2}$

(D) $|J| = \frac{1}{X_2^2}$

(B) $|J| = \frac{X_2}{X_1}$

(E) Semua jawaban salah

Solusi:

Perhatikan bahwa $Y_1 = \ln(X_2)$ dan $Y_2 = X_1 - Y_1 = X_1 - \ln(X_2)$ serta $X_2 = e^{Y_1} > 1 \implies X_2 > 1$. Jacobian dari transformasi tersebut adalah

$$|J| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{X_2} \\ 1 & -\frac{1}{X_2} \end{bmatrix} \right| = \left| 0 - \frac{1}{X_2} \right| = \frac{1}{X_2}$$

karena $X_2 > 0$. Jadi, jawaban yang benar adalah **C**.

Tes diagnostik untuk mengetahui adanya suatu penyakit mempunyai dua kemungkinan hasil: 1 untuk ada penyakit dan 0 untuk tidak ada penyakit. Misalkan X menunjukkan keadaan penyakit pasien, dan Y menunjukkan hasil tes diagnostik. Fungsi probabilitas dari X dan Y diberikan sebagai berikut:

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0,800,$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 0,050$$

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0,025,$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0,125$$

Hitung $Var(Y | X = 1)$.

(A) 0,13

(B) 0,15

(C) 0,20

(D) 0,51

(E) 0,71

Solusi:

Akan ditentukan

$$\mathbb{E}[Y^2 | X = 1] = 0^2 \cdot \mathbb{P}(Y = 0 | X = 1) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(Y = 1 | X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1 | X = 1).$$

Akan ditentukan

$$\mathbb{E}[Y | X = 1] = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0 | X = 1) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1 | X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1 | X = 1).$$

Tinjau fungsi peluang marginal X saat $X = 1$ adalah

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0,050 + 0,125 = 0,175.$$

Dari sini diperoleh

$$\mathbb{P}(Y = 1 | X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{0,125}{0,175} = \frac{5}{7}.$$

Oleh karena itu, $\mathbb{E}[Y^2 | X = 1] = \frac{5}{7}$ dan $\mathbb{E}[Y | X = 1] = \frac{5}{7}$ sehingga diperoleh $Var(Y | X = 1) = \frac{5}{7} - \frac{25}{49} = \frac{10}{49} \approx 0,20$. Jadi, jawaban yang benar adalah **C**.

Diketahui variabel acak $X \sim N(0, 1)$. Dengan menggunakan teknik fungsi pembangkit momen, dapatkan distribusi dari transformasi $Y = aX - b$.

- (A) $Y \sim N(a, b^2)$ (C) $Y \sim N(-a, b^2)$ (E) Semua jawaban salah
(B) $Y \sim N(-b, a^2)$ (D) $Y \sim N(-b, a)$

Solusi:

Perhatikan bahwa FPM dari suatu variabel random $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ mempunyai FPM $M_A(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. Oleh karena itu, FPM dari X adalah $M_X(t) = e^{0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot t^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$. Maka FPM dari Y adalah

$$M_Y(t) = M_{aX-b}(t) = e^{-bt} M_{aX}(t) = e^{-bt} e^{\frac{1}{2}(at)^2} = e^{-bt + \frac{1}{2}a^2 t^2}$$

yang menunjukkan bahwa $\mu_Y = -b$ dan $\sigma_Y^2 = a^2$. Jadi, $Y \sim N(-b, a^2)$ sehingga jawaban yang benar adalah **B**.

Diberikan fungsi probabilitas gabungan dari X dan Y sebagai berikut:

		Y		
		0	1	4
X	1	0,10	0,05	0,15
	3	0,05	0,20	0,25
	5	0,15	0,00	0,05

Manakah dari pernyataan berikut adalah benar?

- (A) Nilai fungsi marginal X untuk $X = 3$ adalah 0,45
- (B) X dan Y independen
- (C) $\mathbb{P}(X < 5 \mid Y = 4) = 0,67$
- (D) $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- (E) $\mathbb{E}[X \mid Y = 4] \approx 2,44$

Solusi:

Akan diperiksa masing-masing pernyataan.

- (A) Nilai fungsi marginal X untuk $X = 3$ adalah

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 4) = 0,05 + 0,20 + 0,25 = 0,5$$

sehingga pernyataan ini salah.

- (B) Perhatikan bahwa fungsi peluang marginal Y untuk $Y = 0$ adalah

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 0) = 0,10 + 0,05 + 0,15 = 0,3.$$

Karena $\mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 0) = 0,15 \neq 0,05 = \mathbb{P}(X = 3, Y = 0) \implies \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 3, Y = 0)$, ini menunjukkan bahwa X dan Y dependen. Jadi, pernyataan ini salah.

- (C) Perhatikan bahwa

$$\mathbb{P}(X < 5 \mid Y = 4) = \frac{\mathbb{P}(X < 5, Y = 4)}{\mathbb{P}(Y = 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 4) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 4)}{\mathbb{P}(Y = 4)}.$$

Tinjau fungsi peluang marginal Y saat $Y = 4$ adalah

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 4) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 4) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 4) = 0,15 + 0,25 + 0,05 = 0,45.$$

Jadi, $\mathbb{P}(X < 5 | Y = 4) = \frac{0,15 + 0,25}{0,45} = \frac{0,40}{0,45} = \frac{8}{9} \approx 0,88$. Jadi, pernyataan ini salah.

(D) Karena X dan Y dependen, maka berlaku $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ sehingga pernyataan ini benar.

(E) Tinjau

$$\mathbb{E}[X | Y = 4] = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1 | Y = 4) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3 | Y = 4) + 5 \cdot \mathbb{P}(X = 5 | Y = 4).$$

Perhatikan bahwa $\mathbb{P}(X = x | Y = 4) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 4)}{\mathbb{P}(Y = 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = 4)}{0,45}$. Dari sini diperoleh

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 4) = \frac{0,15}{0,45} = \frac{15}{45}, \quad \mathbb{P}(X = 3 | Y = 4) = \frac{0,25}{0,45} = \frac{25}{45},$$

$$\mathbb{P}(X = 5 | Y = 4) = \frac{0,05}{0,45} = \frac{5}{45}.$$

Jadi,

$$\mathbb{E}[X | Y = 4] = \frac{15}{45} + 3 \cdot \frac{25}{45} + 5 \cdot \frac{5}{45} = \frac{15 + 75 + 25}{45} = \frac{115}{45} = \frac{23}{9} \approx 2,55.$$

Jadi, pernyataan ini salah.

Jadi, jawaban yang benar adalah **D**.

X_1 , X_2 , dan X_3 merupakan variabel acak yang memiliki varians sama, namun memiliki koefisien korelasi $\rho_{12} = 0,3$, $\rho_{13} = 0,5$, dan $\rho_{23} = 0,2$. Dapatkan koefisien korelasi dari fungsi linier $Y = X_1 + X_2$ dan $Z = X_2 + X_3$.

- (A) 0,50 (B) 0,60 (C) 0,70 (D) 0,80 (E) 0,90

Solusi:

Misalkan $Var(X_1) = Var(X_2) = Var(X_3) = \sigma^2$. Tinjau

$$0,3 = \rho_{12} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma^2} \implies Cov(X_1, X_2) = 0,3\sigma^2.$$

Dengan cara yang sama, $Cov(X_1, X_3) = 0,5\sigma^2$ dan $Cov(X_2, X_3) = 0,2\sigma^2$. Perhatikan bahwa kovarians dari Y dan Z adalah

$$\begin{aligned} Cov(Y, Z) &= Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3) \\ &= \mathbb{E}[(X_1 + X_2)(X_2 + X_3)] - \mathbb{E}[X_1 + X_2]\mathbb{E}[X_2 + X_3] \\ &= \mathbb{E}[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3] - (\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2])(\mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3]) \\ &= \mathbb{E}[X_1X_2] + \mathbb{E}[X_1X_3] + \mathbb{E}[X_2^2] + \mathbb{E}[X_2X_3] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_3] - \mathbb{E}[X_2]^2 - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_3] \\ &= (\mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]) + (\mathbb{E}[X_1X_3] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_3]) + (\mathbb{E}[X_2^2] - \mathbb{E}[X_2]^2) \\ &\quad + (\mathbb{E}[X_2X_3] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_3]) \\ &= Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) + Var(X_2) + Cov(X_2, X_3) \\ &= 0,3\sigma^2 + 0,5\sigma^2 + \sigma^2 + 0,2\sigma^2 \\ &= 2\sigma^2. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa varians dari Y adalah

$$\sigma_Y^2 = Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \cdot 0,3\sigma^2 = 2,6\sigma^2.$$

Perhatikan bahwa varians dari Z adalah

$$\sigma_Z^2 = Var(X_2 + X_3) = Var(X_2) + Var(X_3) + 2Cov(X_2, X_3) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \cdot 0,2\sigma^2 = 2,4\sigma^2.$$

Maka koefisien korelasi dari Y dan Z adalah

$$\rho_{YZ} = \frac{Cov(Y, Z)}{\sigma_Y \sigma_Z} = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2,6}\sigma \cdot \sqrt{2,4}\sigma} \approx 0,80.$$

Jadi, jawaban yang benar adalah **A**.

Diketahui X dan Y merupakan variabel acak dengan fungsi peluang gabungan

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}, & 0 \leq x < y < \infty \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} .$$

Tentukan FKP marginal dari Y .

(A) $f(y) = 2e^{-2y} (1 - e^{-y}), y > 0$

(C) $f(y) = 2e^{-2y}, y > 0$

(D) $f(y) = e^{-y} (1 - e^{-y}), y > 0$

(B) $f(y) = 2e^{-2y} (1 - e^{-2y}), y > 0$

(E) Semua jawaban salah

Solusi:

FKP marginal dari Y adalah

$$f(y) = \int_0^y 2e^{-(x+y)} dy = \left[-2e^{-(x+y)} \right]_{x=0}^{x=y} = -(-2e^{-2y} - 2e^{-y}) = 2e^{-y} - 2e^{-2y}$$

di mana $y > 0$. Jadi, jawaban yang benar adalah **E**.

Maka peluang yang diminta menggunakan pengintegralan $dy dx$ adalah

$$\int_{-1}^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{2} dy dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{y}{2} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1^3 - (-1)^3}{6} = \frac{2}{3}.$$

Jadi, jawaban yang benar adalah **A**.

X dan Y merupakan variabel acak dengan fungsi peluang gabungan $f(x, y) = \frac{ay}{x^2}$, $x \geq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Tentukan nilai harapan Y bersyarat X , $\mathbb{E}[Y | X]$.

(A) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(E) Semua jawaban salah

(B) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{4}$

Solusi:

Karena $f(x, y)$ merupakan fungsi peluang, maka

$$1 = \int_1^{\infty} \int_0^1 \frac{ay}{x^2} dy dx = \int_1^{\infty} \left[\frac{ay^2}{2x^2} \right]_0^1 dx = \int_1^{\infty} \frac{a}{2x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{a}{2x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{a}{2x} \right]_1^n = -\left(0 - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

sehingga $a = 2$. Ini berarti $f(x, y) = \frac{2y}{x^2}$ dan fungsi peluang marginal X adalah

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{2y}{x^2} dy = \left[\frac{y^2}{x^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x^2}.$$

Ini berarti

$$f(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{2y}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 2y.$$

Maka

$$\mathbb{E}[Y | X] = \int_0^1 y f(y | x) dy = \int_0^1 2y^2 dy = \left[\frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

Jadi, jawaban yang benar adalah **C**.

Pandang X_1 dan X_2 sebagai variabel acak independen. Selanjutnya, X_1 dan $Y = X_1 + X_2$ masing-masing berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas r_1 dan r , di mana $r_1 < r$. Tentukan distribusi dari X_2 .

- (A) $\chi^2_{(r-r_1)}$ (C) $\chi^2_{(r/r_1)}$ (E) Semua jawaban salah
 (B) $\chi^2_{(r_1/r)}$ (D) $\chi^2_{(r_1+r)}$
 (A) $Y \sim N(a, b^2)$ (C) $Y \sim N(-a, b^2)$ (E) Semua jawaban salah
 (B) $Y \sim N(-b, a^2)$ (D) $Y \sim N(-b, a)$

Solusi:

Akan diselesaikan menggunakan FPM. Perhatikan bahwa FPM dari X_1 dan Y berturut-turut adalah

$$M_{X_1}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r_1/2}} \quad \text{dan} \quad M_Y(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}}.$$

Karena X_1 dan X_2 independen, maka

$$\frac{1}{(1-2t)^{r/2}} = M_Y(t) = M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r_1/2}} M_{X_2}(t)$$

yang memberikan $M_{X_2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{(r-r_1)/2}}$. Ini menunjukkan $X_2 \sim \chi^2_{(r-r_1)}$ sehingga jawaban yang benar adalah **A**.