Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Kalkulus III

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

1 Diketahui lintasan $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan sebagai $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Hitunglah panjang busur lintasan tersebut.

2 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Didefinisikan pemetaan linier $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Apakah T_A kontinu di mana-mana?

3 Diketahui fungsi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dan $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dengan $f(x, y, z) = \left(x^2y, z \sin y\right)$ dan $g(u, v) = \left(uv, u^2v^2, u + v, u^2 - v^2\right)$.

(a) Tentukan turunan total $\mathbf{D}f$ dan $\mathbf{D}g$.

(b) Tentukan fungsi $h = g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

(c) Tentukan turunan total $\mathbf{D}h$.

(d) Verivikasi dengan aturan rantai.

4 Diketahui fungsi $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Tentukan persamaan bindang singgung dari fungsi f di titik $(1, 2, f(1, 2))$.

Soal Nomor

1

Diketahui lintasan $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan sebagai $\phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Hitunglah panjang busur lintasan tersebut.

Solusi:

Perhatikan bahwa $\phi'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ sehingga diperoleh

$$\|\phi'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Jadi, panjang lintasannya adalah

$$\int_0^{2\pi} \|\phi'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, \mathrm{d}t = \left[t\sqrt{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \boxed{2\pi\sqrt{2}}.$$

Soal Nomor

2

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Didefinisikan pemetaan linier $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Apakah T_A kontinu di mana-mana?

Solusi:

Jawabannya adalah $\boxed{\text{ya}}$. Ambil sebarang $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, misalkan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Diperoleh

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa $x + 2y$ dan $3x + 4y$ merupakan polinomial dua variabel dalam x dan y yang mana kontinu di mana-mana. Karena masing-masing komponennya kontinu di mana-mana, ini berarti T_A juga kontinu di mana-mana.

Soal Nomor

3

Diketahui fungsi $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dan $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ dengan $f(x,y,z)=\left(x^2y, z\sin y\right)$ dan $g(u,v)=\left(uv, u^2v^2, u+v, u^2-v^2\right)$.

(a) Tentukan turunan total $\mathbf{D}f$ dan $\mathbf{D}g$.

(b) Tentukan fungsi $h=g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$.

(c) Tentukan turunan total $\mathbf{D}h$.

(d) Verivikasi dengan aturan rantai.

Solusi:

Misalkan $f_1(x,y,z)=x^2y$, $f_2(x,y,z)=z\sin(y)$, $g_1(u,v)=uv$, $g_2(u,v)=u^2v^2$, $g_3(u,v)=u+v$, dan $g_4(u,v)=u^2-v^2$.

(a) Karena $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, maka $\mathbf{D}f$ merupakan matriks ordo 2×3, yaitu

$$\mathbf{D}f=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}2xy & x^2 & 0\\ 0 & z\cos(y) & \sin(y)\end{bmatrix}}.$$

Karena $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$, maka $\mathbf{D}g$ merupakan matriks ordo 4×2, yaitu

$$\mathbf{D}g=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial g_3}{\partial u} & \dfrac{\partial g_3}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial g_4}{\partial u} & \dfrac{\partial g_4}{\partial v}\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}v & u\\ 2uv^2 & 2u^2v\\ 1 & 1\\ 2u & -2v\end{bmatrix}}.$$

(b) Perhatikan bahwa

$$h(x,y,z)=(g\circ f)(x,y,z)=g(f(x,y,z))$$

$$= g\left(x^2y, z\sin(y)\right)$$

$$= \boxed{\left(x^2yz\sin(y), x^4y^2z^2\sin^2(y), x^2y + z\sin(y), x^4y^2 - z^2\sin^2(y)\right)}.$$

(c) Misalkan

$$\begin{aligned}
h_1(x,y,z) &= x^2yz\sin(y)\\
h_2(x,y,z) &= x^4y^2z^2\sin^2(y)\\
h_3(x,y,z) &= x^2y + z\sin(y)\\
h_4(x,y,z) &= x^4y^2 - z^2\sin^2(y).
\end{aligned}$$

Karena $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, maka $\mathbf{D}h$ merupakan matriks ordo 4×3, yaitu

$$\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y} & \dfrac{\partial h_1}{\partial z}\\[2ex]
\dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y} & \dfrac{\partial h_2}{\partial z}\\[2ex]
\dfrac{\partial h_3}{\partial x} & \dfrac{\partial h_3}{\partial y} & \dfrac{\partial h_3}{\partial z}\\[2ex]
\dfrac{\partial h_4}{\partial x} & \dfrac{\partial h_4}{\partial y} & \dfrac{\partial h_4}{\partial z}
\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}
2xyz\sin(y) & x^2z\sin(y) + x^2yz\cos(y) & x^2y\sin(y)\\
4x^3y^2z^2\sin^2(y) & 2x^4yz^2\sin^2(y) + x^4y^2z^2\sin(2y) & 2x^4y^2z\sin^2(y)\\
2xy & x^2 + z\cos(y) & \sin(y)\\
4x^3y^2 & 2x^4y - z^2\sin(2y) & -2z\sin^2(y)
\end{bmatrix}}.$$

(d) Dari aturan rantai, $\mathbf{D}(g\circ f)(x,y,z) = (\mathbf{D}g)(u,v)(\mathbf{D}f)(x,y,z)$ dengan $(u,v) = f(x,y,z) = \left(x^2y, z\sin y\right)$. Dari (a) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}h &= \begin{bmatrix} v & u\\ 2uv^2 & 2u^2v\\ 1 & 1\\ 2u & -2v\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0\\ 0 & z\cos(y) & \sin(y)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} z\sin(y) & x^2y\\ 2x^2yz^2\sin^2(y) & 2x^4y^2z\sin(y)\\ 1 & 1\\ 2x^2y & 2z\sin(y)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0\\ 0 & z\cos(y) & \sin(y)\end{bmatrix}\\
&= \boxed{\begin{bmatrix}
2xyz\sin(y) & x^2z\sin(y) + x^2yz\cos(y) & x^2y\sin(y)\\
4x^3y^2z^2\sin^2(y) & 2x^4yz^2\sin^2(y) + x^4y^2z^2\sin(2y) & 2x^4y^2z\sin^2(y)\\
2xy & x^2 + z\cos(y) & \sin(y)\\
4x^3y^2 & 2x^4y - z^2\sin(2y) & -2z\sin^2(y)
\end{bmatrix}}.
\end{aligned}$$

Soal Nomor

4

Diketahui fungsi $f(x,y) = 4x^2 + y^2$. Tentukan persamaan bindang singgung dari fungsi f di titik $(1, 2, f(1, 2))$.

Solusi:

Tinjau $f(1, 2) = 8$. Grafik fungsi tersebut adalah $z = 4x^2 + y^2$ atau dapat ditulis $z - 4x^2 - y^2 = 0$. Misalkan $g(x, y, z) := z - 4x^2 - y^2$ yang berarti $g(x, y, z) = 0$. Perhatikan bahwa $\nabla g(1, 2, 8)$ merupakan vektor yang tegak lurus dengan bidang singgung dari $z = f(x, y)$ di titik $(1, 2, 8)$. Dalam hal ini,

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (-8x, -2y, 1) \implies \nabla g(1, 2, 8) = (-8, -4, 1).$$

Ambil sebarang titik (x, y, z) pada bidang singgung, bentuk vektor $(x, y, z) - (1, 2, 8) = (x - 1, y - 2, z - 8)$. Vektor tersebut tegak lurus dengan $\nabla g(1, 2, 8) = (-8, -4, 1)$ sehingga berakibat

$$0 = (-8, -4, 1) \cdot (x - 1, y - 2, z - 8) = -8x + 8 - 4y + 8 + z - 8 = -8x - 4y + z + 8$$

sehingga $\boxed{8 = 8x + 4y - z}$ sebagai bidang singgung yang diminta.