Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Kalkulus I

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2022

Soal

1 Jika $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

(a) Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil $f(x)$ dan $g(x)$.

(b) Periksalah apakah $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

(c) Jika $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, tentukan rumus untuk $(f \circ g)(x)$.

(d) Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil dari $(f \circ g)(x)$.

2 Jika ada, tentukan limit berikut. Jika tidak ada berikan alasannya.

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \sin \dfrac{|x-3|}{x-3}$.

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

3 Tentukan $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ jika diketahui $2x^2 y - 4y^3 = 4$.

4 Buatlah sketsa grafik fungsi $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$ secara canggih dengan menggunakan konsep limit, turunan, dan sebagainya.

Soal Nomor

1

Jika $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

(a) Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil $f(x)$ dan $g(x)$.

(b) Periksalah apakah $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

(c) Jika $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, tentukan rumus untuk $(f \circ g)(x)$.

(d) Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil dari $(f \circ g)(x)$.

Solusi:

(a). Tinjau $f(x)$ akan terdefinisi apabila $|x| \geq 2 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ yang berarti

$$\boxed{D_f = \{x \mid x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)\}}.$$

Kemudian, perhatikan bahwa $h(x) = \sqrt{x}$ yang berakibat

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \; \forall \; x > 0$$

sehingga $h(x)$ merupakan fungsi naik tegas. Artinya, $h(x) \geq h(0) = 0$ di mana $h(x) = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$. Karena $|x| - 2 \geq 0$, maka

$$f(x) = h\left(|x| - 2\right) \geq h(0) = 0 \iff f(x) \geq 0 \; \forall \; x \in D_f.$$

Jadi, $\boxed{R_f = \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}}$.

Tinjau $g(x)$ merupakan fungsi polinom yang mana terdefinisi untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$. Maka $\boxed{D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}}$. Perhatikan bahwa

$$g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 \iff g(x) \geq 1 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$$

mengingat $a^2 \geq 0 \; \forall \; a \in \mathbb{R}$. Maka $\boxed{R_g = \{g(x) \mid g(x) \geq 1\}}$.

(b). Karena $R_g \not\subseteq D_f$, maka $f \circ g$ $\boxed{\text{tidak terdefinisi}}$.

(c). Perhatikan bahwa

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{|x^2 - 2x + 2| - 2}.$$

Dari (a), kita tahu bahwa $x^2 - 2x + 2 > 0$ sehingga

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2 - 2} = \sqrt{x^2 - 2x} = \boxed{\sqrt{x(x-2)}}.$$

(d). $(f \circ g)(x)$ terdefinisi apabila $x(x-2) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$. Jadi, $\boxed{D_{f \circ g} = \{x \mid x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)\}}$. Dari bagian (a), kita punya juga $(f \circ g)(x) = \sqrt{x(x-2)} \geq 0$ untuk setiap $x \in D_{f \circ g}$. Maka $\boxed{R_{f \circ g} = \{(f(g(x)) \mid f(g(x)) \geq 0\}}$.

SOAL NOMOR **2**

Jika ada, tentukan limit berikut. Jika tidak ada berikan alasannya.

(a) $\lim_{x\to 3} \sin \frac{|x-3|}{x-3}$.

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

Solusi:

(a) Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 3^+} \sin \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \sin \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \sin 1 = \sin 1$$
$$\lim_{x\to 3^-} \sin \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \sin \frac{-(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \sin(-1) = \sin(-1) = -\sin 1.$$

Karena $\lim_{x\to 3^+} \sin \frac{|x-3|}{x-3} \neq \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$, maka $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ $\boxed{\text{tidak ada}}$.

(b) Perhatikan bahwa $-1 \le \cos x \le 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ sehingga kita punya

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Karena

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

menurut Teorema Apit berlaku $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$.

Soal Nomor

3

Tentukan $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ jika diketahui $2x^2y - 4y^3 = 4$.

Solusi:

Perhatikan bahwa $2x^2y - 4y^3 = 4 \iff x^2y - 2y^3 = 2$. Turunkan kedua ruas terhadap variabel x, maka

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\text{x}}\left(x^2y - 2y^3\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2 \\
2xy + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 6y^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\left(6y^2 - x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2xy \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2xy}{6y^2 - x^2}.
\end{aligned}$$

Turunkan sekali lagi terhadap variabel x, maka

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\left(2y + 2x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)(6y^2 - x^2) - 2xy\left(12y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2x\right)}{(6y^2 - x^2)^2} \\
&= \frac{\left(2y + 2x \cdot \frac{2xy}{6y^2 - x^2}\right)(6y^2 - x^2) - 2xy\left(12y \cdot \frac{2xy}{6y^2 - x^2} - 2x\right)}{(6y^2 - x^2)^2} \\
&= \frac{\frac{(2y)\left(6y^2 - x^2\right) + 4x^2y}{6y^2 - x^2} \cdot (6y^2 - x^2) - 2xy\left(\frac{24xy^2 - 2x\left(6y^2 - x^2\right)}{6y^2 - x^2}\right)}{(6y^2 - x^2)^2} \\
&= \frac{(12y^3 + 2x^2y)(6y^2 - x^2) - 2xy(12xy^2 + 2x^3)}{(6y^2 - x^2)^3} \\
&= \frac{72y^5 + 12x^2y^3 - 12x^2y^3 - 2x^4y - 24x^2y^3 - 4x^4y}{(6y^2 - x^2)^3} \\
&= \boxed{\frac{72y^5 - 6x^4y - 24x^2y^3}{(6y^2 - x^2)^3}}.
\end{aligned}$$

Soal Nomor

4

Buatlah sketsa grafik fungsi $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$ secara canggih dengan menggunakan konsep limit, turunan, dan sebagainya.

Solusi:

Perhatikan bahwa persamaan grafik ekuivalen dengan

$$y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \frac{2\left(x^2 - 16\right) + 24}{x^2 - 16} = 2 + \frac{24}{x^2 - 16}.$$

Kita tinjau grafik $f(x) = \dfrac{24}{x^2 - 16}$.

(a). **Menentukan asimtot.** Perhatikan bahwa

$$\lim_{x \to 4} \frac{24}{x^2 - 16} = \pm\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to -4} \frac{24}{x^2 - 16} = \pm\infty$$

sehingga $x = -4$ dan $x = 4$ adalah dua asimtot tegak dari $f(x)$. Selanjutnya,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{24}{x^2 - 16} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{24}{x^2 - 16} = 0$$

sehingga $y = 0$ merupakan asimtot datar dari $f(x)$. Tinjau bahwa $f(x)$ tidak memiliki asimtot miring karena derajat pembilang lebih kecil dari derajat penyebut.

(b). **Menentukan interval naik-turun.** Perhatikan bahwa

$$f(x) = 24\left(x^2 - 16\right)^{-1} \implies f'(x) = 24 \cdot (-1)\left(x^2 - 16\right)^{-2} \cdot (2x) = (-48) \cdot \frac{x}{\left(x^2 - 16\right)^2}.$$

Perhatikan bahwa $\left(x^2 - 16\right)^2 > 0$ untuk setiap $x \notin \{-4, 4\}$. Perhatikan bahwa

$$f'(x) < 0 \; \forall x \in (0, 4) \cup (4, \infty) \quad \text{dan} \quad f'(x) > 0 \; \forall \; x \in (-\infty, -4) \cup (-4, 0).$$

Sehingga $f(x)$ merupakan fungsi naik di interval $(-\infty, -4) \cup (-4, 0)$ dan fungsi turun di interval $(0, 4) \cup (4, \infty)$.

(c). **Menentukan interval terbuka ke bawah-ke atas.** Perhatikan bahwa

$$f''(x) = (-48)\cdot\frac{1\cdot(x^2-16)^2 - x\cdot 2\,(x^2-16)\,(2x)}{(x^2-16)^4} = (-48)\cdot\frac{x^2-16-4x^2}{(x^2-16)^3} = 48\cdot\frac{3x^2+16}{(x^2-16)^3}.$$

Perhatikan bahwa $3x^2+16 \geq 0+16 > 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $48 > 0$. Tinjau bahwa

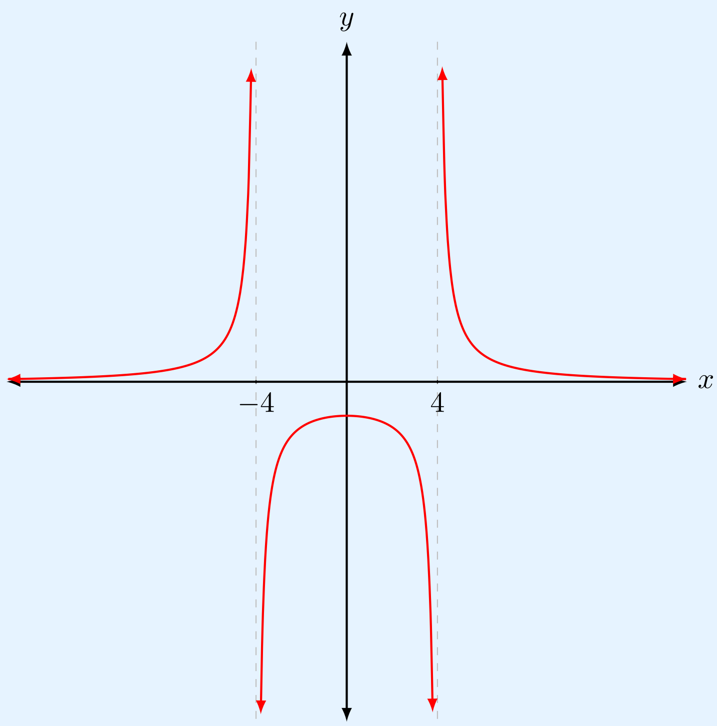
$$\left(x^2-16\right)^3 > 0 \iff x^2-16 > 0 \iff x \in (-\infty,-4)\cup(4,\infty)$$
$$\left(x^2-16\right)^3 < 0 \iff x^2-16 < 0 \iff x \in (-4,4).$$

Sehingga kita simpulkan bahwa

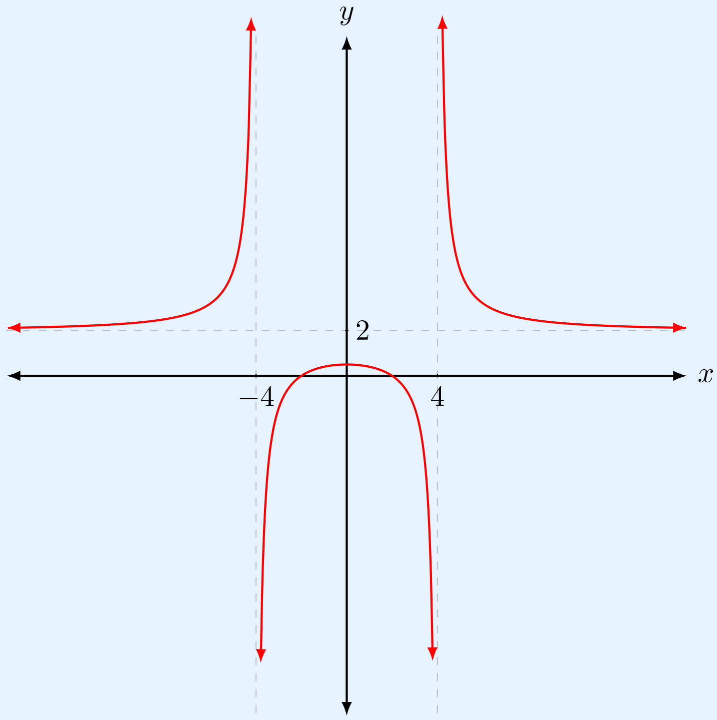
$$f''(x) > 0\ \forall x \in (-\infty,4)\cup(4,\infty) \quad \text{dan} \quad f''(x) < 0\ \forall x \in (-4,4).$$

Artinya, $y = f(x)$ terbuka ke atas di interval $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$ dan terbuka ke bawah di interval $(-4,4)$.

Dari poin (a), (b), dan (c) kita peroleh sketsa grafik $y = \dfrac{24}{x^2-16}$ sebagai berikut.



Grafik $y = 2 + \dfrac{24}{x^2-16}$ diperoleh dari menggeser grafik $y = \dfrac{24}{x^2-16}$ sejauh dua satuan ke atas, yaitu sebagai berikut.


y
2
x
−4
4