# Soal dan Solusi UAS Matematika Dasar 1 Tahun 2022

Wildan Bagus Wicaksono – wildan.wicaksono_32

Mathematics MIP 4.0

## 1. Soal

1. Misalkan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kontinu di $\mathbb{R}^+$ dan

$$\int_1^{x^2} f(t)\, dt = x^2\sqrt{x} - 1.$$

   Tentukan fungsi $f(x)$.

2. Hitunglah integral $\displaystyle\int \frac{1}{t}\sin(1 - \ln(t))\, dt$.

3. Selesaikan integral tak wajar berikut konvergen atau divergen.

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx.$$

4. Hitunglah volume benda putar yang dibentuk, jika luasan daerah $R$ yang dibatasi oleh kurva $y = 10 - 2x$, $y = x + 1$, dan $y = 7$ diputar mengelilingi garis $x = -4$. Gambarlah terlebih dahulu daerah $R$.

## 2. Pembahasan

**Soal 1: Penerapan Teorema Fundamental Kalkulus**

Misalkan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kontinu di $\mathbb{R}^+$ dan

$$\int_1^{x^2} f(t)\ dt = x^2\sqrt{x} - 1.$$

Tentukan fungsi $f(x)$.

*Solusi.* Misalkan $u = x^2$ maka $\dfrac{du}{dx} = 2x$. Turunkan kedua ruas dan dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\sqrt{x} - 1\right) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} f(t)\ dt = \left(\frac{d}{du}\int_1^{u} f(t)\ dt\right)\frac{du}{dx} = f(u)\cdot 2x = 2xf\left(x^2\right).$$

Tulis $x^2\sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$. Maka diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\sqrt{x} - 1\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}} - 1\right) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - 0 = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}.$$

Dari sini diperoleh $2xf\left(x^2\right) = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. Ini berarti

$$f\left(x^2\right) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{2}}.$$

Misalkan $y = x^2$ di mana $y > 0$ (karena $x > 0$ berdasarkan domain $f$), maka $x = \sqrt{y}$. Ini berarti

$$f(y) = \frac{5}{4}\left(\sqrt{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}y^{\frac{1}{4}} \implies \boxed{f(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}}$$

untuk setiap $x > 0$.

---

Catatan. Teorema Fundamental Kalkulus yang digunakan adalah

$$\frac{d}{dx}\int_c^{x} f(t)\ dt = f(x)$$

di mana $c$ suatu konstanta. Karena bentuk batas bukanlah $x$, yakni berbentuk $x^2$, maka dari itu perlu dilakukan permisalan $u = x^2$ dan menerapkan aturan rantai $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{dg}{du}\,\dfrac{du}{dx}$ di mana $g(x) = \displaystyle\int_c^{x} f(t)\ dt$.

**Soal 2: Tekhnik Pengintegralan**

Hitunglah integral $\displaystyle\int \frac{1}{t}\sin(1-\ln(t))\,dt$.

*Solusi.* Misalkan $u = 1 - \ln(t)$ sehingga diperoleh $\dfrac{du}{dt} = 0 - \dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{t}$. Maka dari itu didapatkan $du = -\dfrac{1}{t}\,dt$. Ini berarti

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{t}\sin(1-\ln(t))\,dt &= \int \sin(1-\ln(t))\cdot\left(\frac{1}{t}\,dt\right)\\
&= \int \sin(u)\,(-du)\\
&= \int -\sin(u)\,du\\
&= \cos(u) + C\\
&= \boxed{\cos(1-\ln(t)) + C}
\end{aligned}
$$

di mana $C$ suatu konstan.

## Soal 3: Pengintegralan Tak Wajar

Selesaikan integral tak wajar berikut konvergen atau divergen.

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx.$$

*Solusi.* Perhatikan bahwa

$$x^2+2x+5 = \left(x^2+2x+1\right)+4 = (x+1)^2+4 \implies \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{(x+1)^2+4}\, dx.$$

Selain itu didapatkan pula

$$\int_{\infty}^{-\infty} = \frac{dx}{(x+1)^2+4} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+4} = -\left[\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+4} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+4}\right].$$

Akan ditentukan

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2} + 4 = \lim_{n\to-\infty} \int_{n}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+4} \quad \text{dan} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \lim_{m\to\infty} \int_{0}^{m} \frac{dx}{(x+1)^2+4}.$$

Misalkan $u = x+1$, maka $du = dx$, maka

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{du}{u^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Ini berarti

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \lim_{n\to-\infty} \int_{n}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+4} &= \lim_{n\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_{n}^{0} \\
&= \lim_{n\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \lim_{m\to\infty}\int_0^m \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_0^m$$
$$= \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{m+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Dari sini diperoleh

$$\int_\infty^{-\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = -\left[\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x+1)^2+4} + \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2+4}\right]$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

yang berarti hasilnya konvergen.

---

Catatan. Konsep yang digunakan dalam pembahasan di atas adalah

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)\,dx \quad \text{dan} \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{m\to-\infty}\int_m^b f(x)\,dx$$

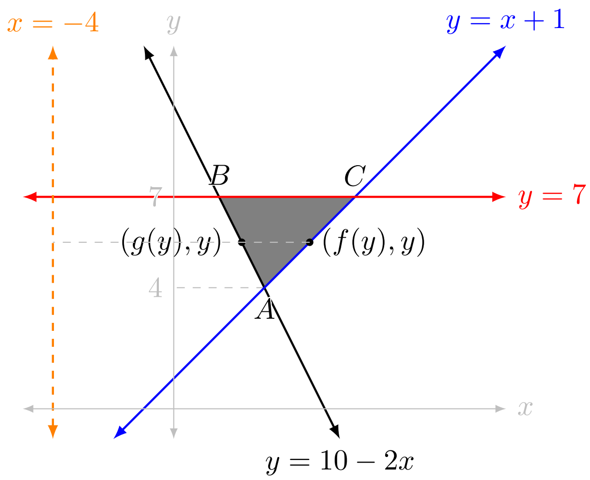
Selain itu diperlukan sifat

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

**Soal 4: Volume Benda Putar**

Hitunglah volume benda putar yang dibentuk, jika luasan daerah $R$ yang dibatasi oleh kurva $y = 10 - 2x$, $y = x + 1$, dan $y = 7$ diputar mengelilingi garis $x = -4$. Gambarlah terlebih dahulu daerah $R$.

*Solusi.* Daerah $R$ ditandai dengan daerah yang diarsir sebagaimana gambar berikut. Titik potong garis $y = x + 1$ dengan $y = 10 - 2x$ saat $x + 1 = 10 - 2x \iff x = 3$. Jadi, $A = (x, y) = (x, x + 1) = (3, 4)$. Perhatikan bahwa persamaan garis $AC$ adalah $y = x + 1$ yang berarti $x = y - 1$. Kemudian, persamaan garis $AB$ adalah $y = 10 - 2x$ yang berarti $x = 5 - \frac{y}{2}$. Tulis $f(y) = y - 1$ dan $g(y) = 5 - \frac{y}{2}$. Ambil titik $(x, y)$ di garis $AC$ yang berbentuk $(x, y) = (f(y), y) = (y - 1, y)$. Jarak titik ini dengan sumbu-$y$ adalah $f(y)$, maka jarak titik $(f(y), y)$ dengan garis $x = -4$ adalah $f(y) + 4 = y + 3$. Kemudian, pada garis $AB$ ambil titik $(g(y), y) = \left(5 - \frac{y}{2}, y\right)$. Jarak titik ini dengan sumbu-$y$ adalah $g(y) = 5 - \frac{y}{2}$, maka jarak titik tersebut dengan garis $x = -4$ adalah $g(y) + 4 = 9 - \frac{y}{2}$.




Dari daerah yang terbentuk, metode yang digunakan untuk menghitung volume adalah metode cincin. Karena batas $y$ pada daerah yang diarsir adalah 4 hingga 7, maka volumenya adalah

$$\begin{aligned}
\pi \int_4^7 \left[(f(y) + 4)^2 - (g(y) + 4)^2\right] dy &= \pi \int_4^7 \left[(y + 3)^2 - \left(9 - \frac{y}{2}\right)^2\right] dy \\
&= \pi \int_4^7 \left[y^2 + 6y + 9 - \left(81 - 9y + \frac{y^2}{4}\right)\right] dy \\
&= \pi \int_4^7 \left[y^2 + 6y + 9 - 81 + 9y - \frac{y^2}{4}\right] dy
\end{aligned}$$

$$= \pi \int_4^7 \left[\frac{3y^2}{4} + 15y - 72\right] \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^3}{4} + \frac{15y^2}{2} - 72y\right]_4^7$$

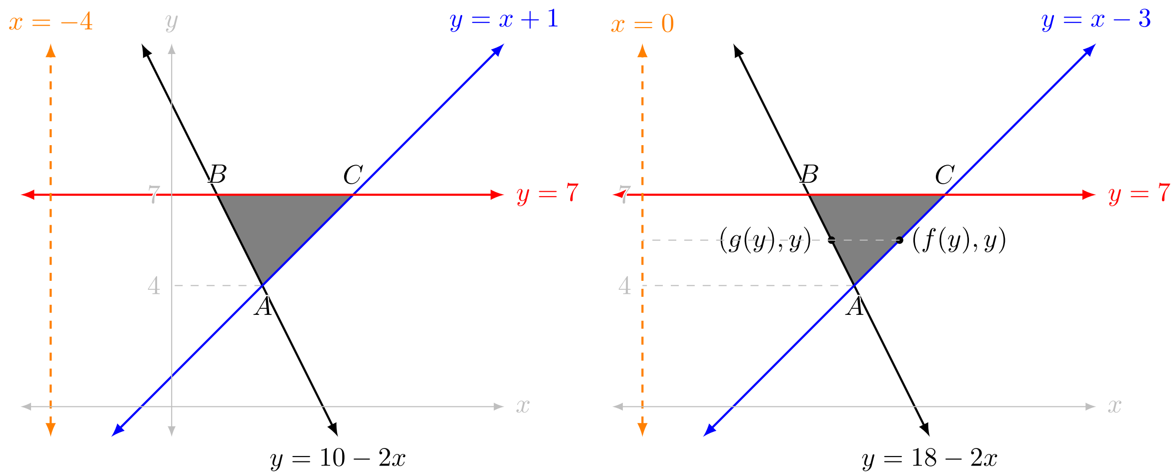
sehingga hasilnya adalah $\boxed{\dfrac{405\pi}{4}}$.

---

**Solusi Alternatif.** Daerah $R$ ditandai dengan daerah yang diarsir sebagaimana gambar berikut. Agar garis $x = -4$ dapat menjadi sumbu-$y$, geser bidang gambar berikut sejauh 4 satuan ke kanan. Setelah digeser diperoleh:

- Garis $x = -4$ menjadi garis $x = -4 + 4 = 0$ yang berarti menjadi sumbu-$y$.
- Garis $y = x + 1$ menjadi garis $y = (x - 4) + 1 = x - 3$.
- Garis $y = 10 - 2x$ menjadi garis $y = 10 - 2(x - 4) = 10 - 2x + 8 = 18 - 2x$.
- Garis $y = -7$ menjadi garis $y = -7$.

Perhatikan bahwa persamaan garis $y = x - 3 \iff x = y + 3$ serta persamaan garis $y = 18 - 2x \iff x = 9 - \dfrac{y}{2}$. Misalkan $f(y) = y + 3$ dan $g(y) = 9 - \dfrac{y}{2}$, tulis kembali persamaan garis $AC$ adalah $x = f(y)$ dan persamaan garis $AB$ adalah $x = g(y)$.




Titik potong garis $y = x - 3$ dan $y = 18 - 2x$ adalah $(x, y) = (7, 4)$. Dengan melihat bentuk daerah, maka dalam hal ini diselesaikan dengan metode cincin. Karena batas $y$ pada daerah yang diarsir adalah 4 hingga 7, maka volume dari hasil perputarannya adalah

$$\pi \int_4^7 \left(f(y)^2 - g(y)^2\right) dy = \pi \int_4^7 \left[(y+3)^2 - \left(9 - \frac{y}{2}\right)^2\right] = \boxed{\frac{405\pi}{4}}.$$