Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Kalkulus Variasi

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

1 Buktikan bahwa kurva yang meminimumkan fungsional

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{1+(y')^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

yang melalui titik $(1, 0)$ dan $(2, 1)$ adalah sebuah lingkaran.

2 Dapat ekstermal yang meminimukan fungsional

$$\int_0^1 \left((y')^2 + y^2 - 8ye^{-2x}\right)\mathrm{d}x$$

jika diberikan batas $y(0) = 0$ dan $y(1) = 1$.

3 Dapatkan ekstermal dari fungsional

$$I = \int_0^T \left(\frac{1}{2}(y')^2 + yy' + y' + y\right)\,\mathrm{d}x$$

jika $T = 1$ tetap, tetapi $y(T)$ bebas.

Soal Nomor

1

Buktikan bahwa kurva yang meminimumkan fungsional

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{1+(y')^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

yang melalui titik $(1,0)$ dan $(2,1)$ adalah sebuah lingkaran.

Solusi:

Misalkan $f(x,y,y') = \sqrt{\dfrac{1+(y')^2}{x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}$. Berdasarkan persamaan Euler-Lagrange,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right).$$

Integralkan kedua ruas terhadap x, diperoleh

$$C = \frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}} \implies Cx = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \implies Cx\sqrt{1+(y')^2} = y'$$

di mana C suatu konstanta. Selain itu, dari sini haruslah $y' \geq 0$. Kuadratkan kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}
C^2x^2 + C^2x^2(y')^2 &= (y')^2 \\
C^2x^2 &= \left(1 - C^2x^2\right)(y')^2 \\
(y')^2 &= \frac{C^2x^2}{1-C^2x^2} \\
y' &= \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}} && (y' \geq 0) \\
y &= \int \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Misalkan $u = 1 - C^2x^2$, maka $\mathrm{d}u = -2C^2x\ \mathrm{d}x$ sehingga $Cx\ \mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}u}{2C}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{Cx\ \mathrm{d}x}{\sqrt{1 - C^2x^2}} \\ &= \int \frac{-\frac{1}{2C}\ \mathrm{d}u}{\sqrt{u}} \\ &= -\frac{1}{2C}\left(2\sqrt{u}\right) + D \\ &= -\frac{\sqrt{1 - C^2x^2}}{C} + D \end{aligned}$$

di mana D suatu konstan serta $C \neq 0$. Karena $y(1) = 0$ dan $y(2) = 1$, maka

$$D = -\frac{\sqrt{1 - C^2}}{C} \quad \text{dan} \quad D = -\frac{\sqrt{1 - 4C^2}}{C} + 1.$$

Maka haruslah

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{1 - C^2}}{C} &= -\frac{\sqrt{1 - 4C^2}}{C} + 1 \\ -\sqrt{1 - C^2} &= -\sqrt{1 - 4C^2} + C && (\text{kuadratkan}) \\ 1 - C^2 &= 1 - 4C^2 + C^2 - 2C\sqrt{1 - 4C^2} \\ 2C^2 &= 2C\sqrt{1 - 4C^2} && (C \neq 0) \\ C &= -\sqrt{1 - 4C^2} && (\text{kuadratkan}) \\ C^2 &= 1 - 4C^2 \\ C &= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Namun, dari $C = -\sqrt{1 - 4C^2}$ mengharuskan $C \leq 0$ sehingga $C = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Diperoleh

$$D = -\frac{\sqrt{1 - C^2}}{C} = -\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2.$$

Jadi,

$$y = -\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{5}x^2}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} + 2 = \sqrt{5 - x^2} + 2 \implies x^2 + (y - 2)^2 = 5$$

sebagai persamaan lingkaran yang berpusat di $(0, 2)$ dan panjang radius $\sqrt{5}$, terbukti.

SOAL NOMOR

2

Dapat ekstermal yang meminimumkan fungsional

$$\int_0^1 \left((y')^2 + y^2 - 8ye^{-2x}\right) \mathrm{d}x$$

jika diberikan batas $y(0) = 0$ dan $y(1) = 1$.

Solusi:

Misalkan $f(x, y, y') = (y')^2 + y^2 - 8ye^{-2x}$. Menurut persamaan Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\ &= 2y - 8e^{-2x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y') \\ \Longrightarrow y'' - y &= -4e^{-2x}. \end{aligned}$$

Akan ditinjau solusi dari PD homogen $y'' - y = 0$ yang memiliki persamaan karakteristik $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm 1$. Jadi, solusi homogennya adalah $y_h = Ae^x + Be^{-x}$ di mana A, B suatu konstanta. Misalkan solusi partikulirnya adalah $y_p = Ce^{-2x}$ di mana C suatu konstanta. Substitusikan,

$$-4e^{-2x} = y'' - y = 4Ce^{-2x} - Ce^{-2x} = 3Ce^{-2x} \implies C = -\frac{4}{3}.$$

Jadi,

$$y = y_h + y_p = Ae^x + Be^{-x} - \frac{4}{3}e^{-2x}.$$

Karena $y(0) = 0$ dan $y(1) = 1$, maka

$$A + B = \frac{4}{3} \quad \text{dan} \quad Ae + \frac{B}{e} = \frac{4}{3e^2} + 1 \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e & \frac{1}{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3e^2} + 1 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e & \frac{1}{e} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3e^2} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e^2 - 1} & \frac{e}{e^2 - 1} \\ \frac{e^2}{e^2 - 1} & -\frac{e}{e^2 - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3e^2} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^3 + 4e - 4e^2}{3e^3 - 3e} \\ \frac{4e^3 - 3e^2 - 4}{3e^3 - 3e} \end{bmatrix}.$$

Jadi, $A = \dfrac{3e^3 + 4e - 4e^2}{3e^3 - 3e}$ dan $B = \dfrac{4e^3 - 3e^2 - 4}{3e^3 - 3e}$ sehingga

$$y(x) = \boxed{\frac{3e^3 + 4e - 4e^2}{3e^3 - 3e} e^x + \frac{4e^3 - 3e^2 - 4}{3e^3 - 3e} e^{-x} - \frac{4}{3} e^{-2x}}$$

sebagai solusi ekstermalnya.

SOAL NOMOR

3

Dapatkan ekstermal dari fungsional

$$I = \int_0^T \left(\frac{1}{2}\left(y'\right)^2 + yy' + y' + y\right)\, \mathrm{d}x$$

jika $T = 1$ tetap, tetapi $y(T)$ bebas.

Solusi:

Akan dibagi kasus mengenai $y(0)$, yaitu $y(0)$ tetap dan $y(0)$ tidak tetap. Akan ditentukan solusi eksermal dari I. Misalkan $f\left(x, y, y'\right) = \frac{1}{2}\left(y'\right)^2 + yy' + y' + y$. Dari persamaan Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \\ &= y' + 1 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y' + y + 1\right) \\ &= y' + 1 - y'' - y' \\ &= 1 - y'' \end{aligned}$$

sehingga $y'' = 1 \implies y(x) = \frac{x^2}{2} + Ax + B$ di mana A, B suatu konstan.

- Jika $y(0) = B$ tetap. Karena $y(1)$ bernilai bebas, maka

  $$0 = \frac{\partial f}{\partial y'}(1) = y'(1) + y + 1 = 1 + A + \frac{1}{2} + A + B + 1 = \frac{5}{2} + 2A + B \implies A = -\frac{5 + 2B}{4}.$$

  Diperoleh solusinya $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5 + 2B}{4}x + B$ di mana B tetap.

- Jika $y(0) = B$ bebas. Substitusikan $y(x) = \frac{x^2}{2} + Ax + B$ pada I, diperoleh

  $$I = A^2 + \left(B + \frac{5}{2}\right)A + \left(\frac{3}{2}B + \frac{23}{24}\right)$$

  yang merupakan parabola. Dengan memilih $A, B \to -\infty$, titik puncak parabola semakin menjauhi sumbu-x sehingga $I \to -\infty$. Demikian juga jika $A, B \to \infty$ maka $I \to \infty$. Jadi, tidak ada solusi ekstermal.

Jadi,

- jika $y(0)$ tetap, solusi ekstermalnya adalah $y(x) = \boxed{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5+2B}{4}x + B}$ di mana $y(0) = B$.
- jika $y(0)$ bebas, $\boxed{\text{tidak ada solusi}}$ ekstermal.