Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Matematika Diskret

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

1 Tentukan penyelesaian relasi rekursif

$$a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3} + 2^n$$

dengan $a_0 = 0, a_1 = 1$, dan $a_2 = -1$.

2 Diberikan matriks transisi DFA sebagai berikut, di mana A sebagai state initial dan D sebagai state final.

State\Input	a	b
A	B	D
B	C	D
C	C	C
D	B	D

(a) Gambarlah graf berarah yang mendeskripsikan DFA (*Deterministic Finite Automata*).

(b) Tentukan grammar G dari bahasa yang diterima oleh DFA dengan matriks transisi di atas.

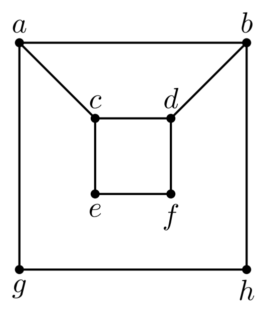
3 Dekripsikan chipertext LNGIHGYBVRENJYQO dengan menggunakan Hill-2 chiper, jika empat plaintext terakhirnya merupakan ATOM.
Catatan. konversi hurufnya $A = 1, B = 2, \cdots$, dan $Z = 0$.

4 Diberikan graf G dalam diagram berikut.

(a). Buktikan bahwa pada graf G berlaku

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2|E(G)|.$$

(b). Tentukan subgraf $G - d$ dan $G - c$, kemudian selidiki apakah kedua graf tersebut saling isomorfik dan berikan penjelasannya.



Soal Nomor

1

Tentukan penyelesaian relasi rekursif

$$a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3} + 2^n$$

dengan $a_0 = 0, a_1 = 1$, dan $a_2 = -1$.

Solusi:

Tulis $2^n = a_n - a_{n-1} - 8a_{n-2} + 12a_{n-3}$. Tinjau solusi homogen relasi rekursif tersebut adalah

$$0 = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3).$$

Diperoleh $x_1 = x_2 = 2$ dan $x_3 = -3$. Jadi, solusi homogennya adalah $a_n^h = a \cdot 2^n + bn \cdot 2^n + c \cdot (-3)^n$. Akan ditentukan solusi parsial relasi rekursif tersebut. Karena 2^n berasosiasi dengan solusi homogen, haruslah solusi parsialnya $a_n^p = dn^2 \cdot 2^n$. Subtitusikan solusi parsial ke hal yang diberikan di soal,

$$2^n = dn^2 \cdot 2^n - d(n-1)^2 \cdot 2^{n-1} - 8 \cdot d(n-2)^2 \cdot 2^{n-2} + 12d(n-3)^2 \cdot 2^{n-3}.$$

Bagi kedua ruas dengan 2^{n-3}, maka

$$8 = 8dn^2 - 4d(n-1)^2 - 16d(n-2)^2 + 12d(n-3)^3 = 40d \implies d = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}.$$

Jadi, solusi rekursifnya adalah

$$a_n = a_n^h + a_n^p = a \cdot 2^n + bn \cdot 2^n + c \cdot (-3)^n + \frac{2^n n^2}{5}.$$

Karena $a_0 = 0, a_1 = 1$, dan $a_2 = -1$, diperoleh

$$0 = a \cdot 2^0 + b \cdot 0 \cdot 2^0 + c \cdot (-3)^0 + \frac{2^0 \cdot 0^2}{5} \implies 0 = a + c. \tag{1}$$

$$1 = a \cdot 2^1 + b \cdot 1 \cdot 2^1 + c \cdot (-3)^1 + \frac{2^1 \cdot 1^2}{5} \implies \frac{3}{5} = 2a + 2b + c. \tag{2}$$

$$-1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \cdot 2^2 + c \cdot (-3)^2 + \frac{2^2 \cdot 2^2}{5} \implies -\frac{21}{5} = 4a + 8b + 9c. \tag{3}$$

Dari (1), diperoleh $c = -a$. Substitusikan ke persamaan (2) dan (3), maka $\frac{3}{5} = 5a + 2b$ dan $-\frac{21}{5} = 8b - 5a$. Jumlahkan kedua persamaan yang baru diperoleh, maka $\frac{-18}{5} = 10b \iff b =$

$-\dfrac{9}{25}$. Dari sini, diperoleh $\dfrac{3}{5} = 5a + 2b \iff a = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{5} - 2b\right) = \dfrac{33}{125}$ dan $c = -a = -\dfrac{33}{125}$. Jadi,

$$a_n = \boxed{\frac{33 \cdot 2^n}{125} - \frac{9n \cdot 2^n}{25} - \frac{33 \cdot (-3)^n}{125} + \frac{2^n \cdot n^2}{5}}.$$

SOAL NOMOR 2

Diberikan matriks transisi DFA sebagai berikut, di mana A sebagai state initial dan D sebagai state final.

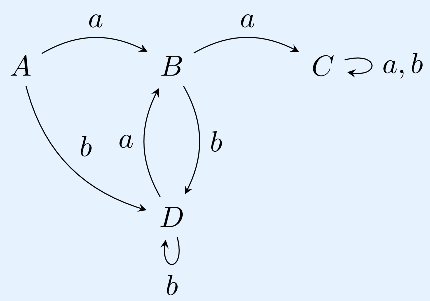
State\Input	a	b
A	B	D
B	C	D
C	C	C
D	B	D

(a) Gambarlah graf berarah yang mendeskripsikan DFA (*Deterministic Finite Automata*).

(b) Tentukan grammar G dari bahasa yang diterima oleh DFA dengan matriks transisi di atas.

Solusi:

(a) Graf DFA di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



(b) Grammar $G = (N, T, A, P)$ dengan

$$N = \{A, B, C, D\}$$
$$T = \{a, b\}$$
$$P = \{A \to aB, A \to bD, B \to aC, B \to bD, C \to aC, C \to bC, D \to aB, D \to bD, D \to \lambda\}$$

SOAL NOMOR

3

Dekripsikan chipertext LNGIHGYBVRENJYQO dengan menggunakan Hill-2 chiper, jika empat plaintext terakhirnya merupakan ATOM.
Catatan: konversi hurufnya $A = 1, B = 2, \cdots$, dan $Z = 0$.

Solusi:

Misalkan matriks Hill-2 chiper yang dimaksud adalah $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Misalkan dekripsi dari L, N, G, I, H, G, dan seterusnya sebagai X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, dan seterusnya sebagaimana tabel berikut.

Dekripsi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	A	T	O	M
Bilangan	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	1	20	15	13
Enkripsi	L	N	G	I	H	G	Y	B	V	R	G	N	J	Y	Q	O
Bilangan	12	14	7	9	8	7	25	2	22	18	5	11	10	25	17	15

Entri-entri pada matriks akan dikerjakan dalam modulo 26. Karena ATOM dienkripsi sebagai JYQO, maka

$$A\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 20 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 25 & 15 \end{bmatrix} \implies A = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 25 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 20 & 13 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -6 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{13-66}\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-53}\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maka

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -1 & -11 \end{bmatrix}\left(-\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -76 & -101 \\ 79 & 22 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 22 \end{bmatrix}.$$

Maka invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 22 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\cdot 22 - 3\cdot 1}\begin{bmatrix} 22 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 22 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 22 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 & -21 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 5 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa proses enkripsi yang dilakukan adalah

$$A\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & 1 & 15 \\ a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & 20 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 25 & 22 & 5 & 10 & 17 \\ 14 & 9 & 7 & 2 & 18 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & 1 & 15 \\ a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & 20 & 13 \end{bmatrix} &= A^{-1} \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 25 & 22 & 5 & 10 & 17 \\ 14 & 9 & 7 & 2 & 18 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 24 & 5 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 25 & 22 & 5 & 10 & 17 \\ 14 & 9 & 7 & 2 & 18 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 25 & 22 & 5 & 10 & 17 \\ 14 & 9 & 7 & 2 & 18 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 46 & 31 & 19 & 12 & -32 & 60 & 105 & 41 \\ 112 & 77 & 42 & 35 & -84 & 161 & 280 & 91 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 20 & 5 & 19 & 12 & 20 & 8 & 1 & 15 \\ 8 & 25 & 16 & 9 & 20 & 5 & 20 & 13 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jadi, pesan dekripsinya adalah $\boxed{\text{THEYSPLITTHEATOM}}$.

Soal Nomor

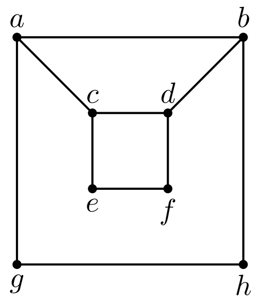
4

Diberikan graf G dalam diagram berikut.

(a). Buktikan bahwa pada graf G berlaku

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2|E(G)|.$$

(b). Tentukan subgraf $G - d$ dan $G - c$, kemudian selidiki apakah kedua graf tersebut saling isomorfik dan berikan penjelasannya.



Solusi:

(a) Tinjau

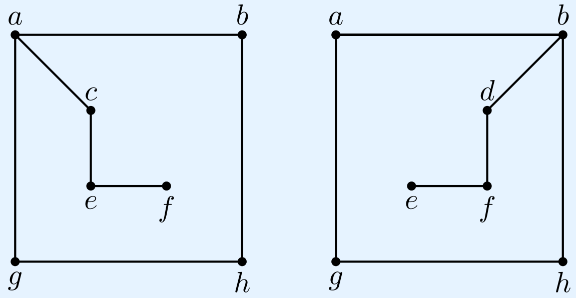
$$\deg(a)+\deg(b)+\deg(c)+\deg(d)+\deg(e)+\deg(f)+\deg(g)+\deg(h) = 3+3+3+3+2+2+2+2 = 20.$$

Di sisi lain,

$$E(G) = \{ab, ac, ag, bh, bd, cd, ce, df, fe, gh\} \implies |E(G)| = 10.$$

Diperoleh $\displaystyle\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2|E(G)|$ seperti yang ingin dibuktikan.

(b) Subgraf $G - d$ dan subgraf $G - c$ disajikan pada gambar berikut (kiri ke kanan).



Tinjau pemetaan $\varphi : G - d \to G - c$ dengan $\varphi(a) = b, \varphi(b) = a, \varphi(c) = d, \varphi(d) = c, \varphi(e) = f, \varphi(f) = e, \varphi(g) = h$, dan $\varphi(h) = g$. Dapat diperiksa bahwa untuk setiap $x, y \in G - d$ dengan x dan y bertetangga jika dan hanya jika $f(x)$ bertetangga dengan $f(y)$ (diserahkan kepada pembaca). Hal ini menunjukkan graf $G - d$ dan $G - c$ isomorfik.