Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Matematika Diskret

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

1 Dengan induksi matematika, buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 4$, berlaku $2^n > n^2$.

2 (a) Tunjukkan bahwa jika setiap 14 bilangan bulat dipilih dari himpunan $S = \{1, 2, 3, \cdots, 25\}$, ada sekurang-kurangnya dua bilangan yang jumlahnya 26.

(b) Tentukan banyak bilangan bulat positif n jika $1 \leq n \leq 2000$ yang tidak habis dibagi 2 atau 3 atau 5.

3 Diberikan poset $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$.

(a) Gambarkan diagram Hassenya.

(b) Cari elemen maksimalnya.

(c) Cari elemen minimalnya.

(d) Apakah terdapat elemen terbesarnya?

(e) Apakah terdapat elemen terkecilnya?

(f) Cari batas atas dari $\{2, 9\}$.

(g) Cari batas atas terkecil dari $\{2, 9\}$ jika ada.

(h) Cari batas bawah dari $\{60, 72\}$.

(i) Cari batas bawah terbesar dari $\{60, 72\}$ jika ada.

4 (a) Diketahui fungsi Boole $f(a, b, c) = ac + \left(\bar{b} + \bar{b}c\right) + a\bar{b}\bar{c}$. Gambarkan rangkaian logika fungsi Boolean tersebut. Kemudian, buktikan bahwa $ac + \left(\bar{b} + \bar{b}c\right) + a\bar{b}\bar{c} = \bar{b} + ac$ dengan menggunakan hukum aljabar Boole (beri keterangan hukum yang berlaku pada setiap langkah pembuktian).

(b) Sederhanakan fungsi Boolean

$$\begin{aligned} f(w, x, y, z) = & \ (w + x + y + \overline{z})\,(w + x + \overline{y} + \overline{z})\,(w + \overline{x} + y + \overline{z}) \\ & (\overline{w} + x + y + z)\,(\overline{w} + x + \overline{y} + z)\,(\overline{w} + x + \overline{y} + \overline{z})\,(\overline{w} + \overline{x} + y + \overline{z}) \end{aligned}$$

dalam bentuk baku SOP (Sum of Product) dan POS (Product of Sum) dengan menggunakan Peta Karnough.

Soal Nomor

1

Dengan induksi matematika, buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n > 4$, berlaku $2^n > n^2$.

Solusi:

Misalkan $p(n)$ menyatakan premis dari $2^n > n^2$. Untuk $n = 5$, diperoleh $32 = 2^5 > 5^2 = 25$ sehingga $p(5)$ benar. Asumsikan untuk suatu $n = k$, maka $p(k)$ benar, artinya berlaku $2^k > k^2$. Akan ditinjau untuk $p(k+1)$, perhatikan bahwa $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$. Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan asli $k \geq 5$ berlaku $k^2 - 2k = k(k-2) \geq 5(3) = 15 > 1 \implies k^2 - 2k > 1$. Hal ini berakibat

$$k^2 - 2k > 1 \iff k^2 > 2k + 1 \iff 2k^2 > k^2 + 2k + 1 \iff 2k^2 > (k+1)^2.$$

Sehingga diperoleh $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2 \implies 2^{k+1} > (k+1)^2$ yang artinya $p(k+1)$ benar. Menurut induksi matematika, terbukti bahwa $2^n > n^2$ untuk setiap bilangan asli $n > 4$.

SOAL NOMOR

2

(a) Tunjukkan bahwa jika setiap 14 bilangan bulat dipilih dari himpunan $S = \{1, 2, 3, \cdots, 25\}$, ada sekurang-kurangnya dua bilangan yang jumlahnya 26.

(b) Tentukan banyak bilangan bulat positif n jika $1 \leq n \leq 2000$ yang tidak habis dibagi 2 atau 3 atau 5.

Solusi:

(a) Tinjau kelompok-kelompok $\{1, 25\}, \{2, 24\}, \{3, 23\}, \cdots, \{12, 14\}, \{13\}$. Karena diambil 14 bilangan dari S, menurut Pigeonhole Principle terdapat setidaknya dua bilangan yang berada di kelompok yang sama. Akibatnya, dua bilangan yang berada di kelompok sama akan memiliki jumlah 26, terbukti.

(b) Misalkan $S = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 2000\}$. Misalkan $A, B, C \subseteq S$ di mana

$$A = \{x \in S : 2 \mid x\}, \quad B = \{x \in S : 3 \mid x\}, \quad C = \{x \in S : 5 \mid x\}.$$

Dalam hal ini kita akan menentukan $\left|\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right|$, di mana

$$\left|\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right| = \left|\overline{A \cap B \cap C}\right| = |S| - |A \cap B \cap C| = 2000 - |A \cap B \cap C|.$$

Perhatikan bahwa $A \cap B \cap C$ menyatakan semua $x \in S$ sedemikian sehingga x habis dibagi $2, 3,$ dan 5 sekaligus. Artinya, x harus habis dibagi $\text{kpk}(2, 3, 5) = 30$ dan diperoleh $|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \dfrac{2000}{30} \right\rfloor = 66$. Jadi, $\left|\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}\right| = 2000 - 66 = \boxed{1934}$.

Soal Nomor

3

Diberikan poset $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$.

(a) Gambarkan diagram Hassenya.

(b) Cari elemen maksimalnya.

(c) Cari elemen minimalnya.

(d) Apakah terdapat elemen terbesarnya?

(e) Apakah terdapat elemen terkecilnya?

(f) Cari batas atas dari $\{2, 9\}$.

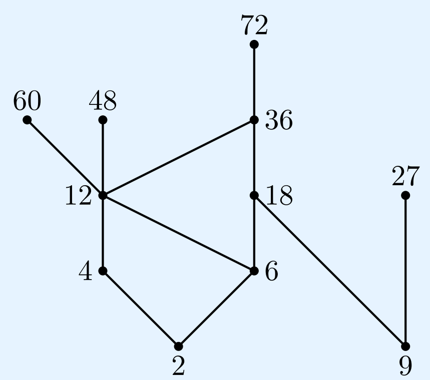
(g) Cari batas atas terkecil dari $\{2, 9\}$ jika ada.

(h) Cari batas bawah dari $\{60, 72\}$.

(i) Cari batas bawah terbesar dari $\{60, 72\}$ jika ada.

Solusi:

(a) Diagram Hasse terkait sebagaimana gambar berikut.



(b) Elemen maksimalnya adalah $\boxed{27, 60, 48, \text{dan } 72}$.

(c) Elemen minimalnya adalah $\boxed{2 \text{ dan } 9}$.

(d) Elemen terbesar yang mungkin adalah 27, 48, 60, atau 72. Namun, masing-masing kemungkinan tersebut ada syarat yang tidak terpenuhi: untuk setiap x anggota dalam poset tersebut dan y sebagai elemen terbesar, maka $x \preceq y$. Tinjau $36 \not\preceq 60$, jadi 60 tidak mungkin menjadi elemen terbesar. Dengan cara yang sama, tinjau $36 \not\preceq 48, 27 \not\preceq 72$, dan $36 \not\preceq 27$ sehingga 48, 72, dan 27 tidak mungkin menjadi elemen terbesar. Jadi, $\boxed{\text{tidak ada}}$ elemen terbesar.

(e) Mirip dengan bagian (d), tinjau elemen terkecil yang mungkin adalah 2 atau 9. Namun, $2 \not\preceq 9$ dan $9 \not\preceq 2$ sehingga 2 dan 9 tidak mungkin menjadi elemen terkecil. Jadi, $\boxed{\text{tidak ada}}$ elemen terkecil.

(f) Batas atas dari $\{2, 9\}$ adalah $\boxed{18, 36, \text{ dan } 72}$.

(g) Batas atas terkecil dari $\{2, 9\}$ adalah $\boxed{18}$.

(h) Batas bawah dari $\{60, 72\}$ adalah $\boxed{2, 4, 6, \text{ dan } 12}$.

(i) Batas bawah terbesar dari $\{60, 72\}$ adalah $\boxed{12}$.

Soal Nomor **4**

(a) Diketahui fungsi Boole $f(a,b,c) = ac + \left(\overline{b} + \overline{b}c\right) + a\overline{b}\overline{c}$. Gambarkan rangkaian logika fungsi Boolean tersebut. Kemudian, buktikan bahwa $ac + \left(\overline{b} + \overline{b}c\right) + a\overline{b}\overline{c} = \overline{b} + ac$ dengan menggunakan hukum aljabar Boole (beri keterangan hukum yang berlaku pada setiap langkah pembuktian).

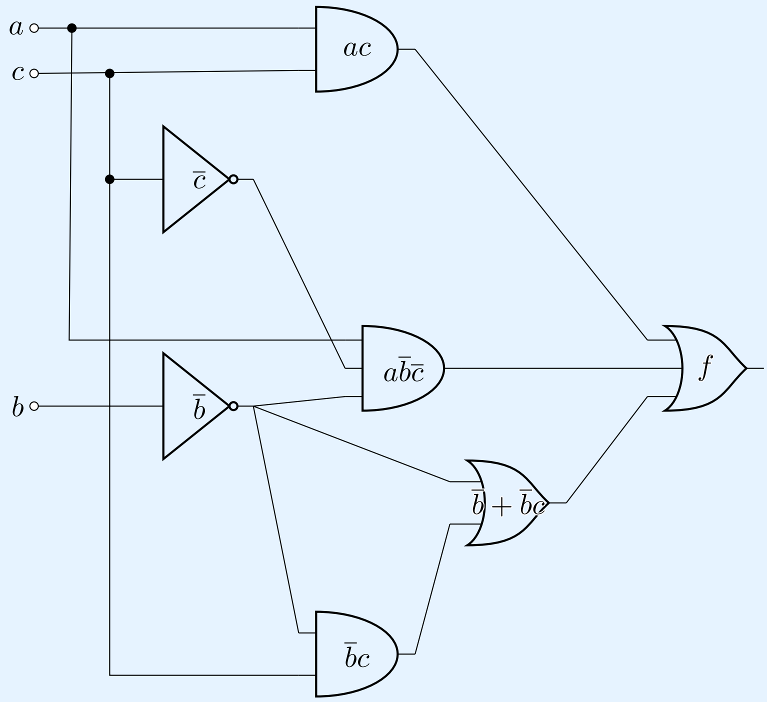
(b) Sederhanakan fungsi Boolean

$$\begin{aligned} f(w,x,y,z) = {} & (w+x+y+\overline{z})\,(w+x+\overline{y}+\overline{z})\,(w+\overline{x}+y+\overline{z}) \\ & (\overline{w}+x+y+z)\,(\overline{w}+x+\overline{y}+z)\,(\overline{w}+x+\overline{y}+\overline{z})\,(\overline{w}+\overline{x}+y+\overline{z}) \end{aligned}$$

dalam bentuk baku SOP (Sum of Product) dan POS (Product of Sum) dengan menggunakan Peta Karnough.

Solusi:

(a). Rangkaian logika dari $f(a,b,c)$ sebagaimana gambar berikut.



Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
ac + \left(\bar{b} + \bar{b}c\right) + a\bar{b}\bar{c} &= ac + \bar{b} + a\bar{b}\bar{c} && \text{(absorbsi)} \\
&= \left(ac + \bar{b}\right) + \left(a\bar{b}\right)\bar{c} && \text{(urutan operasi di } + \text{ dan } \cdot\text{)} \\
&= ac + \left(\bar{b} + \left(\bar{b}a\right)\bar{c}\right) && \text{(asosiatif di } + \text{ dan komutatif di } \cdot\text{)} \\
&= ac + \left(\bar{b} + \bar{b}\left(a\bar{c}\right)\right) && \text{(asosiatif di } \cdot\text{)} \\
&= ac + \bar{b} && \text{(absorbsi)} \\
&= \bar{b} + ac && \text{(komutatif di } +\text{)}
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $ac + \left(\bar{b} + \bar{b}c\right) + a\bar{b}\bar{c} = \bar{b} + ac$.

(b). Dalam bentuk POS, tuliskan u sebagai 0 dan $\overline{u}$ sebagai 1 sebagaimana berikut.

$$
\begin{aligned}
w + x + y + z &: (0001)_2 = 1 & \quad w + x + \overline{y} + \overline{z} &: (0011)_2 = 3 \\
w + \overline{x} + y + \overline{z} &: (0101)_2 = 5 & \quad \overline{w} + x + y + z &: (1000)_2 = 8 \\
\overline{w} + x + \overline{y} + z &: (1010)_2 = 10 & \quad \overline{w} + x + \overline{y} + \overline{z} &: (1011)_2 = 11 \\
\overline{w} + \overline{x} + y + \overline{z} &: (1101)_2 = 13
\end{aligned}
$$

Isi entri-entri wx dan yz dalam K-map yang bersesuaian dengan komposisi diatas sebagai 0 (karena POS), kemudian isi 1 untuk yang lain sebagaimana tabel bagian kanan. Tabel berikut merupakan pemilihan atau pembagian kelompok (salah satu yang mungkin). Tabel sengaja dipisah untuk memudahkan melihat pembagian kelompoknya (agar warnanya ga tertimpa satu sama lain). Dari tabel terdapat 4 kelompok dengan dua buah 1 yang bertetangga. Sehingga dapat diperoleh

$$f(w,x,y,z) = (\overline{x} + y + \overline{z})(\overline{w} + x + \overline{y})(w + x + \overline{z})(\overline{w} + x + z).$$

Jadi, bentuk sederhana dalam POS dari $f(w,x,y,z)$ adalah

$$f(w,x,y,z) = \boxed{(\overline{x} + y + \overline{z})(\overline{w} + x + \overline{y})(w + x + \overline{z})(\overline{w} + x + z)}.$$

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

Akan ditinjau untuk SOP dari $f(w,x,y,z)$ dengan pengelompokan sebagaimana tabel berikut. Terdapat empat kelompok: tiga kelompok kuad (empat angka 1 yang bertetangga) dan satu kelompok dengan angka 1 yang tidak bertetangga dengan angka 1 lainnya. Sehingga diperoleh

$$f(w,x,y,z) = w\overline{x}\,\overline{y}z + xy + x\overline{z} + \overline{w}\,\overline{z}.$$

Jadi, bentuk sederhana SOP dari $f(w,x,y,z)$ adalah $f(w,x,y,z) = \boxed{w\overline{x}\,\overline{y}z + xy + x\overline{z} + \overline{w}\,\overline{z}}$.

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

wx/yz	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

Catatan. Menurut saya hasil yang diperoleh belum tentu satu sama lain, tergantung pengelompokan yang dilakukan.