Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Kalkulus II

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

$\boxed{1}$ Carilah nilai α sedemikian sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}}$$

konvergen mutlak, konvergen bersyarat, dan divergen.

$\boxed{2}$ Misalkan f adalah fungsi yang diberikan oleh

$$f(x, y, z) = \frac{\left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{xyz}.$$

(a). Tentukan daerah asal (domain) fungsi f.

(b). Tentukan $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$ jika ada.

(c). Tentukan himpunan terbesar di mana f kontinu.

(d). Tentukan semua turunan parsial orde satu dari fungsi f.

$\boxed{3}$ Jika $z = xy + x\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, maka tunjukkan $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

$\boxed{4}$ Misalkan f adalah fungsi yang diberikan oleh $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2$, carilah nilai maksimum dari turunan berarah f pada titik $(-1, 2)$ dan pada arah manakah f tersebut mencapai maksimum.

Soal Nomor

1

Carilah nilai α sedemikian sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}}$$

konvergen mutlak, konvergen bersyarat, dan divergen.

Solusi:

Pandang barisan $a_1, a_2, a_3, \cdots$ di mana $a_n = \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n}}$. Tinjau

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \alpha \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right| = |\alpha| \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |\alpha| \cdot 1 = |\alpha|$$

karena

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1.$$

Apabila $\rho < 1$, yakni $|\alpha| < 1 \iff -1 < \alpha < 1$, maka deret tersebut pasti konvergen mutlak. Untuk $\alpha = 1$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

yang mana divergen menurut uji-p. Untuk $\alpha = -1$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

Perhatikan bahwa $\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \iff \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ yang artinya $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ barisan turun. Selain itu, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ sehingga menurut uji deret berganti tanda berlaku deret tersebut konvergen. Namun,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

yang mana divergen, artinya deret tersebut konvergen bersyarat. Jadi,

- Deret konvergen mutlak jika $\boxed{-1 < \alpha < 1}$.

- Deret konvergen bersyarat jika $\boxed{\alpha = -1}$.
- Deret divergen jika $\boxed{\alpha < -1 \lor \alpha \geq 1}$.

Soal Nomor

2

Misalkan f adalah fungsi yang diberikan oleh

$$f(x,y,z) = \frac{(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}}}{xyz}.$$

(a) Tentukan daerah asal (domain) fungsi f.

(b) Tentukan $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ jika ada.

(c) Tentukan himpunan terbesar di mana f kontinu.

(d) Tentukan semua turunan parsial orde satu dari fungsi f.

Solusi:

(a) Syarat yang harus terpenuhi adalah $xyz \neq 0$ dan $144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2 \geq 0$. Jadi, domainnya adalah

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0, 144 \geq 16x^2 + 16y^2 - 9z^2\right\}.$$

(b) Tinjau pendekatan $x = y = z$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(144 - 16x^2 - 16x^2 + 9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x \cdot x \cdot x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{\left(\frac{144 - 23x^2}{x^2}\right)^3} = \sqrt{\left(\lim_{x\to 0} \frac{144 - 23x^2}{x^2}\right)} = \infty.$$

Tinjau pendekatan $x = y = -z$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(144 - 16x^2 - 16x^2 + 9(-x)^2)^{\frac{3}{2}}}{x \cdot x \cdot (-x)} = -\lim_{x\to 0} \sqrt{\left(\frac{144 - 23x^2}{x^2}\right)^3} = -\infty.$$

Jadi, nilai limit $\boxed{\text{tidak ada}}$.

(c) Tinjau

$$f(x,y,z) = \sqrt{\frac{(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^3}{(xyz)^2}}.$$

Perhatikan bahwa $p(x,y,z) = \left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^3$ dan $q(x,y,z) = (xyz)^2$ masing-masing merupakan fungsi polinom yang jelas kontinu. Akibatnya, $\sqrt{\dfrac{p(x,y,z)}{q(x,y,z)}}$ kontinu asalkan $q(x,y,z) \neq 0$ dan $\dfrac{p(x,y,z)}{q(x,y,z)} \geq 0 \iff p(x,y,z) \geq 0$. Jadi, himpunan terbesar yang dimaksud adalah

$$\boxed{\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0, 144 \geq 16x^2 + 16y^2 - 9z^2\right\}}.$$

(d) Diperoleh

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{\frac{3}{2}\left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{1}{2}}(-32x)(xyz) - \left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{3}{2}}(yz)}{(xyz)^2} \\
&= \frac{yz\left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big(-48x^2 - \left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)\Big)}{x^2y^2z^2} \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2}\left(32x^2 - 16y^2 + 9z^2 + 144\right)}{x^2yz}} \\
f_y &= \frac{\frac{3}{2}\left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{1}{2}}(-32y)(xyz) - \left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{3}{2}}(xz)}{(xyz)^2} \\
&= \frac{xz\left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big(-48y^2 - \left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)\Big)}{x^2y^2z^2} \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2}\left(32y^2 - 16x^2 + 9z^2 + 144\right)}{xy^2z}} \\
f_z &= \frac{\frac{3}{2}\left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{1}{2}}(18z)(xyz) - \left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)^{\frac{3}{2}}(xy)}{(xyz)^2} \\
&= \frac{xy\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2}\Big(27z^2 - \left(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2\right)\Big)}{x^2y^2z^2} \\
&= \frac{\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2}\left(18z^2 + 16x^2 + 16y^2 - 144\right)}{xyz^2} \\
&= \boxed{\frac{2\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2}\left(8x^2 + 8y^2 + 9z^2 - 72\right)}{xyz^2}}.
\end{aligned}$$

Soal Nomor

3

Jika $z = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$, maka tunjukkan $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Solusi:

Tinjau

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}\left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= y + \frac{\partial}{\partial x}(x)\cdot\phi\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\phi\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= y + \partial\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot\frac{\partial\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial\,\frac{y}{x}}\cdot\frac{\partial\,\frac{y}{x}}{\partial x} \\
&= y + \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
x\frac{\partial z}{\partial x} &= xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) - y\phi'\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

Selain itu,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= x + x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\phi\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= x + x\cdot\frac{\partial\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial\,\frac{y}{x}}\cdot\frac{\partial\,\frac{y}{x}}{\partial y} \\
&= x + x\cdot\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} \\
y\frac{\partial z}{\partial y} &= xy + y\phi'\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) - y\phi'\left(\frac{y}{x}\right) + xy + y\phi;\left(\frac{y}{x}\right) = xy + \left(xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = xy + z$$

seperti yang ingin dibuktikan.

SOAL NOMOR

4

Misalkan f adalah fungsi yang diberikan oleh $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2$, carilah nilai maksimum dari turunan berarah f pada titik $(-1,2)$ dan pada arah manakah f tersebut mencapai maksimum.

Solusi:

Tinjau

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle 6x - 2y, -2x + 8y \rangle .$$

Diperoleh $\nabla f(-1,2) = \langle -6-4, 2+16 \rangle = \langle -10, 18 \rangle$. Nilai maksimum turunan berarah f pada titik $(-1,2)$ adalah

$$\|\nabla f\| = \sqrt{(-10)^2 + 18^2} = \boxed{2\sqrt{106}}$$

yang tercapai saat arahnya $\boxed{-10\mathbf{i} + 18\mathbf{j}}$.