Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Kalkulus III

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

$\boxed{1}$ Tentukan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $F = \nabla f$ di mana $F(x, y) = (x, -y)$.

$\boxed{2}$ Diberikan fungsi $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, misalkan C_1 dan C_2 merupakan lintasan garis lurus pada $\mathbb{R}^2$ dengan C_1 merupakan segmen garis dari $(0, 0)$ ke $(2, 0)$ dan C_2 merupakan segmen garis lintasan tertutup $(1, 0)$ ke $(1, 1)$ ke $(0, 1)$ ke $(1, 0)$. Hitunglah

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s.$$

$\boxed{3}$ Diketahui medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ dan S merupakan bagian setengah bola $x^2+y^2+z^2 = 1$ dengan $z \geq 0$, serta vektor normal menjauh titik asal. Hitunglah

$$\int_{S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

$\boxed{4}$ Diberikan fungsi $P(x, y) = -y, Q(x, y) = x$ dengan daerah $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Lakukan verivikasi Teorema Green pada fungsi dan daerah yang diberikan.

Soal Nomor 1

Tentukan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $F = \nabla f$ di mana $F(x, y) = (x, -y)$.

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$(x, -y) = F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

sehingga $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = -y$. Dari $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ memberikan $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + C(y)$. Substitusikan pada $\frac{\partial f}{\partial y} = -y$, maka

$$-y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + C'(y) \implies C(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$$

dengan C suatu konstan. Jadi, $f(x, y) = \boxed{\frac{x^2 - y^2}{2} + C}$ dengan C konstan.

Soal Nomor

2

Diberikan fungsi $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$, misalkan C_1 dan C_2 merupakan lintasan garis lurus pada $\mathbb{R}^2$ dengan C_1 merupakan segmen garis dari $(0,0)$ ke $(2,0)$ dan C_2 merupakan segmen garis lintasan tertutup $(1,0)$ ke $(1,1)$ ke $(0,1)$ ke $(1,0)$. Hitunglah

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s.$$

Solusi:

Akan ditentukan $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s$. Parameterisasi lintasan C_1 dengan $(x,y) = \phi(t) = (t,0)$ untuk $0 \le t \le 2$. Ini berarti $\phi'(t) = (1,0)$ sehingga

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^2 \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^2 (t,0) \cdot (1,0)\ \mathrm{d}t = \int_0^2 t\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2.$$

Akan ditentukan $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s$. Misalkan D adalah daerah yang dibatasi oleh lintasan C_2 yang mana berorientasi positif. Perhatikan bahwa

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot\ \mathrm{d}s = \int_{C_2} x\ \mathrm{d}x + y\ \mathrm{d}y$$

yang mana $P(x,y) = x$ dan $Q(x,y) = y$. Dari Teorema Green,

$$\int_{C_2} P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}A = \iint_D (0-0)\ \mathrm{d}A = 0.$$

Jadi,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s = 2 + 0 = \boxed{2}.$$

Soal Nomor

3

Diketahui medan vektor $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ dan S merupakan bagian setengah bola $x^2+y^2+z^2=1$ dengan $z\geq 0$, serta vektor normal menjauh titik asal. Hitunglah

$$\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Solusi:

Parameterisasi

$$(x,y,z)=\Phi(u,v)=\Big(\cos(u)\sin(v),\sin(u)\sin(v),\cos(v)\Big),\quad 0\leq u\leq 2\pi, 0\leq v\leq \frac{\pi}{2}.$$

Ini berarti

$$\mathbf{t}_u=\Big(-\sin(u)\sin(v),\cos(u)\sin(v),0\Big),\quad \mathbf{t}_v=\Big(\cos(u)\cos(v),\sin(u)\cos(v),-\sin(v)\Big).$$

Diperoleh

$$\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\sin(u)\sin(v) & \cos(u)\sin(v) & 0\\ \cos(u)\cos(v) & \sin(u)\cos(v) & -\sin(v)\end{vmatrix}=\Big(-\cos(u)\sin^2(v),-\sin(u)\sin^2(v),\sin(v)\cos(v)\Big).$$

Didapatkan $\|\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v\|=\sin(v)$ sehingga

$$\frac{\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v\|}=\Big(-\cos(u)\sin(v),-\sin(u)\sin(v),\cos(v)\Big)$$

yang mana vektor tersebut menjauhi titik asal. Jadi,

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathbf{F}(\phi(u,v))\cdot(\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v)\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[-\cos^2(u)\sin^3(v)-\sin^2(u)\sin^3(v)+\sin(v)\cos^2(v)\Big]\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[-\sin^3(v)+\sin(v)\cos^2(v)\Big]\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(v)\Big[\cos^2(v)-\sin^2(v)\Big]\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(v)\cos(2v)\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{\pi} \sin(v)\cos(2v)\ \mathrm{d}v \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \sin(v)\cos(2v)\ \mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b)$, oleh karena itu

$$
\sin(v)\cos(2v) = \frac{\sin(v+2v)+\sin(v-2v)}{2} = \frac{\sin(3v)+\sin(-v)}{2} = \frac{\sin(3v)-\sin(v)}{2}.
$$

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin(v)\cos(2v)\ \mathrm{d}v &= \int_0^{\pi}\left[\frac{\sin(3v)-\sin(v)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos(3v)+\cos(v)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos(3\pi)+\cos(\pi)+\frac{1}{3}\cos(0)-\cos(0)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}-1\right] \\
&= -\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Jadi,

$$
\int_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \boxed{-\frac{4}{3}\pi}.
$$

Soal Nomor 4

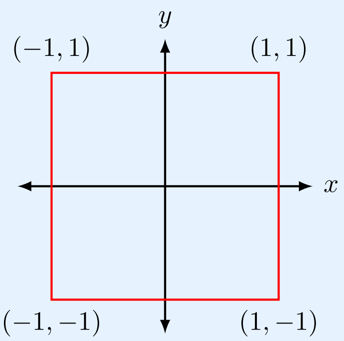
Diberikan fungsi $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$ dengan daerah $D = [-1,1] \times [-1,1]$. Lakukan verivikasi Teorema Green pada fungsi dan daerah yang diberikan.

Solusi:

Perhatikan gambar berikut. Misalkan C_1, C_2, C_3, C_4 berturut-turut menyatakan lintasan segmen garis dari $(-1,-1)$ ke $(-1,1)$, $(-1,1)$ ke $(1,1)$, $(1,1)$ ke $(-1,1)$, dan $(-1,1)$ ke $(-1,-1)$. Tulis $C := C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Akan diverivikasi hasil dari

$$\int_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = \int_C (-y) \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y = \int_C (-y, x) \cdot \mathrm{d}s.$$

dengan dua cara.



Perhatikan bahwa

$$\int_C -y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} (-y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y).$$

Parameterisasi lintasan C_1 dengan $(x,y) = \phi_1(t) = (-1+2t, -1)$ dengan $0 \le t \le 1$, maka $\phi_1'(t) = (2,0)$. Ini berarti

$$\int_{C_1} (-y, x) \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 (1, -1+2t) \cdot (2,0) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 2 \, \mathrm{d}t = [2t]_0^1 = 2.$$

Parameterisasi lintasan C_2 dengan $(x, y) = \phi_2(t) = (1, -1 + 2t)$ dengan $0 \le t \le 1$, maka $\phi_2'(t) = (0, 2)$. Ini berarti

$$\int\limits_{C_2} (-y, x) \cdot \mathrm{d}s = \int\limits_0^1 (1 - 2t, 1) \cdot (0, 2)\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 2\ \mathrm{d}t = 2.$$

Parameterisasi lintasan C_3 dengan $\phi_3(t) = (1 - 2t, 1)$ dengan $0 \le t \le 1$, maka $\phi_3'(t) = (-2, 0)$. Ini berarti

$$\int\limits_{C_3} (-y, x) \cdot \mathrm{d}s = \int\limits_0^1 (-1, 1 - 2t) \cdot (-2, 0)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 2\ \mathrm{d}t = 2.$$

Parameterisasi lintasan C_4 dengan $(x, y) = \phi_4(t) = (-1, 1 - 2t)$ dengan $0 \le t \le 1$, maka $\phi_4'(t) = (0, -2)$. Ini berarti

$$\int\limits_{C_4} (-y, x) \cdot \mathrm{d}s = \int\limits_0^1 (2t - 1, -1) \cdot (0, -2)\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 2\ \mathrm{d}t = 2.$$

Jadi, $\int\limits_C (-y, x) \cdot \mathrm{d}s = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$

Akan diverivikasi dengan Teorema Green. Misalkan D menyatakan daerah yang dibatasi C, yaitu persegi dengan panjang sisi 2. Maka

$$\int\limits_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\ \mathrm{d}A = \iint\limits_D (1 - (-1))\ \mathrm{d}A = 2 \iint\limits_D \mathrm{d}A = 2 \cdot \text{luas D} = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Terbukti nilainya sama.