Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Persamaan Diferensial Biasa

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

1 Selesaikan masalah nilai awal PD linear

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = x^2 \ln(x); \quad y(1) = 0.$$

2 Tentukan solusi PDB orde 1 berikut dengan menggunakan metode yaang sesuai,

$$2\sin(y)\sin(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x + \cos(y)(\sin(x))^2\ \mathrm{d}y = 0.$$

3 Tentukan solusi umum PDB berikut dengan menggunakan metode variasi parameter,

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

4 Tentukan solusi umum PDB orde 3 nonhomogen dengan koefisien konstan berikut:

$$y''' + y'' + 3y' - 5y = 10e^x.$$

Soal Nomor

1

Selesaikan masalah nilai awal PD linear

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = x^2 \ln(x); \quad y(1) = 0.$$

Solusi:

Tulis ulang PD sebagai

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \ln(x) \implies y'f(x) - \frac{f(x)}{x}y = x^2 \ln(x) f(x). \tag{1}$$

Akan ditentukan f sedemikian sehingga

$$y'f(x) - \frac{f(x)}{x}y = \frac{d}{dx}yf(x) = y'f(x) + yf'(x) \implies f'(x) = -\frac{f(x)}{x}$$

Ini berarti $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{f(x)}{x} \iff \frac{\mathrm{d}f}{f(x)} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$. Integralkan kedua ruas,

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{f(x)} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{x} \implies \ln(f(x)) = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \implies f(x) = \frac{1}{x}.$$

Maka persamaan (1) menjadi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{x}\right) = x\ln(x) \implies \frac{y}{x} = \int x \ln(x)\ dx.$$

Akan diselesaikan menggunakan integral parsial, misalkan $u = \ln(x) \implies \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ dan $\mathrm{d}v = x\ \mathrm{d}x \implies v = \frac{x^2}{2}$. Maka

$$\int x \ln(x)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\int x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

di mana C suatu konstan. Maka

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C \implies y = \frac{x^3 \ln(x)}{2} - \frac{x^3}{4} + Cx.$$

Karena $y(1) = 0$, maka $0 = \frac{1^3 \ln(1)}{2} - \frac{1^3}{4} + C(1) \iff C = \frac{1}{4}$. Jadi, solusinya adalah

$$\boxed{y = \frac{x^3 \ln(x)}{2} - \frac{x^3}{4} + Cx,\ C \text{ konstan}}.$$

Catatan. Proses pengecekan diserahkan kepada pembaca.

Soal Nomor

2

Tentukan solusi PDB orde 1 berikut dengan menggunakan metode yaang sesuai,

$$2\sin(y)\sin(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x + \cos(y)(\sin(x))^2\ \mathrm{d}y = 0.$$

Solusi:

Pandang fungsi $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial dua kali dan kontinu. Pandang turunan total dari $U(x,y)$ adalah $\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\ \mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\ \mathrm{d}y$. Pilih

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\sin(y)\sin(x)\cos(x) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \cos(y)\sin^2(x).$$

Dari sini diperoleh

$$\frac{\partial U}{\partial x \partial y} = 2\cos(y)\sin(x)\cos(x) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial U}{\partial y \partial x} = \cos(y)\cdot 2\sin(x)\cos(x)$$

yang menunjukkan bahwa $\frac{\partial U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial U}{\partial y \partial x}$. Ini berarti PD pada soal merupakan PD eksak. Tinjau

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \cos(y)\sin^2(x) \implies U(x,y) = \int \cos(y)\sin^2(x)\ dy = \sin(y)\sin^2(x) + C(x).$$

Dari sini diperoleh

$$2\sin(y)\sin(x)\cos(x) = \frac{\partial U}{\partial x} = \sin(y)\cdot 2\sin(x)\cos(x) + C'(x) \implies C'(x) = 0.$$

Maka $C(x) = K$ untuk suatu konstan K. Dari PD yang diberikan soal ini berarti $\mathrm{d}U = 0$, maka $U(x,y) = L$ untuk suatu konstan L sehingga solusinya adalah $\boxed{\sin(y)\sin^2(x) + C = 0,\ C \text{ konstan}}$ dengan $C = K - L$.

Catatan. Pengecekan diserahkan kepada pembaca.

SOAL NOMOR

3

Tentukan solusi umum PDB berikut dengan menggunakan metode variasi parameter,

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Solusi:

Pandang solusi homogennya, yaitu $y_h'' - 2y_h' + y_h = 0$ yang memiliki persamaan karateristik $0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Maka $y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$ di mana C_1, C_2 konstan. Misalkan solusi partikulirnya adalah $y_p = v_1 e^x + v_2 x e^x$ di mana v_1, v_2 fungsi terhadap x. Pilih v_1, v_2 yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}.$$

Dengan Cramer's Rule diperoleh

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{1+x^2} & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{xe^{2x}}{1+x^2}}{e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x}} = -\frac{x}{1+x^2},$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{1+x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}} = \frac{\frac{e^{2x}}{1+x^2}}{e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ini berarti $v_1 = -\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$ dan $v_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$. Akan diselesaikan untuk $v_1 = -\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$. Misalkan $p = 1 + x^2$, maka $dp = 2x\, dx$. Dari sini diperoleh

$$v_1 = -\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = -\int \frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\ln(p) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right).$$

Akan diselesaikan untuk $v_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$. Substitusi $x = \tan(t)$, maka $dx = \sec^2(t)\, dt$. Maka

$$v_2 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{\sec^2(t)\, dt}{1 + \tan^2(t)} = \int \frac{\sec^2(t)\, dt}{\sec^2(t)} = \int 1\, dt = t = \tan^{-1}(x).$$

Diperoleh $y_p = -\frac{e^x}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + xe^x \tan^{-1}(x)$. Jadi, solusi dari PD tersebut adalah

$$y = y_h + y_p \implies \boxed{y = C_1 e^x + C_2 e x^x - \frac{e^x}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + xe^x \tan^{-1}(x),\ C_1, C_2 \text{ konstan}}.$$

Catatan. Pengecekan diserahkan kepada pembaca.

Soal Nomor

4

Tentukan solusi umum PDB orde 3 nonhomogen dengan koefisien konstan berikut:

$$y''' + y'' + 3y' - 5y = 10e^x.$$

Solusi:

Akan diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Pandang solusi homogennya, yaitu $y_h''' + y_h'' + 3y_h' - 3y_h = 0$, memiliki persamaan karateristik

$$0 = \lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 5 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 2\lambda + 5\right) \implies \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(5)}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Maka solusi homogennya adalah $y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}\cos(2t) + C_3e^{-x}\sin(2x)$ di mana C_1, C_2, C_3 suatu konstan. Dari ruas kanan pada PD, mengingat $10e^x$ berasosiasi dengan solusi homogen, misalkan solusi partikulirnya adalah $y_p = Kxe^x$. Diperoleh

$$y_p' = Ke^x + Kxe^x, \quad y_p'' = 2Ke^x + Kxe^x, \quad y_p''' = 3Ke^x + Kxe^x.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} 10e^x &= y_p''' + y_p'' + 3y_p' - 5y_p \\ &= 3Ke^x + Kxe^x + 2Ke^x + Kxe^x + 3Ke^x + 3Kxe^x - 5Kxe^x \\ &= 8Ke^x \end{aligned}$$

sehingga $K = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. Dari sini diperoleh solusinya adalah

$$y = y_h + y_p \implies \boxed{y = C_1e^x + C_2e^{-x}\cos(2x) + C_3e^{-x}\sin(2x) + \frac{5}{4}xe^x, \quad C_1, C_2, C_3 \text{ konstan}}.$$

Catatan. Pengecekan diserahkan kepada pembaca.