Soal dan Solusi UAS Matematika Dasar 2 Tahun 2023

Wildan Bagus Wicaksono – wildan.wicaksono_32

Mathematics MIP 4.0

1. Soal

1. Hitung integral lipat dua berikut dengan koordinat polar:

$$\iint \sqrt{4-x^2-y^2}\, dA$$

terhadap daerah S, dengan S merupakan daerah pada lingkaran $x^2+y^2=4$ dari $y=0$ sampai $y=x$.

2. Diberikan benda padat E yang berada di atas bidang-xy, di bawah $z=8-y$, dibatasi oleh $x=3$ dan $y=0$.

   (a). Gambarlah benda padat E.

   (b). Gunakan integral lipat tiga untuk menghitung volume E.

3. Dengan menggunakan barisan jumlahan parsial S_n, tentukan apakah deret $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, dapatkan jumlah parsialnya.

4. Dengan menggunakan uji deret yang tepat, tentukan deret berikut konvergen atau divergen.

   (a). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\sin n)(1+\sin n)}{n^2+8n+1}$.

   (b). $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$.

2. Pembahasan

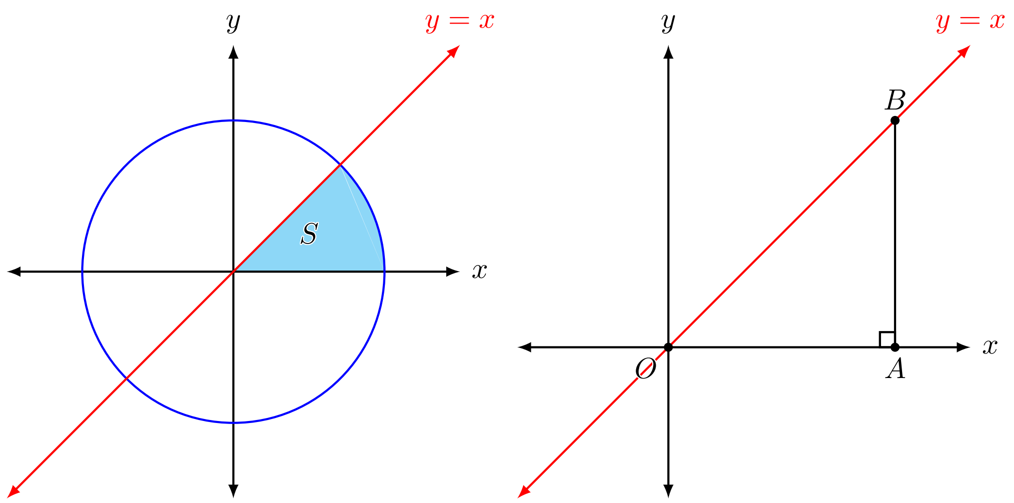
Soal 1: Integral Lipat Dua

Hitung integral lipat dua berikut dengan koordinat polar:

$$\iint \sqrt{4-x^2-y^2}\,dA$$

atas daerah S, dengan S merupakan daerah pada lingkaran $x^2+y^2=4$ dari $y=0$ sampai $y=x$.

Solusi. Dalam hal ini akan ditentukan $\displaystyle\iint_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,dA$ di mana S daerah lingkaran $x^2+y^2=4$ yang dibatasi $y=0$ dan $y=x$. Daerah S dapat diperhatikan pada gambar berikut. Pilih sebuah titik pada garis $y=x$, misalkan $B=(1,1)$. Buat proyeksi di sumbu-x sedemikian sehingga AB tegak lurus sumbu-x, diperoleh $A=(1,0)$.



Dari sini diperoleh panjang $OA=AB=1$ yang berarti OAB merupakan segitiga siku-siku sama kaki, maka $\angle AOB = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Konversikan daerah S ke dalam koordinat polar, yaitu himpunan titik-titik (x,y) dengan $x=r\cos(\theta)$ dan $y=r\sin(\theta)$ di mana $0\le r\le 2$ dan $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$. Diperoleh

$$x^2+y^2=4r^2\cos^2(\theta)+4r^2\sin^2(\theta)=4r^2\left[\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right]=4r^2.$$

Pengintegralan dapat ditulis menjadi

$$\iint_S \sqrt{4-x^2-y^3}\,dA=\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \sqrt{4-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta.$$

Misalkan $u = 4 - r^2$, maka $du = -2r\ dr$ yang berarti $r\ dr = -\dfrac{du}{2}$. Batas atas menjadi $u_{\text{atas}} = 4 - 2^2 = 0$ dan batas bawah menjadi $u_{\text{bawah}} = 4 - 0^2 = 4$, dari sini pengintegralan menjadi

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \sqrt{4-r^2}\cdot r\ dr\ d\theta &= \int_0^{\pi/4}\int_4^0 \sqrt{u}\ \frac{du}{-2}\ d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{u=4}^{u=0}\ d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi/4} \left(0^{3/2} - 4^{3/2}\right)\ d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} -8\ d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\left(-8\theta\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \\
&= -\frac{1}{3}\Big[-8\cdot\frac{\pi}{4} - (-8\cdot 0)\Big] \\
&= \boxed{\frac{2\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Catatan. Untuk mengonversi pengintegralan ke koordinat polar dilakukan atas suatu daerah S dengan melakukan substitusi $x = r\cos(\theta)$ dan $y = r\sin\theta$, kemudian pengintegralan menjadi

$$\iint_S f(x,y)\ dS = \iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\ dr\ d\theta.$$

Salah satu aplikasi dalam pengintegralan lipat dua adalah menentukan luas suatu daerah S. Dalam hal ini, daerah S diperoleh dengan memilih $f(x,y) = 1$, yaitu

$$\text{Luas daerah } S = \iint_S 1\ dS = \iint_S dS.$$

Sebagai contoh, luas daerah S pada soal di atas dapat ditentukan dengan

$$\iint_S 1\ dS = \int_0^{\pi/4}\int_0^2 1\cdot r\ dr\ d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{r}\Big|_{r=0}^{r=2}\ d\theta = \int_0^{\pi/4} 2\ d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Hal ini bersesuaian apabila menggunakan formula luas lingkaran yang telah dipelajari di bangku sekolah, yaitu

$$\frac{45^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 2^2 = \frac{1}{8}\pi\cdot 4 = \frac{\pi}{2}.$$

Soal 2: Pengaplikasian Integral Lipat Tiga

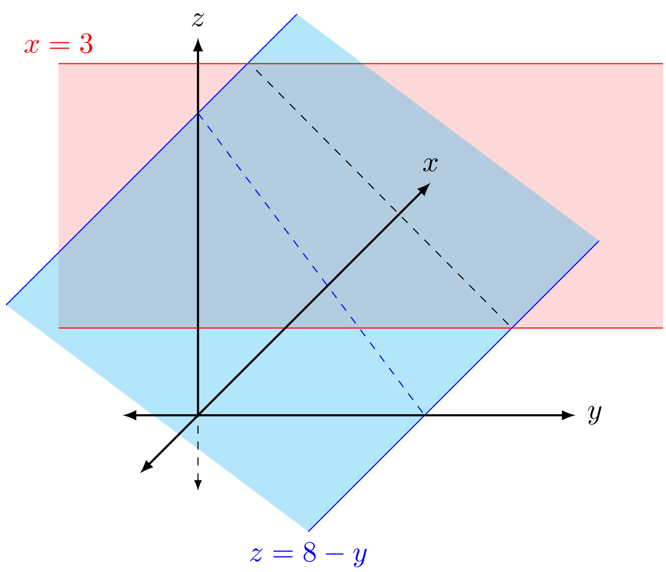
Diberikan benda padat E yang berada di atas bidang-xy, di bawah $z = 8 - y$, dibatasi oleh $x = 3$ dan $y = 0$.

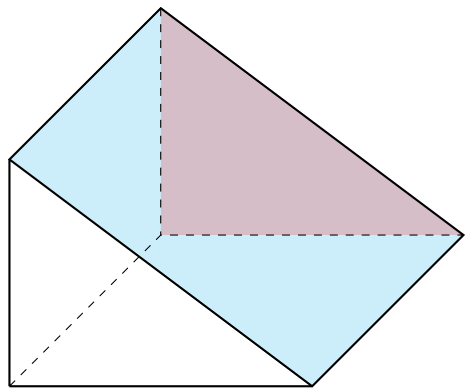
(a). Gambarlah benda padat E.

(b). Gunakan integral lipat tiga untuk menghitung volume E.

Solusi.

(a). Apabila dipandang di bidang-yz, maka $z = 8 - y$ merepresentasikan sebuah garis (di bidang tersebut). Karena x bernilai sebarang, maka garis tersebut dapat diperluas menjadi bidang searah sumbu-x. Dengan cara yang sama dapat dilakukan untuk garis $x = 3$ dan $y = 0$.

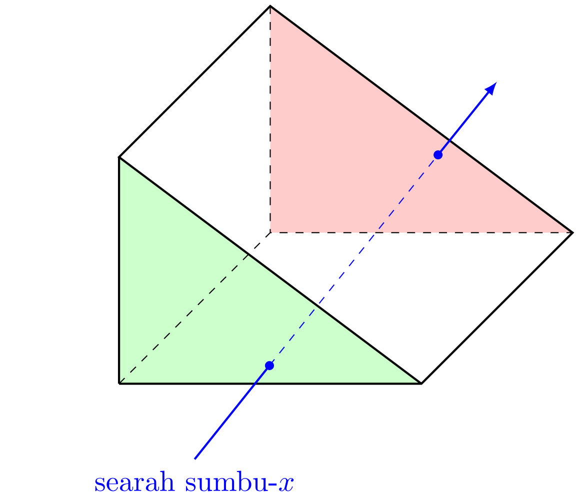


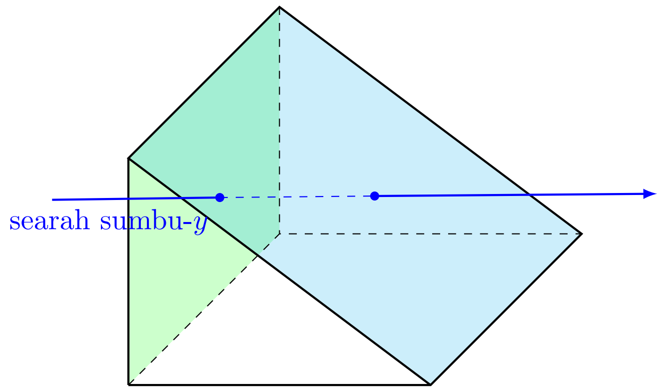


(b). Akan dipilih dengan urutan $dx\ dy\ dz$, yaitu volume benda E dapat ditentukan dengan

$$\iiint_E 1\ dV = \iiint_E 1\ dx\ dy\ dz.$$

Searah sumbu-x, mengenai permukaan $x = 0$ terlebih dahulu lalu permukaan $x = 3$. Searah sumbu-y, mengenai permukaan $y = 0$ terlebih dahulu lalu permukaan $y = 8 - z$. Terakhir, batas z adalah 0 sampai 3.





Jadi, volume benda padat E adalah

$$\begin{aligned}\iiint\limits_E 1\ dx\ dy\ dz &= \int\limits_0^8 \int\limits_0^{8-z} \int\limits_0^3 1\ dx\ dy\ dz \\ &= \int\limits_0^8 \int\limits_0^{8-z} 3\ dy\ dz \\ &= \int\limits_0^8 24 - 3z\ dz \\ &= \boxed{96}.\end{aligned}$$

Catatan. Solusi di atas dapat diverivikasi menggunakan volume prisma tegak segitiga yang telah dipelajari di bangku sekolah, yaitu

$$\frac{1}{2} \cdot L_{\text{alas}} \cdot \text{tinggi} = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 8) \cdot 8 = 96.$$

Tentu saja dapat menggunakan metode lain untuk urutan $dx\ dy\ dz$, contohnya

$$\int\limits_0^8 \int\limits_0^{8-y} \int\limits_0^3 dz\ dy\ dx, \quad \int\limits_0^3 \int\limits_0^8 \int\limits_0^{8-z} dx\ dz\ dy, \quad \text{dan lain-lain.}$$

Soal 3: Masalah Deret Dengan Jumlahan Parsial

Dengan menggunakan barisan jumlahan parsial S_n, tentukan apakah deret $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ konvergen atau divergen. Jika konvergen, dapatkan jumlah parsialnya.

Solusi. Perhatikan bahwa $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$, misalkan

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+b(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}.$$

Dalam hal ini dapat dipilih $a + b = 0$ dan $a - b = 2$, diperoleh $a = 1$ dan $b = -1$. Jadi,

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}.$$

Misalkan $S_k = \displaystyle\sum_{n=2}^{k} \frac{2}{n^2-1}$. Diperoleh

$$S_k = \sum_{n=2}^{k+1} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{k+1} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}..$$

Karena

$$S_\infty = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{3}{2} - 0 - 0 = \frac{3}{2},$$

ini berarti deret $S_\infty = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ konvergen, yaitu konvergen ke $\boxed{\frac{3}{2}}$.

Catatan. Sebelum membahas tentang deret telah dibahas mengenai kekonvergenan barisan. Diberikan barisan $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Untuk memerika kekonvergenan barisan tersebut, maka cukup diperiksa bahwa $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n$ memiliki nilai limit yang berhingga atau tidak (atau tidak ada nilai limitnya). Sedangkan, dalam permasalahan deret dapat dipandang secara analog. Perhatikan jumlah suku-suku pertama dari barisan $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, yaitu

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \cdots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad \cdots$$

dapat dipandang sebagai barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Oleh karena itu, untuk memperhatikan apakah deret dari barisan $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen sama saja dengan memerhatikan kekonvergenan dari barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, yaitu dengan mempertimbangkan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$. Ini merupakan tekhnik paling sederhana dalam menyelesaikan kekonvergenan deret.

Soal 4: Permasalahan Deret dengan Uji Deret

Dengan menggunakan uji deret yang tepat, tentukan deret berikut konvergen atau divergen.

(a). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\sin n)(1+\sin n)}{n^2+8n+1}$.

(b). $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1}$.

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\sin n)(1+\sin n)}{n^2+8n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\sin^2 n}{n^2+8n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+8n+1}.$$

Perhatikan bahwa $0 \le \cos^2 n \le 1$, oleh karena itu $0 \le \dfrac{\cos^2 n}{n^2+8n+1} < \dfrac{1}{n^2+8n+1}$. Karena $n^2+8n+1 > n^2$ untuk setiap $n = 0, 1, 2, \cdots$, maka

$$0 \le \frac{\cos^2 n}{n^2+8n+1} \le \frac{1}{n^2+8n+1} < \frac{1}{n^2} \implies 0 \le \frac{\cos^2 n}{n^2+8n+1} < \frac{1}{n^2}.$$

Karena $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+8n+1}$ juga konvergen. Akibatnya,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+8n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+8n+1} \quad \boxed{\text{konvergen}}.$$

(b). Perhatikan bahwa $\cos(n\pi) = (-1)^n$, ini berarti $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n\cos(n\pi)}{2n^2+1} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n}{2n^2+1}(-1)^n$.

Misalkan $f(x) = \dfrac{4x}{2x^2+1}$, maka

$$f'(x) = \frac{4-8x^2}{(2x^2+1)^2} < 0 \quad \text{untuk } x \ge 1.$$

Jadi, $f(x)$ barisan turun tegas di interval $[1, \infty)$ yang menunjukkan pula barisan $\left\{\dfrac{4n}{2n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ barisan turun tegas. Di sisi lain,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{2+0} = 0.$$

Dari sini, dapat disimpulkan bahwa $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n}{2n^2+1}(-1)^n$ $\boxed{\text{konvergen}}$.

Catatan. Pada bagian (a) menggunakan uji banding biasa. Misalkan diberikan barisan a_n dan b_n di mana $a_n, b_n \geq 0$ serta $a_n \leq b_n$ untuk setiap n.

- Jika $\sum b_n$ konvergen, maka $\sum a_n$ konvergen.
- Jika $\sum a_n$ divergen, maka $\sum b_n$ divergen.

Selain itu, menggunakan uji deret-p; yaitu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \leq 1$.

Pada bagian (b) merupakan deret yang berganti tanda dan dapat dikerjakan menggunakan teorema berikut. Diberikan barisan a_n yang memenuhi:

(i). $a_n \geq 0$.

(ii). a_n barisan turun tegas.

(iii). $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Maka $\sum a_n(-1)^n$ konvergen.