Soal dan Solusi UTS Matematika Dasar 2 Tahun 2023

Wildan Bagus Wicaksono — wildan.wicaksono_32

Mathematics MIP 4.0

1. Soal

1. Diketahui fungsi $f(x,y) = 100 + 2x - \frac{1}{4}x^2y^2$ yang menyatakan temperatur pada suatu daerah.

   (a) Dapatkan semua turunan parsial $f(x,y)$ orde pertama dan kedua.

   (b) Dapatkan turunan berarah $f(x,y)$ di titik $P = (1,3)$ dengan arah vektor $\mathbf{v} = (2,2)$.

   (c) Pada titik $P = (1,3)$, tentukan arah sehingga temperatur berubah (meningkat) paling cepat.

2. Dapatkan polinomial Taylor derajat dua untuk fungsi $f(x,y) = e^y \cos(x)$ pada titik $(0,0)$.

3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x,y) = y+3x$ yang memenuhi kendala/constrain $x^2 + y^2 = 10$.

4. Hitunglah integral lipat dua

$$\int_0^1 \int_0^{2y} xe^{y^3}\, dx\, dy.$$

2. Pembahasan

Soal 1: Turunan Parsial dan Turunan Berarah

Diketahui fungsi $f(x,y) = 100 + 2x - \frac{1}{4}x^2y^2$ yang menyatakan temperatur pada suatu daerah.

(a) Dapatkan semua turunan parsial $f(x,y)$ orde pertama dan kedua.

(b) Dapatkan turunan berarah $f(x,y)$ di titik $P = (1,3)$ dengan arah vektor $\mathbf{v} = (2,2)$.

(c) Pada titik $P = (1,3)$, tentukan arah sehingga temperatur berubah (meningkat) paling cepat.

Solusi.

(a) Semua turunan parsial orde pertama $f(x,y)$ adalah

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = 0 + 2 - \frac{1}{4} \cdot 2x \cdot y^2 = \boxed{2 - \frac{1}{2}xy^2}, \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2 \cdot 0 - \frac{1}{4}x^2 \cdot 2y = \boxed{-\frac{1}{2}x^2y}. \end{aligned}$$

Semua turunan parsial orde kedua dari $f(x,y)$ adalah

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2 - \frac{1}{2}xy^2\right) = 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y^2 = \boxed{-\frac{1}{2}y^2}, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2 - \frac{1}{2}xy^2\right) = 0 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y = \boxed{-xy}, \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}x^2y\right) = -\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot y = \boxed{-xy}, \\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}x^2y\right) = -\frac{1}{2}x^2 \cdot 1 = \boxed{-\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

(b) Turunan berarah f di (a,b) dengan arah vektor $\mathbf{v}$ dapat ditentukan dengan

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\nabla f(a,b)\| \cos\theta$$

di mana $\nabla f = (f_x, f_y)$. Dari (a), diperoleh $\nabla f = \left(2 - \frac{1}{2}xy^2, -\frac{1}{2}x^2y\right)$ yang berarti

$$\nabla f(1,3) = \left(2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2, -\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 3\right) = \left(2 - \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Selain itu, diperoleh juga

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(2,2)}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{(2,2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dari sini diperoleh turunan berarah $f(x,y)$ di titik $P(1,3)$ dengan arah vektor $\mathbf{v} = (2,2)$ adalah

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \nabla f(1,3)\cdot\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{5}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{8}{2\sqrt{2}} = \boxed{-2\sqrt{2}}.$$

(c) Arah pada titik $P = (1,3)$ sehingga temperatur berubah paling cepat saat arah yang diambil searah dengan vektor

$$\nabla f(1,3) = \left(2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 3\right) = \boxed{\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)},$$

yaitu dengan kelajuan temperator $\|\nabla f(1,3)\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Soal 2: Deret Taylor

Dapatkan polinomial Taylor derajat dua untuk fungsi $f(x,y) = e^y \cos(x)$ pada titik $(0,0)$.

Solusi. Polinomial Taylor derajat 2 dari f di titik (a,b) dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{f_{xx}(a,b)}{2}(x-b)^2 \\ &\quad + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{f_{yy}(a,b)}{2}(y-b)^2. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk $f(x,y) = e^y \cos(x)$ berlaku

$$f_x = -e^y \sin(x), \quad f_y = e^y \cos(x), \quad f_{xx} = -e^y \cos(x), \quad f_{xy} = -e^y \sin(x), \quad f_{yy} = e^y \cos(x).$$

Dengan mengambil nilai masing-masing turunan parsial orde pertama dan kedua di titik $(0,0)$, diperoleh

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 1, \quad f_{xx}(0,0) = -1, \quad f_{xy}(0,0) = 0, \quad f_{yy}(0,0) = 1.$$

Jadi, polinomial Taylor derajat dua untuk fungsi $f(x,y) = e^y \cos(x)$ di titik $(0,0)$ adalah

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx 1 + 0 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) + \frac{-1}{2}(x-0)^2 + 0 \cdot (x-0)(y-0) + \frac{1}{2}(y-0)^2 \\ &= \boxed{1 + y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2}. \end{aligned}$$

Soal 3: Lagrange Multiplier

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x,y) = y+3x$ yang memenuhi kendala/constrain $x^2+y^2 = 10$.

Solusi. Diberikan fungsi tujuan $f(x,y) = y+3x$ dan fungsi kendala $g(x,y) = x^2+y^2-10$. Bentuk fungsi

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = y + 3x + \lambda\left(x^2+y^2-10\right).$$

Syarat perlu agar nilai minimum dan maksimum dari f tercapai diperoleh dengan menyelesaikan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0.$$

Diperoleh sistem persamaan

$$3 + 2x\lambda = 0, \quad 1 + 2y\lambda = 0, \quad x^2+y^2-10 = 0.$$

Perhatikan bahwa $x\lambda = -\dfrac{3}{2}$ dan $y\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Dari sini jelas bahwa $x, y, \lambda \neq 0$ dan dapat dituliskan pula

$$x\lambda = -\frac{3}{2} \implies x = -\frac{3}{2\lambda}, \quad y\lambda = -\frac{1}{2} \implies y = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Berdasarkan $x^2+y^2-10 = 0 \iff 10 = x^2+y^2$, maka

$$10 = x^2+y^2 = \left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{10}{4\lambda^2}$$

sehingga diperoleh $\lambda^2 = \dfrac{1}{4} \iff \lambda = \pm\dfrac{1}{2}$.

- Jika $\lambda = \dfrac{1}{2}$, maka $x = -\dfrac{3}{2\lambda} = -3$ dan $y = -\dfrac{1}{2\lambda} = -1$. Diperoleh $f(-3,-1) = -1+3(-3) = -10$.
- Jika $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, maka $x = -\dfrac{3}{2\lambda} = 3$ dan $y = -\dfrac{1}{2\lambda} = 1$. Diperoleh $f(3,1) = 1+3(3) = 10$.

Jadi, nilai minimum dan maksimum dari $f(x,y)$ berturut-turut adalah $\boxed{-10}$ dan $\boxed{10}$.

Soal 4: Integral Lipat

Hitunglah integral lipat dua

$$\int_0^1 \int_0^{2y} x e^{y^3}\, dx\, dy.$$

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2y} x e^{y^3}\, dx\, dy &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 e^{y^3}\right]_{x=0}^{x=2y} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(2y)^2 e^{y^3} - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot e^{y^3}\right) dy \\
&= \int_0^1 2y^2 e^{y^3}\, dy.
\end{aligned}$$

Misalkan $u = y^3$, maka $du = 3y^2\, dy$. Batas bawah integral menjadi $u_b = 0^3 = 0$ dan batas atas integral menjadi $u_a = 1^3 = 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{2y} x e^{y^3}\, dx\, dy &= \int_0^1 2y^2 e^{y^3}\, dy \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 e^{y^3} \cdot 3y^2\, dy \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 e^u\, du \\
&= \frac{2}{3} \left[e^u\right]_{u=0}^{u=1} \\
&= \frac{2}{3} \left(e^1 - e^0\right) \\
&= \boxed{\frac{2(e-1)}{3}}.
\end{aligned}$$