Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Kombinatorika

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

1 (a) Pada sebuah biro jodoh, terdapat 6 pria dan 6 gadis dengan informasi berikut. Pria P_1 saling kenal dengan G_1 dan G_2. Pria P_2 saling kenal dengan gadis G_1, G_2, G_3, dan G_4. Pria P_3 saling kenal dengan gadis G_2 dan G_3. Pria P_4 saling kenal dengan gadis G_3, G_4, dan G_5. Pria P_5 saling kenal dengan gadis G_4, G_5, dan G_6. Pria P_6 saling kenal dengan gadis G_4 dan G_5. Periksa apakah penjodohan tersebut dapat dilakukan dengan setiap pria dijodohkan dengan tepat satu gadis? Jelaskan jawaban Anda!

(b) Terdapat 6 kado hadiah yang dinomori $1, 2, 3, 4, 5$, dan 6 yang akan diberikan kepada 5 anak, yakni Ambrol, Babicon, Camicin, Damilon, dan Embrion. Diketahui informasi sebagai berikut. Ambrol menginginkan hadiah nomor 1 atau 3. Babicon menginginkan hadiah nomor $2, 4, 5$, atau 6. Camicin menginginkan hadiah nomor 2 atau 3. Damilon menginginkan hadiah nomor $1, 2$, atau 3. Embrion menginginkan hadiah nomor 2. Jika setiap anak hanya diberikan 1 hadiah saja, periksa apakah pembagian hadiah tersebut dilakukan agar setiap anak mendapatkan hadiah sesuai keinginannya? Jelaskan jawaban Anda!

2 Buktikan kesamaan berikut

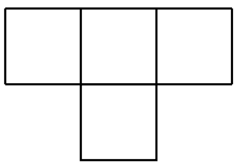
$$\binom{2022}{0}^2 + \binom{2022}{1}^2 + \binom{2022}{2}^2 + \ldots + \binom{2022}{2022}^2 = \binom{4044}{2022},$$

(a) secara aljabar menggunakan ekspansi binomial Newton $(1+x)^{4044}$,

(b) menggunakan prinsip Fubini (perhitungan dua cara berbeda) yakni dengan memandang banyak cara memilih 2022 orang dari grup yang memuat 2022 pria dan 2022 wanita.

3 Tiga buah dadu di tos masing-masing sekali. Dengan menggunakan fungsi pembangkit, tentukan banyak kemungkinan jumlah ketiga dadu 22.

4 Menggunakan prinsip paritas, buktikan bahwa petak-petak papan catur 10×10 tidak dapat ditutupi dengan 25 tetromino-T seperti gambar berikut.

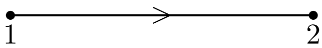


5 Periksa apakah barisan bilangan berikut dapat menjadi skor pada sebuah turnamen dengan 6 pemain. Bila ya, gambarkan graf lengkap berarah di mana garis menyatakan pemain 1 mengalahkan pemain 2. Bila tidak, berikan arguemntasi Anda!

(a) $5, 3, 3, 2, 2, 1$.

(b) $4, 3, 3, 3, 1, 1$.

(c) $5, 5, 2, 1, 1, 1$.



Soal Nomor 1

(a) Pada sebuah biro jodoh, terdapat 6 pria dan 6 gadis dengan informasi berikut. Pria P_1 saling kenal dengan G_1 dan G_2. Pria P_2 saling kenal dengan gadis G_1, G_2, G_3, dan G_4. Pria P_3 saling kenal dengan gadis G_2 dan G_3. Pria P_4 saling kenal dengan gadis G_3, G_4, dan G_5. Pria P_5 saling kenal dengan gadis G_4, G_5, dan G_6. Pria P_6 saling kenal dengan gadis G_4 dan G_5. Periksa apakah penjodohan tersebut dapat dilakukan dengan setiap pria dijodohkan dengan tepat satu gadis? Jelaskan jawaban Anda!

(b) Terdapat 6 kado hadiah yang dinomori $1, 2, 3, 4, 5$, dan 6 yang akan diberikan kepada 5 anak, yakni Ambrol, Babicon, Camicin, Damilon, dan Embrion. Diketahui informasi sebagai berikut. Ambrol menginginkan hadiah nomor 1 atau 3. Babicon menginginkan hadiah nomor $2, 4, 5$, atau 6. Camicin menginginkan hadiah nomor 2 atau 3. Damilon menginginkan hadiah nomor $1, 2$, atau 3. Embrion menginginkan hadiah nomor 2. Jika setiap anak hanya diberikan 1 hadiah saja, periksa apakah pembagian hadiah tersebut dilakukan agar setiap anak mendapatkan hadiah sesuai keinginannya? Jelaskan jawaban Anda!

Solusi:

(a) Jawabannya adalah $\boxed{\text{mungkin}}$. Perhatikan tabel berikut. Dinotasikan $P_i \sim G_i$ artinya P_i berpasangan dengan G_i.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
P_1	$*$		$*$			
P_2	$*$	$*$	$*$	$*$		
P_3		$*$	$*$			
P_4			$*$	$*$	$*$	
P_5				$*$	$*$	$*$
P_6				$*$	$*$	

Untuk menunjukkan ini mungkin, konstruksi

$$P_1 \sim G_1, \quad P_2 \sim G_2, \quad P_3 \sim G_3, \quad P_4 \sim G_4, \quad P_5 \sim G_6, \quad P_6 \sim G_5.$$

(b) Jawabannya adalah $\boxed{\text{tidak mungkin}}$.

	1	2	3	4	5	6
Ambrol	$*$		$*$			
Babicon			$*$	$*$	$*$	$*$
Camicin		$*$	$*$			
Damilon	$*$	$*$	$*$			
Embrion		$*$				

Perhatikan bahwa Ambrol, Camicin, Damilon, dan Embrion hanya bisa memilih dari hadiah $\{1, 2, 3\}$. Karena setiap orang mendapatkan tepat satu hadiah, maka tidak mungkin keempat orang tersebut mendapatkan hadiah sekaligus dari tiga kemungkinan hadiah yang tersedia.

Soal Nomor

2

Buktikan kesamaan berikut

$$\binom{2022}{0}^2 + \binom{2022}{1}^2 + \binom{2022}{2}^2 + \ldots + \binom{2022}{2022}^2 = \binom{4044}{2022},$$

(a) secara aljabar menggunakan ekspansi binomial Newton $(1+x)^{4044}$,

(b) menggunakan prinsip Fubini (perhitungan dua cara berbeda) yakni dengan memandang banyak cara memilih 2022 orang dari grup yang memuat 2022 pria dan 2022 wanita.

Solusi:

(a) Akan ditentukan koefisien dari x^{2022} dari $(1+x)^{4044}$ dengan dua cara. Dari binomial Newton,

$$(1+x)^{4044} = \sum_{k=0}^{4044} \binom{4044}{k} x^k$$

yang menunjukkan koefisien x^{2022} adalah $\binom{4044}{2022}$. Di sisi lain,

$$(1+x)^{4044} = \left[(1+x)^{2022}\right]^2 = \left[\sum_{k=0}^{2022} \binom{2022}{k} x^k\right]^2.$$

Dengan multinomial, koefisien x^{2022} dari ekspresi di atas adalah

$$\sum_{\substack{i+j=2022 \\ i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}} \binom{2022}{i}\binom{2022}{j} = \sum_{i=0}^{2022} \binom{2022}{i}\binom{2022}{2022-i} = \sum_{i=0}^{2022} \binom{2022}{i}\binom{2022}{i} = \sum_{i=0}^{2022} \binom{2022}{i}^2$$

karena $\binom{2022}{2022-i} = \binom{2022}{i}$. Ini menunjukkan $\binom{4044}{2022} = \sum_{i=0}^{2022} \binom{2022}{i}^2$ seperti yang ingin dibuktikan.

(b) Akan dibentuk sebuah grup yang terdiri dari 2022 orang, yaitu ada $\binom{4044}{2022}$ cara. Hal ini ekuivalen dengan membentuk sebuah grup yang terdiri dari i laki-laki dan $(2022-i)$

perempuan, yaitu ada sebanyak

$$\binom{2022}{i}\binom{2022}{2022-i} = \binom{2022}{i}\binom{2022}{i} = \binom{2022}{i}^2 \text{ cara}$$

untuk setiap $i = 0, 1, \ldots, 2022$. Maka dari itu banyaknya cara seluruhnya adalah $\displaystyle\sum_{i=0}^{2022} \binom{2022}{i}^2$ cara. Jadi, $\displaystyle\binom{4044}{2022} = \sum_{i=0}^{2022} \binom{2022}{i}^2$ seperti yang ingin dibuktikan.

Soal Nomor

3

Tiga buah dadu di tos masing-masing sekali. Dengan menggunakan fungsi pembangkit, tentukan banyak kemungkinan jumlah ketiga dadu 22.

Solusi:

Fungsi pembangkit dari masing-masing dadu adalah $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^6$. Dalam hal ini ekuivalen dengan menentukan koefisien x^{22} dari

$$\left(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^6\right)\left(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^6\right)\left(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^6\right)$$

yang senilai dengan $\left(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^6\right)^3$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\left(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^6\right)^3 &= \left(\frac{x\left(1 - x^6\right)}{1 - x}\right)^3 \\
&= \left(x - x^7\right)^3 (1 - x)^{-3} \\
&= \left(x^3 - 3x^9 + 3x^{15} - x^{21}\right)(1 - x)^{-3} \\
&= x^3 - 3x^9(1 - x)^{-3} + 3x^{15}(1 - x)^{-3} - x^{21}(1 - x)^{-3}.
\end{aligned}$$

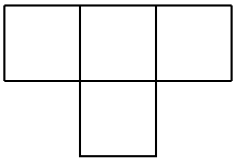
Menggunakan fakta bahwa $(1 - x)^{-(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k$ di mana n bilangan asli, diperoleh $(1 - x)^{-3} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{2} x^k$. Maka koefisien dari x^{22} adalah

$$\begin{aligned}
\binom{2+19}{2} - 3\binom{2+13}{2} + 3\binom{2+7}{2} - \binom{1+2}{2} &= \binom{21}{2} - 3\binom{15}{2} + 3\binom{9}{2} - \binom{3}{2} \\
&= \boxed{0}.
\end{aligned}$$

Komentar. Jelas hal ini memang tidak mungkin karena maksimal jumlah yang diperoleh adalah $6 + 6 + 6 = 18 < 22$.

Soal Nomor 4

Menggunakan prinsip paritas, buktikan bahwa petak-petak papan catur 10×10 tidak dapat ditutupi dengan 25 tetromino-T seperti gambar berikut.

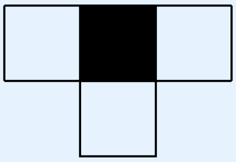


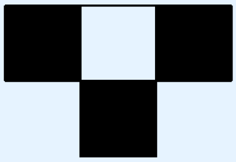
Solusi:

Andaikan hal ini mungkin. Warnai papan 10×10 layaknya papan catur dengan hitam putih, maka terdiri dari 50 petak berwarna putih dan 50 petak berwarna hitam. Jika sebuah tetromino-T diletakkan pada papan, maka akan memiliki 2 kemungkinan:

(i) Terdiri dari 3 hitam dan 1 putih,

(ii) Terdiri dari 1 putih dan 3 hitam.





Misalkan jenis (i) terdiri dari sebanyak A, sedangkan jenis (ii) terdiri dari sebanyak B. Karena setiap jenis (i) menutupi 3 hitam dan jenis (ii) menutupi 1 hitam, serta banyaknya petak hitam adalah 50, maka $3A + B = 50$. Secara analog, $A + 3B = 50$ yang memberikan $A = B = \dfrac{25}{2} \notin \mathbb{Z}$, kontradiksi. Terbukti bahwa hal ini tidak mungkin dilakukan.

Soal Nomor

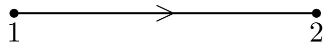
5

Periksa apakah barisan bilangan berikut dapat menjadi skor pada sebuah turnamen dengan 6 pemain. Bila ya, gambarkan graf lengkap berarah di mana garis menyatakan pemain 1 mengalahkan pemain 2. Bila tidak, berikan arguemntasi Anda!

(a) $5, 3, 3, 2, 2, 1$.

(b) $4, 3, 3, 3, 1, 1$.

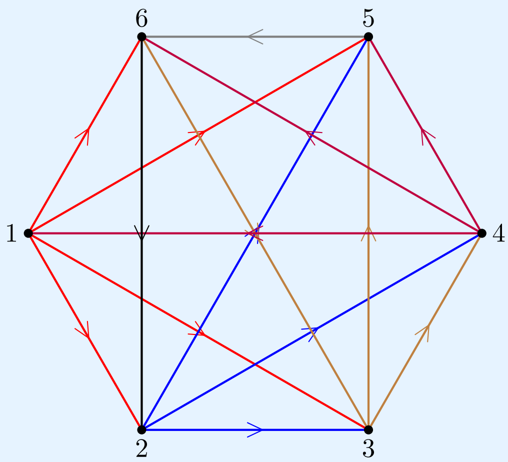
(c) $5, 5, 2, 1, 1, 1$.



Solusi:

(a) Hal ini $\boxed{\text{tidak mungkin}}$ karena $5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 = 16 \neq \binom{6}{2} = 15$.

(b) Hal ini $\boxed{\text{mungkin}}$ dengan konstruksi berikut. Sebagai keterangan lanjut, $1 \to 2, 3, 5, 6$; $2 \to 3, 4, 5$; $3 \to 4, 5, 6$; $4 \to 1, 5, 6$; $5 \to 6$; $6 \to 2$.



(c) Hal ini $\boxed{\text{tidak mungkin}}$ karena $2 + 1 + 1 + 1 = 5 < \binom{4}{2} = 6$.