Soal dan Solusi UTS Persamaan Diferensial Parsial 2024

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Tentukan solusi $u(x,t)$ untuk masalah nilai awal berikut dan buktikan bahwa solusi yang Anda peroleh benar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = u + t, \quad u(x,0) = x.$$

Penyelesaian.

Misalkan $t = t(s,\tau)$ dan $x = x(s,\tau)$. Diperoleh $\frac{\partial t}{\partial s} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial s} = u + t$ dengan $x(0,\tau) = \tau$, $t(0,\tau) = 0$, dan $u(0,\tau) = \tau$. Tinjau bahwa

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1 \implies t(s,\tau) = s + C_1(\tau) \implies 0 = t(0,\tau) = 0 + C_1(\tau) = C_1(\tau)$$

yang berarti $t(s,\tau) = s$. Tinjau

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{x} \implies x\,\partial x = \partial s \implies \frac{1}{2}x^2 = s + C_2(\tau) \implies x(s,\tau) = \sqrt{2s + 2C_2(\tau)}.$$

Diperoleh

$$\tau = x(0,\tau) = \sqrt{2C_2(\tau)} \implies C_2(\tau) = \frac{\tau^2}{2} \implies x(s,\tau) = \sqrt{2s + \tau^2}.$$

Tulis ulang $\frac{\partial u}{\partial s} = u + t = u + s$ yang berarti $\frac{\partial u}{\partial s} - u = s$ dengan $u(0,\tau) = \tau$. Ini berarti

$$e^{-s}s = e^{-s}\frac{\partial u}{\partial s} - e^{-s}s = \frac{\partial\left(e^{-s}u\right)}{\partial s} \implies e^{-s}u = \int e^{-s}s\,ds = -se^{-s} - \int \left(-e^{-s}\right)\,ds = -se^{-s} - e^{-s} + C_3(\tau)$$

sehingga diperoleh $u(s,\tau) = -s - 1 + e^s C_3(\tau)$. Diperoleh pula

$$\tau = u(0,\tau) = -0 - 1 + 1 \cdot C_3(\tau) = C_3(\tau) - 1 \implies C_3(\tau) = \tau + 1.$$

Jadi, $u(s,\tau) = -s - 1 + e^s(\tau + 1)$. Karena $s = t$ dan $\tau = \sqrt{x^2 - 2s}$, maka

$$u(x,t) = -t - 1 + e^t\left(\sqrt{x^2 - 2t} + 1\right).$$

Akan diperiksa solusi ini memenuhi. Perhatikan bahwa $u(x,0) = -0 - 1 + 1 \cdot \left(\sqrt{x^2 - 0} + 1\right) = -1 + x + 1 = x$. Selain itu,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -1 - 0 + e^t\left(\sqrt{x^2 - 2t} + 1\right) + e^t \cdot \frac{-2}{2\sqrt{x^2 - 2t}} = -1 + e^t\left(\sqrt{x^2 - 2t} + 1\right) - \frac{e^t}{\sqrt{x^2 - 2t}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -0 - 0 + e^t \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 2t}} = \frac{xe^t}{\sqrt{x^2 - 2t}}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = -1 + e^t\left(\sqrt{x^2 - 2t} + 1\right) = -t - 1 + e^t\left(\sqrt{x^2 - 2t} + 1\right) + t = u + t.$$

Question 2

Tentukan solusi $u(x,t)$ untuk masalah nilai awal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}.$$

Penyelesaian.

Misalkan $t = t(s,\tau)$ dan $x = x(s,\tau)$. Diperoleh $\frac{\partial t}{\partial s} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial s} = u$, $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$, $x(0,\tau) = \tau$, $t(0,\tau) = 0$, dan

$$u(0,\tau) = \begin{cases} \tau+1, & -1 \le \tau \le 0 \\ 1-\tau, & 0 < \tau \le 1 \\ 0, & \tau \text{ lainnya} \end{cases}.$$

Dari $\frac{\partial t}{\partial s} = 1$ diperoleh $t(s,\tau) = s + C_1(\tau)$ sehingga

$$0 = t(0,\tau) = 0 + C_1(\tau) = C_1(\tau) \implies C_1(\tau) = 0 \implies t(s,\tau) = s.$$

Dari $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ sehingga $u(s,\tau) = C_2(\tau)$, diperoleh

$$C_2(\tau) = u(0,\tau) = \begin{cases} \tau+1, & -1 \le \tau \le 0 \\ 1-\tau, & 0 < \tau \le 1 \\ 0, & \tau \text{ lainnya} \end{cases} \implies u(s,\tau) = \begin{cases} \tau+1, & -1 \le \tau \le 0 \\ 1-\tau, & 0 < \tau \le 1 \\ 0, & \tau \text{ lainnya} \end{cases}.$$

Dari sini diperoleh bahwa

$$\frac{\partial x}{\partial s} = u = \begin{cases} \tau+1, & -1 \le \tau \le 0 \\ 1-\tau, & 0 < \tau \le 1 \\ 0, & \tau \text{ lainnya} \end{cases} \implies x(s,\tau) = \begin{cases} s\tau + s + C_3(\tau), & -1 \le \tau \le 0 \\ s - s\tau + C_4(\tau), & 0 < \tau \le 1 \\ C_5(\tau), & \tau \text{ lainnya} \end{cases}.$$

Dari $x(0,\tau) = \tau$, diperoleh

$$\tau = x(0,\tau) = C_3(\tau) = C_4(\tau) = C_5(\tau) \implies x(s,\tau) = \begin{cases} s\tau + s + \tau, & -1 \le \tau \le 0 \\ s - s\tau + \tau, & 0 < \tau \le 1 \\ \tau, & \tau \text{ lainnya} \end{cases}.$$

Diperoleh bahwa $s = t$.

- Untuk $-1 \le \tau \le 0$. Tinjau bahwa $x = s\tau + s + \tau = (t+1)\tau + t$ berakibat $\tau = \frac{x-t}{t+1}$. Ini berarti $-1 \le \frac{x-t}{t+1} \le 0$ sehingga $-t-1 \le x-t \le 0 \implies -1 \le x \le t$.
- Untuk $0 < \tau \le 1$. Tinjau bahwa $x = s - s\tau + \tau = t + (1-t)\tau$ yang berarti $\tau = \frac{x-t}{1-t}$. Ini berarti $0 < \frac{x-t}{1-t} \le 1$ sehingga $0 < x-t \le 1-t \implies t < x \le 1$.
- Untuk τ yang lain, diperoleh $\tau = x$ untuk x yang lain.

Jadi, solusi yang diminta adalah

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{x-t}{t+1} + 1, & -1 \le x \le t \\ 1 - \frac{x-t}{1-t}, & t < x \le 1 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x+1}{t+1}, & -1 \le x \le t \\ \frac{1-x}{1-t}, & t < x \le 1 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Solusi dapat dicek kebenarannya dan diserahkan kepada pembaca. ▼

Question 3

Tentukan klasifikasi/tipe dan bentuk kanonik persamaan diferensial parsial berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7x^2\frac{\partial u}{\partial x} - 8y\frac{\partial u}{\partial y} = x + y.$$

Penyelesaian.

Tulis ulang sebagai $u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} + 7x^2 u_x - 8u_y = x + y$. Pandang bentuk umum

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g,$$

berarti $a = 1, b = 6, c = -16$ sehingga $\Delta(x, y) = b^2 - 4ac = 36 + 64 = 100 > 0$. Jadi, PD di atas termasuk PD hiperbolik. Misalkan $u = u(\xi, \eta)$ di mana $\xi = \xi(x, y)$ dan $\eta = \eta(x, y)$. Substitusikan pada PD dan akan diperleh bentuk

$$Au_{\xi\xi} + Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} = g(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta)$$

dengan

$$\begin{aligned}
A &= a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 &&= \xi_x^2 + 6\xi_x\xi_y - 16\xi_y^2, \\
B &= 2a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) + 2c\xi_y\eta_y &&= 2\xi_x\eta_x + 6(\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y) - 32\xi_y\eta_y, \\
C &= a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 &&= \eta_x^2 + 6\eta_x\eta_y - 16\eta_y^2.
\end{aligned}$$

Dalam hal ini harus dipenuhi $D = B^2 - 4AC > 0$ yang mana ada dua pilihan: $A = C = 0$ atau $B = 0, C = -A$ (cukup pilih salah satu). Dalam solusi ini akan dipilih $A = C = 0$. Akan diselesaikan untuk $\xi(x, y)$. Ini berarti

$$0 = \xi_x^2 + 6\xi_x\xi_y - 16\xi_y^2 \implies 0 = \left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 6\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) - 16 \implies \frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-6 - 10}{2} = -8.$$

Dengan $\xi(x, y) = c_1$ konstan, maka $0 = d\xi = \xi_x\ dx + \xi_y\ dy \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y} = 8$ yang berarti $y = 8x + \xi \iff \xi = y - 8x$. Secara analog, untuk

$$0 = \eta_x^2 + 6\eta_x\eta_y - 16\eta_y^2 \implies 0 = \left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2 + 6\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right) - 16 \implies \frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-6 + 10}{2} = 2.$$

Dengan $\eta(x, y) = c_2$ konstan, diperoleh pula $\frac{dy}{dx} = -\frac{\eta_x}{\eta_y} = -2 \implies y = -2x + \eta$ sehingga $\eta = y + 2x$. Diperoleh $x = \frac{\eta - \xi}{10}$ dan $y = \frac{\xi + 4\eta}{5}$. Dari sini:

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x &&= -8u_\xi + 2u_\eta \\
u_{xx} &= -8(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + 2(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) &&= -8(-8u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta}) + 2(-8u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta}) \\
&= 64u_{\xi\xi} - 16u_{\xi\eta} - 16u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} &&= -64u_{\xi\xi} - 32u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} \\
u_{xy} &= -8(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + 2(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) &&= -8(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + 2(u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \\
&= -8u_{\xi\xi} - 8u_{\xi\eta} + 2u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta} &&= -8u_{\xi\xi} - 6u_{\xi\eta} + 2u_{\eta\eta} \\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y &&= u_\xi + \eta_y \\
u_{yy} &= (u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + (u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) &&= (u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \\
&= u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} &&= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Diperoleh pula

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= 64u_{\xi\xi} - 32u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta} \\
6u_{xy} &= -48u_{\xi\xi} - 36u_{\xi\eta} + 12u_{\eta\eta} \\
-16u_{yy} &= -16u_{\xi\xi} - 32u_{\xi\eta} - 16u_{\eta\eta} \\
7x^2u_x &= 7\left(\frac{\eta-\xi}{10}\right)^2(-8u_\xi + 2u_\eta) \\
-8u_y &= -8u_\xi - 8u_\eta
\end{aligned}
$$

Dengan menjumlahkan semuanya diperoleh

$$
\begin{aligned}
0\cdot u_{\xi\xi} - 100u_{\xi\eta} + 0\cdot u_{\eta\eta} - \frac{14}{25}(\eta-\xi)^2u_\xi + \frac{7}{50}(\eta-\xi)^2u_\eta - 8u_\xi - 8u_\eta &= \frac{\eta-\xi}{10} + \frac{\xi+4\eta}{5} \\
-100u_{\xi\eta} - \left[\frac{14}{25}(\eta-\xi)^2 + 8\right]u_\xi + \left[\frac{7}{50}(\eta-\xi)^2 - 8\right]u_\eta &= \frac{9\eta+\xi}{10} \\
\frac{1}{5000}\left[7(\eta-\xi)^2 - 400\right]u_\eta - \frac{1}{1250}\left[7(\eta-\xi)^2 + 100\right]u_\xi - \frac{9\eta+\xi}{1000} &= u_{\xi\eta}
\end{aligned}
$$

sebagai bentuk kanonik PD tersebut. ▼