Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Kalkulus I

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

1 Diketahui integral sebuah fungsi sebagai berikut.

$$\int_{x^2}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = x^2(1+x).$$

Tentukan $f(x)$ dan hitunglah nilai dari $f(3), f'(3)$, dan $f''(3)$.

2 Diberikan sebuah fungsi $f(x)$ berikut. Tentukan $f'(x)$ dengan memanfaatkan logaritma natural.

$$f(x) = \ln\left(\frac{xe^x}{(x+1)^2}\right).$$

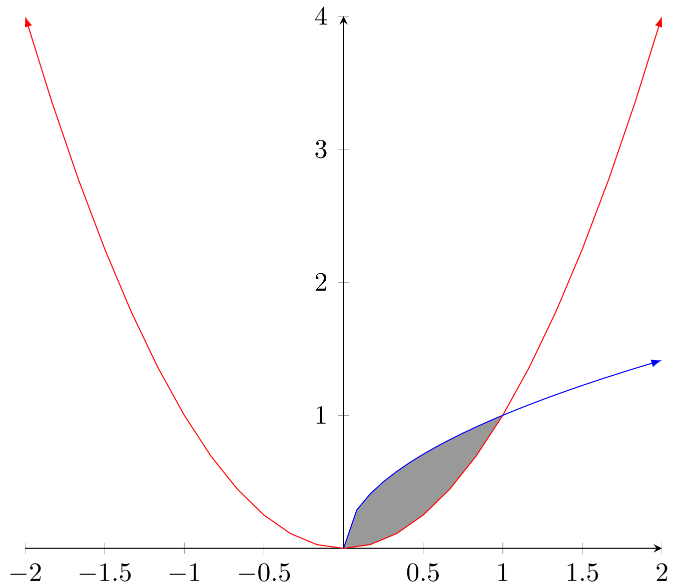
3 Tentukan hasil integral fungsi berikut:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}.$$

4 Terdapat sebuah area R yang dibatasi oleh fungsi $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$. Tentukan volume area yang terbentuk apabila area R diputar terhadap sumbu x, dengan menggunakan metode:

(a) Cakram/cincin,

(b) Kulit tabung.



Soal Nomor

1

Diketahui integral sebuah fungsi sebagai berikut.

$$\int_{x^2}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = x^2(1+x).$$

Tentukan $f(x)$ dan hitunglah nilai dari $f(3), f'(3)$, dan $f''(3)$.

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$x^2 + x^3 = \int_{x^2}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{0}^{x^2} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Turunkan kedua ruas,

$$2x + 3x^2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{x^2} f(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}\int_{0}^{x^2} f(t)}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = -f\left(x^2\right)\cdot 2x \implies f\left(x^2\right) = -\frac{3x}{2} - 1$$

Ini berarti $f(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{x} - 1$ untuk setiap $x \geq 0$. Cek kembali,

$$\int_{x^2}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x^2}^{0}\left(-\frac{3}{2}\sqrt{t} - 1\right)\ \mathrm{d}t = \left[-t^{3/2} - t\right]_{x^2}^{0} = -0 - 0 + x^3 + x^2 = x^2(x+1)$$

yang berarti memenuhi. Jadi, $\boxed{f(3) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1}$. Selanjutnya,

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = -\frac{3}{4\sqrt{x}} \implies f'(3) = -\frac{3}{4\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Terakhir,

$$f''(x) = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2x^{3/2}}\right) = \frac{3}{8x^{3/2}} \implies f''(3) = \frac{3}{8\cdot 3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{24}}.$$

SOAL NOMOR

2

Diberikan sebuah fungsi $f(x)$ berikut. Tentukan $f'(x)$ dengan memanfaatkan logaritma natural.

$$f(x) = \ln\left(\frac{xe^x}{(x+1)^2}\right).$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\ln\left(\frac{xe^x}{(x+1)^2}\right) = \ln\left(xe^x\right) - \ln(x+1)^2 = \ln(x) + \ln\left(e^x\right) - 2\ln(x+1) = \ln(x) + x - 2\ln(x+1).$$

Diperoleh

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1+x(x+1)-2x}{x(x+1)} = \boxed{\frac{x^2+1}{x^2+x}}.$$

Soal Nomor

3

Tentukan hasil integral fungsi berikut:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}.$$

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} &= \int_1^n \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\, \mathrm{d}x \\
&= [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_1^n \\
&= \left[\ln \frac{x+1}{x+2}\right]_1^n \\
&= \ln \frac{n+1}{n+2} - \ln \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Dengan mengambil limit $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = \lim_{n\to\infty} \left(\ln \frac{n+1}{n+2} - \ln \frac{2}{3}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n+2} - \ln \frac{2}{3}.$$

Karena ln fungsi kontinu di $\mathbb{R}^+$,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n+2} = \ln \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\right) = \ln \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) = \ln 1 = 0.$$

Jadi,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = 0 - \ln \frac{2}{3} = \boxed{-\ln \frac{2}{3}} = \boxed{\ln \frac{3}{2}}.$$

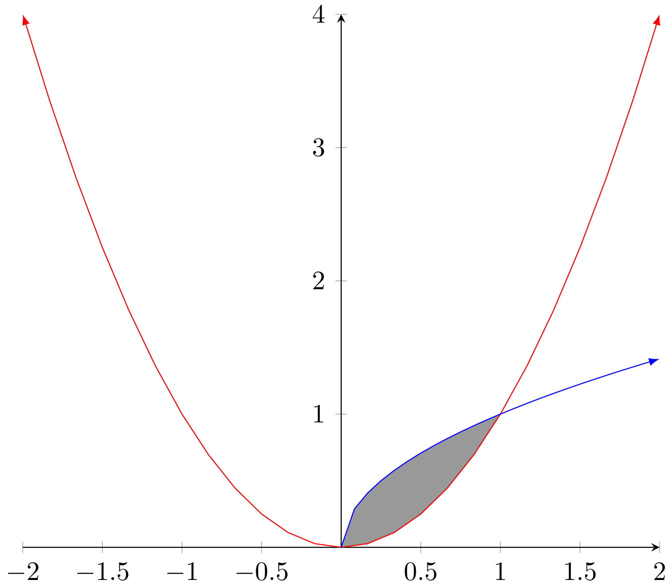
SOAL NOMOR

4

Terdapat sebuah area R yang dibatasi oleh fungsi $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$. Tentukan volume area yang terbentuk apabila area R diputar terhadap sumbu x, dengan menggunakan metode:

(a) Cakram/cincin,

(b) Kulit tabung.



Solusi:

Misalkan V_1 dan V_2 merupakan volume dari hasil perputaran $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$ terhadap sumbu-x secara berturut-turut, maka volume dari hasil perputaran R terhadap sumbu-x adalah $V_1 - V_2$. Perpotongan (x, y) dari $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$ dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan $\sqrt{x} = y = x^2$ yang berarti $1 = x^{5/2}$. Jadi, $x = 1$ sehingga $y = 1$.

(a) Perhatikan bahwa

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Lalu,

$$V_2 = \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x^4 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Jadi, volume perputaran yang dimaksud adalah $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \boxed{\frac{3\pi}{10}}$.

(b) Perhatikan persegi $[0,1]^2$, diputar terhadap sumbu-x akan menghasilkan tabung berjari-jari 1 dan tinggi 1, sehingga volumenya π. Perhatikan bahwa $y = \sqrt{x} \iff x = y^2$ dan $y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$ untuk $y \geq 0$. Perhatikan bahwa batas nilai y untuk daerah R adalah dari 0 ke 1. Ini berarti

$$V_1 = \pi - 2\pi \int_0^1 y \cdot y^2 \, \mathrm{d}y = \pi - 2\pi \int_0^1 y^3 \, \mathrm{d}y = \pi - 2\pi \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Lalu, perhatikan untuk V_2.

$$V_2 = \pi - 2\pi \int_0^1 y \cdot \sqrt{y} \, \mathrm{d}y = \pi - 2\pi \int_0^1 y^{3/2} \, \mathrm{d}y = \pi - 2\pi \left[\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Jadi, volumenya adalah $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \boxed{\frac{3\pi}{10}}$.