Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Kalkulus II

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

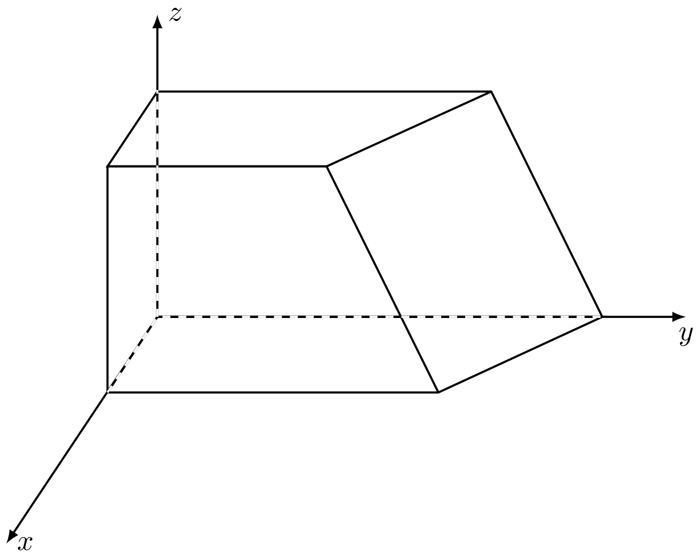
2023

Soal

1 Dengan menggunakan pengali lagrange, cari jarak minimum dari titik asal $(0, 0, 0)$ ke garis yang merupakan perpotongan dua bidang $x + y + z = 8$ dan $2x - y + 3z = 28$.

2 Cari luas permukaan yang berada pada bola dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dan di dalam silinder $x^2 + y^2 = b^2$ di mana $0 < b \leq a$.

3 Perhatikan gambar berikut.



Bangun tersebut dibatasi oleh $x = 0, x = 1, z = 0, z = 1$, dan bidang $2x + y + 2z = 6$. Cari volumenya dengan urutan integrasi berikut.

(a) $\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z$.

(b) $\mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$.

SOAL NOMOR

1

Dengan menggunakan pengali lagrange, cari jarak minimum dari titik asal $(0,0,0)$ ke garis yang merupakan perpotongan dua bidang $x+y+z=8$ dan $2x-y+3z=28$.

Solusi:

Perhatikan bahwa jarak titik (x,y,z) di garis dengan $(0,0,0)$ adalah $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Hal ini ekuivalen dengan mencari nilai minimum $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Tentu titik tersebut juga harus memenuhi $x+y+z=8$ dan $2x-y+3z=28$ yang merupakan fungsi kendala, tulis $\varphi(x,y,z)=x+y+z-8$ dan $\tau(x,y,z)=2x-y+3z-28$. Tinjau $\nabla f=\lambda\nabla\varphi+\mu\nabla\tau$, dengan

$$\begin{aligned}\langle f_x,f_y,f_z\rangle &= \lambda\langle\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z\rangle+\mu\langle\tau_x,\tau_y,\tau_z\rangle\\ \langle 2x,2y,2z\rangle &= \lambda\langle 1,1,1\rangle+\mu\langle 2,-1,3\rangle=\langle\lambda+2\mu,\lambda-\mu,\lambda+3\mu\rangle.\end{aligned}$$

Diperoleh $2x=\lambda+2\mu, 2y=\lambda-\mu$, dan $2z=\lambda+3\mu$ yang berarti $x=\frac{\lambda}{2}+\mu, y=\frac{\lambda-\mu}{2}$, dan $z=\frac{\lambda+3\mu}{2}$. Substitusikan ke $x+y+z=8$, maka

$$8=x+y+z=\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{\lambda-\mu}{2}+\frac{\lambda+3\mu}{2}=\frac{3\lambda}{2}+2\mu\implies 3\lambda+4\mu=16.$$

Substitusikan ke $2x-y+3z=28$, maka

$$28=2x-y+3z=\lambda+2\mu-\frac{\lambda-\mu}{2}+\frac{3\lambda+9\mu}{2}=2\lambda+7\mu.$$

Eliminasi persamaan $3\lambda+4\mu=16$ dan $2\lambda+7\mu=28$ sehingga diperoleh $\lambda=0$ dan $\mu=4$. Dari sini diperoleh $x=4, y=-2$, dan $z=6$ sehingga $x^2+y^2+z^2=56\implies\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$. Cek untuk titik lain pada garis, misalnya $\left(1,-\frac{5}{4},\frac{33}{4}\right)$ yang mana $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1+\frac{5^2}{4^2}+\frac{33^2}{4^2}}=\frac{\sqrt{1130}}{4}>2\sqrt{14}$. Jadi, jarak yang diminta adalah $\boxed{2\sqrt{14}}$.

Komentar. Sebenarnya tidak perlu kata "minimum" dalam konteks jarak titik dengan garis.

Soal Nomor

2

Cari luas permukaan yang berada pada bola dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ dan di dalam silinder $x^2 + y^2 = b^2$ di mana $0 < b \le a$.

Solusi:

Perhatikan bahwa $x^2+y^2+z^2 = a^2 \iff z^2 = a^2-x^2-y^2$ dan diperoleh $z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Perhatikan bahwa luas permukaan $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ di dalam silinder akan sama dengan luas permukaan $z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ di dalam silinder tersebut. Jadi, cukup hitung luas permukaan $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ lalu dikalikan dengan 2. Tulis $f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, maka

$$f_x = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad \text{dan} \quad f_y = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Diperoleh

$$f_x^2 + f_y^2 + 1 = \frac{x^2}{a^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{a^2-x^2+y^2} + 1 = \frac{x^2+y^2+a^2-x^2-y^2}{a^2-x^2-y^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}.$$

Misalkan

$$P = \iint_S \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,\mathrm{d}A = \iint_S \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}A,$$

maka luas permukaan yang diminta adalah $2P$. Akan ditentukan dengan mengkonversi ke integral polar. Proyeksikan hasil irisan permukaan $x^2+y^2+z^2 = a^2$ dan $x^2+y^2 = b^2$, maka akan membentuk lingkaran dengan persamaan $x^2+y^2 = b^2$. Oleh karena itu, batas integral yang diperoleh $0 \le r \le b$ dan $0 \le \theta \le 2\pi$. Jadi,

$$P = \iint_S \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = a\int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Akan ditentukan $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr$. Misalkan $p = a^2 - r^2$, maka $dp = -2r\,dr$. Maka

$$\int \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r = \int \frac{r}{\sqrt{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{-2r} = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathrm{d}p = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{p} = -\sqrt{p} = -\sqrt{a^2-r^2}.$$

Didapatkan

$$P = a\int\limits_0^{2\pi}\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^b \,\mathrm{d}\theta = a\int\limits_0^{2\pi}\left(-\sqrt{a^2-b^2}+a\right)\,\mathrm{d}\theta = 2a\pi\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right).$$

Jadi, luas permukaan yang diminta adalah $2P = \boxed{4a\pi\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}$.

Soal Nomor

3

Jika $z = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$, maka tunjukkan $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Solusi:

Tinjau

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}\left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= y + \frac{\partial}{\partial x}(x)\cdot\phi\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\phi\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= y + \partial\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot\frac{\partial\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial\,\frac{y}{x}}\cdot\frac{\partial\,\frac{y}{x}}{\partial x} \\
&= y + \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x\cdot\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\
x\frac{\partial z}{\partial x} &= xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) - y\phi'\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

Selain itu,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\
&= x + x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\phi\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= x + x\cdot\frac{\partial\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial\,\frac{y}{x}}\cdot\frac{\partial\,\frac{y}{x}}{\partial y} \\
&= x + x\cdot\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} \\
y\frac{\partial z}{\partial y} &= xy + y\phi'\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

Diperoleh

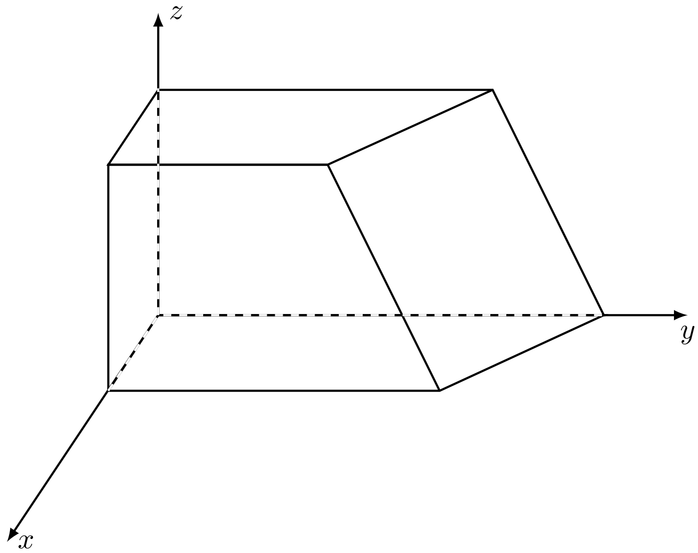
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) - y\phi'\left(\frac{y}{x}\right) + xy + y\phi;\left(\frac{y}{x}\right) = xy + \left(xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = xy + z$$

seperti yang ingin dibuktikan.

SOAL NOMOR

4

Perhatikan gambar berikut.



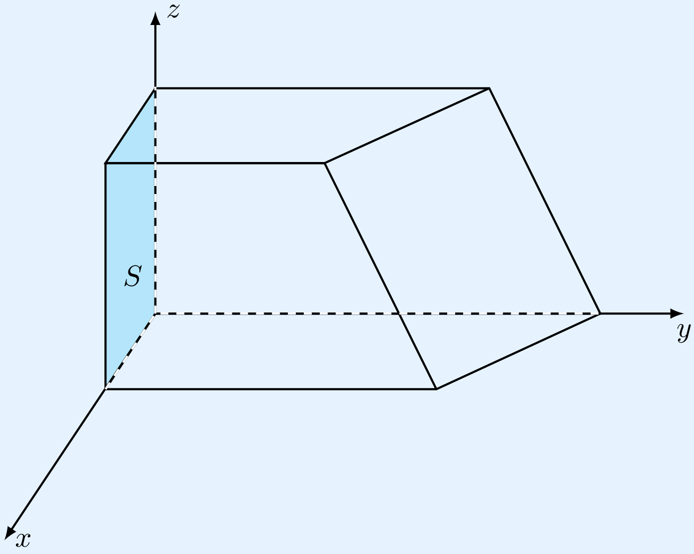
Bangun tersebut dibatasi oleh $x = 0, x = 1, z = 0, z = 1$, dan bidang $2x + y + 2z = 6$. Cari volumenya dengan urutan integrasi berikut.

(a) $\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z$.

(b) $\mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$.

Solusi:

(a) Tulis $y = 6 - 2x - 2z$. Dengan meninjau searah sumbu-y, arah tersebut pertama kali menembus bidang $y = 0$ dan dilanjutkan dengan bidang $y = 6 - 2x - 2z$. Jadi, $0 \leq y \leq 6 - 2x - 2z$. Proyeksikan terhadap bidang-xz, hasil proyeksinya adalah bidang $y = 0$ (daerah biru). Pada proyeksi ini, dengan meninjau searah sumbu-z, diperoleh batasnya dari $z = 0$ hingga $z = 1$ (yakni $0 \leq z \leq 1$). Jadi, $0 \leq x \leq 1$. Tinjau batas untuk z, yakni $0 \leq z \leq 1$.



Jadi, volume yang diminta adalah

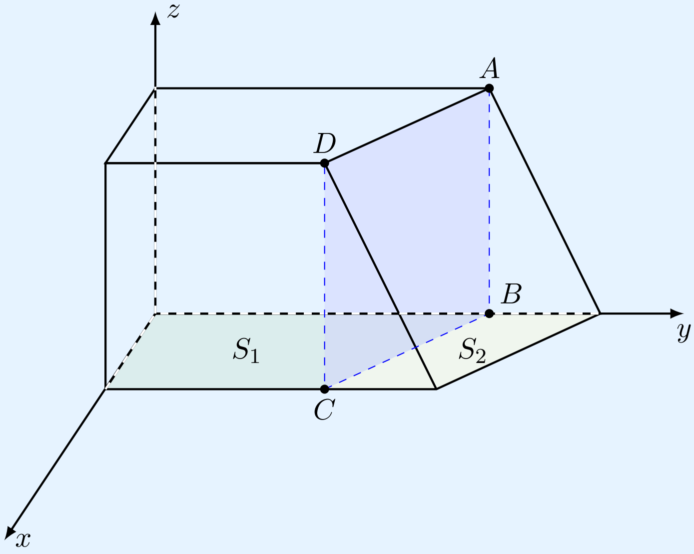
$$Q = \iiint\limits_S \mathrm{d}V = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{6-2x-2z} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z.$$

Tinjau $\displaystyle\int\limits_0^{6-2x-2z} \mathrm{d}y = [y]_0^{6-2x-2z} = (6-2x-2z) - 0 = 6 - 2x - 2z$. Diperoleh

$$\begin{aligned} Q &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (6-2x-2z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_0^1 \left[6x - x^2 - 2xz\right]_0^1\ \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_0^1 [6-1-2z-(0-0-0)]\ \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_0^1 (5-2z)\ \mathrm{d}z \\ &= \left[5z - z^2\right]_0^1 \\ &= (5-1)-(0-0) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Jadi, volumenya adalah $\boxed{4}$.

(b) Untuk urutan dz dy dx perlu mempartisi bidang yang akan dihitung. Partisi bangun tersebut dengan bidang $ABCD$ berwarna biru, dengan AB dan CD masing-masing tegak lurus bidang-xy.



Misalkan volume bidang tersebut adalah Q, dan

$$Q_1 = \iiint_{S_1} \mathrm{d}V \quad \text{dan} \quad Q_2 = \iiint_{S_2} \mathrm{d}V \implies Q = Q_1 + Q_2.$$

Akan ditentukan batas-batas integral pada Q_1 dalam urutan dz dy dx. Dalam searah sumbu-z, arah pertama kali menembus bidang $z = 0$ dan dilanjutkan dengan $z = 1$. Jadi, $0 \leq 1 \leq z$. Untuk menentukan batas searah sumbu-y, akan ditentukan terlebih dahulu persamaan bidang berwarna biru. Perhatikan bahwa titik $A = (0, q, 1)$ karena terletak pada bidang-yz. Karena terletak pada bidang $2x + y + 2z = 6$, maka memenuhi $2 \cdot 0 + q + 2 \cdot 1 = 6 \iff q = 4$. Jadi, $A = (0, 4, 1)$. Begitu juga titik $D = (1, r, 1)$ karena terletak pada bidang $x = 1$ dan $z = 1$. Karena juga terletak pada bidang $2x + y + 2z = 6$, maka $2 \cdot 1 + y + 2 \cdot 1 = 6 \iff y = 2$, jadi $D = (1, 2, 1)$. Karena AB tegak lurus bidang-xy, maka $B = (0, 4, 0)$. Perhatikan bahwa persamaan bidang yang melalui $(0, 4, 1), (1, 2, 1), (0, 4, 0)$ adalah $2x + y = 4 \iff y = 4 - 2x$. Proyeksikan bidang tersebut ke bidang-xy dan hasil proyeksinya sebagaimana bidang berwarna hijau. Dengan meninjau searah sumbu-y pada proyeksi, diperoleh batas untuk y dimulai dari $y = 0$ hingga $y = 4 - 2x$. Jadi, $0 \leq y \leq 4 - 2x$. Sedangkan, untuk batas nilai x yang diberikan adalah $0 \leq x \leq 1$. Jadi,

$$Q_1 = \iiint_{S_1} \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{4-2x} \int_0^1 \mathrm{d}z \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x.$$

Tinjau $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}z = [z]_0^1 = 1 - 0 = 1$. Diperoleh

$$Q_1 = \int_0^1 \int_0^{4-2x} 1 \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}x = \int_0^1 [y]_0^{4-2x} \ \mathrm{d}x = \int_0^1 (4 - 2x) \ \mathrm{d}x = \left[4x - x^2\right]_0^1 = (4 - 1) - (0 - 0) = 3.$$

Akan ditentukan batas-batas integral pada Q_2. Untuk searah sumbu-z pertama kali menembus bidang $z = 0$ dan dilanjutkan dengan $z = \dfrac{6 - 2x - y}{2} = 3 - x - \dfrac{y}{2}$. Jadi,

$0 \leq z \leq 3 - x - \dfrac{y}{2}$. Proyeksikan bidang $2x + y = 4$ dan $2x + y + 2z = 6$ ke bidang-xy sebagaimana daerah berwarna kuning. Dengan meninjau searah sumbu-y, diperoleh batas y dimulai dari $y = 4 - 2x$ hingga $y = 6 - 2x$ (batas kanannya merupakan kasus $z = 0$ dari persamaan bidang $2x + y + 2z = 6$). Jadi, $4 - 2x \leq y \leq 6 - 2x$. Sedangkan, untuk batas x adalah $0 \leq x \leq 1$. Jadi,

$$Q_2 = \iiint\limits_{S_2} dV = \int\limits_0^1 \int\limits_{4-2x}^{6-2x} \int\limits_0^{3-x-\frac{y}{2}} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x.$$

Tinjau $\displaystyle\int\limits_0^{3-x-\frac{y}{2}} \mathrm{d}z = [z]_0^{3-x-\frac{y}{2}} = 3 - x - \frac{y}{2} - 0 = 3 - x - \frac{y}{2}$. Didapatkan

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int\limits_0^1 \int\limits_{4-2x}^{6-2x} \left(3 - x - \frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{4}\right]_{4-2x}^{6-2x} \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 1\ \mathrm{d}x \\ &= [x]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Jadi, volume yang diminta adalah $Q = Q_1 + Q_2 = 3 + 1 = \boxed{4}$.