Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Kalkulus I

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

$\boxed{\mathbf{1}}$ Jika fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kontinu di $\mathbb{R}^+$ dan

$$\int_1^{x^2(x^2+1)} f(t)\, dt = x^3\sqrt{x},$$

hitunglah nilai dari $f(2)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Hitunglah $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dari fungsi $y = x^3 \arctan(e^x)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Hitunglah integral tak wajar

$$\int_1^3 \frac{2\, dx}{x(x-3)}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Tentukan volume benda putar yang dihasilkan dengan memutar daerah D yang berbentuk cakram lingkaran $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ dengan:

(a) Metode cincin,

(b) Metode kulit tabung.

Soal Nomor

1

Jika fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kontinu di $\mathbb{R}^+$ dan

$$\int\limits_1^{x^2\left(x^2+1\right)} f(t)\ dt = x^3\sqrt{x},$$

hitunglah nilai dari $f(2)$.

Solusi:

Misalkan $u = x^2\left(x^2+1\right) = x^4 + x^2$, diperoleh $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4x^3 + 2x$. Turunkan kedua ruas persamaan terhadap x, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3\sqrt{x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_1^{x^4+x^2} f(t)\ \mathrm{d}t \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{3+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int\limits_1^{u} f(t)\ \mathrm{d}t\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{7}{2}} &= f(u)\cdot\left(4x^3+2x\right) \\
\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} &= f\left(x^4+x^2\right)\cdot\left(4x^3+2x\right) \\
\frac{7x^{\frac{5}{2}}}{2\left(4x^3+2x\right)} &= f\left(x^4+x^2\right).
\end{aligned}$$

Dengan memerhatikan ruas kanan, yaitu $x^3\sqrt{x}$, yang mana terdefinisi saat $x \geq 0$. Substitusikan $x = 1$, diperoleh

$$f(2) = f\left(1^4+1^2\right) = \frac{7\cdot 1^{\frac{5}{2}}}{2\left(4\cdot 1^3 + 2\cdot 1\right)} = \frac{7}{2(6)} = \boxed{\frac{7}{12}}.$$

Substitusi $x = -1$ memang memberikan $f(2)$, namun ini tidak dapat dilakukan karena terdefinisi untuk $x \geq 0$.

Soal Nomor

2

Hitunglah $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dari fungsi $y = x^3 \arctan\left(e^x\right)$.

Solusi:

Misalkan $u = x^3$, maka $u' = 3x^2$. Selain itu, misalkan $v = \arctan\left(e^x\right)$ dan mengingat $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, diperoleh $v' = \dfrac{1}{1+\left(e^x\right)^2} \cdot e^x = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$. Ini berarti

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (uv)' = u'v + uv' = 3x^2 \arctan\left(e^x\right) + x^3 \cdot \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \boxed{3x^2 \arctan\left(e^x\right) + \frac{e^x x^3}{1+e^{2x}}}.$$

Soal Nomor

3

Hitunglah integral tak wajar

$$\int_1^3 \frac{2\,dx}{x(x-3)}.$$

Solusi:

Misalkan $\dfrac{2}{x(x-3)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-3}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{2}{x(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3)+bx}{x(x-3)} = \frac{(a+b)x-3a}{x(x-3)} \implies (a+b)x - 3a = 2.$$

Ini berarti $a+b=0$ dan $-3a=2$ sehingga diperoleh $a = -\dfrac{2}{3}$ dan $b = -a = \dfrac{2}{3}$. Ini berarti

$$\frac{2}{x(x-3)} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right).$$

Perhatikan bahwa pada interval $[1,3]$, fungsi $\dfrac{1}{x-3}$ tidak terdefinisi di $x=3$ dan $\dfrac{1}{x}$ selalu terdefinisi. Perhatikan bahwa

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = [\ln(|x|)]_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3) - 0 = \ln(3).$$

Selanjutnya,

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-3} = \lim_{a\to 3^-} \int_1^a \frac{dx}{x-3} = \lim_{a\to 3^-} [\ln(|x-3|)]_1^a = \lim_{a\to 3^-} [\ln(3-a) - \ln(2)]$$

karena $|a-3| = 3-a$ mengingat $a<3$ dan $|1-3|=2$. Namun, $\lim\limits_{a\to 3^-} \ln(3-a) = -\infty$ yang berarti dapat disimpulkan bahwa

$$\int_1^3 \frac{2\,dx}{x(x-3)} = \int_1^3 \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right)\,dx = -\infty$$

sehingga hasil integral tak wajar tersebut $\boxed{\text{divergen}}$.

Soal Nomor 4

Tentukan volume benda putar yang dihasilkan dengan memutar daerah D yang berbentuk cakram lingkaran $(x-2)^2+y^2 \leq 1$ dengan:

(a). Metode cincin,

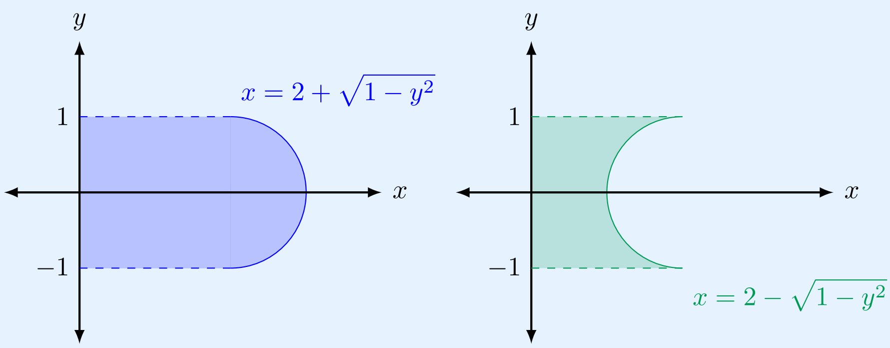
(b). Metode kulit tabung.

Komentar. Soal tersebut kurang memiliki informasi yang lengkap, seperti perputaran sumbu yang dimaksud belum disebutkan. Dalam solusi ini akan diasumsikan bahwa sumbu perputaran yang dimaksud adalah sumbu-y.

Solusi:

Daerah D merepresentasikan lingkaran yang berpusat di $(2,0)$ dengan panjang jari-jari 1.

(a) Akan ditentukan menggunakan metode cincin, ini berarti proses pengintegralan terhadap variabel y. Apabila ditinjau searah horizontal, daerah D dibatasi oleh $x-2=\sqrt{1-y^2} \iff x=2+\sqrt{1-y^2}$ dan $x-2=-\sqrt{1-y^2} \iff x=2-\sqrt{1-y^2}$. Volume benda putar yang dimaksud diperoleh dengan mengurangi hasil volume benda putar daerah biru dikurangi dengan hasil volume benda putar daerah hijau.



Volume benda putar daerah biru adalah

$$V_1 = \pi \int_{-1}^{1} \left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_{-1}^{1} 4+1-y^2+4\pi\sqrt{1-y^2} \, \mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \int_{-1}^{1} \left(5 - y^2\right)\, \mathrm{d}y + \pi \int_{-1}^{1} 4\sqrt{1 - y^2}\, \mathrm{d}y \\
&= \left[5y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} \pi + 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, \mathrm{d}y \\
&= \left[\left(5 - \frac{1}{3}\right) - \left(-5 + \frac{1}{3}\right)\right] \pi + 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{28}{3}\pi + 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Substitusi $y = \sin(u)$, maka $\mathrm{d}y = \cos(u)\, \mathrm{d}u$. Batas atas pengintegralan menjadi $u_a = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$ dan batas bawah pengintegralan menjadi $u_b = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Ini berarti

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{28}{3}\pi + 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(u)}\, \cos(u)\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{28}{3}\pi + 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(u)} \cos(u)\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{28}{3}\pi + 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u)| \cos(u)\, \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

Karena $\cos(u) \geq 0$ untuk setiap $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, maka $|\cos(u)| = \cos(u)$. Ini berarti

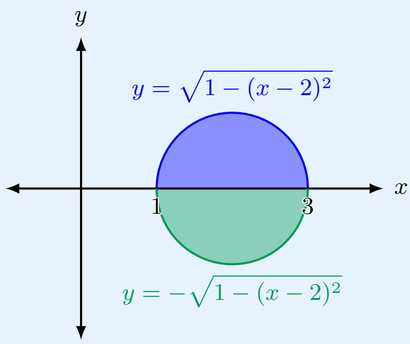
$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{28}{3}\pi + 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{28}{3}\pi\pi + 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u) + 1}{2}\, \mathrm{d}u \\
&= \frac{28}{3}\pi + 4\pi \left[\frac{\frac{1}{2}\sin(2u) + u}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{28}{3}\pi + 4\pi \left[\frac{\frac{1}{2}\sin(\pi) + \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{2}\sin(-\pi) - \frac{\pi}{2}}{2}\right] \\
&= \frac{28}{3}\pi + 4\pi \left(\frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{0 - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \\
&= \frac{28}{3}\pi + 2\pi^2.
\end{aligned}
$$

Sedangkan, volume benda putar daerah biru adalah

$$\begin{aligned}
V_2 &= \pi \int_{-1}^{1} \left(2 - \sqrt{1-y^2}\right)^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_{-1}^{1} \left(4 + 1 - y^2 - 4\sqrt{1-y^2}\right) \, \mathrm{d}y \\
&= \pi \int_{-1}^{1} \left(5 - y^2 - 4\sqrt{1-y^2}\right) \, \mathrm{d}y \\
&= \pi \int_{-1}^{1} \left(5 - y^2\right) \, dy - 4\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2} \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{28}{3}\pi - 2\pi^2
\end{aligned}$$

dengan cara yang sama. Jadi, volume benda putar yang diminta adalah $V = V_1 - V_2 = \left(\frac{28}{3}\pi + 2\pi^2\right) - \left(\frac{28}{3}\pi - 2\pi^2\right) = \boxed{4\pi^2}$.

(b) Apabila menggunakan metode tabung, pengintegralan akan dilakukan terhadap variabel x.



Volume benda putar yang diminta sama saja dengan menghitung volume benda putar daerah biru dijumlah dengan volume benda putar daerah hijau. Karena simetris (daerah biru setara dengan daerah hijau), maka cukup dihitung daerah biru saja lalu dikalikan 2. Volume daerah biru apabila diputar terhadap sumbu-y adalah

$$V_1 = 2\pi \int_{1}^{3} x\sqrt{1-(x-2)^2} \, \mathrm{d}x.$$

Substitusi $x - 2 = \sin(u) \iff x = 2 + \sin(u)$ sehingga $dx = \cos(u)\, du$. Maka batas atas pengintegralan menjadi $u_a = \sin^{-1}(3-2) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$ dan batas bawah pengintegralan menjadi $u_b = \sin^{-1}(1-2) = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
V_1 &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin(u))\sqrt{1 - \sin^2(u)} \, \cos(u) \, \mathrm{d}u \\
&= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin(u))\sqrt{\cos^2(u)} \, \cos(u) \, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \sin(u))|\cos(u)|\cos(u)\ \mathrm{d}u.$$

Karena untuk setiap $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ berlaku $\cos(u) \geq 0$, maka $|\cos(u)| = \cos(u)$. Ini berarti

$$V_1 = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2(u)\ \mathrm{d}u + 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\cos^2(u)\ \mathrm{d}u.$$

Tinjau $\sin(-u)\cos^2(-u) = -\sin(u)\cos^2(u)$ yang menunjukkan bahwa $\sin(u)\cos^2(u)$ fungsi ganjil. Ini berakibat $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\cos^2(u) = 0$. Jadi,

$$\begin{aligned}
V_1 = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2(u)\ \mathrm{d}u + 0 &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2u) + 1)\ \mathrm{d}u \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2}\sin(2u) + u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2}\sin(\pi) + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}\sin(-\pi) - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= 2\pi \cdot \pi \\
&= 2\pi^2.
\end{aligned}$$

Karena daerah biru dan hijau simetris, maka volume benda putar daerah hijau terhadap sumbu-y juga $V_2 = 2\pi^2$. Jadi, total volume benda putarnya adalah $V_1 + V_2 = 2\pi^2 + 2\pi^2 = \boxed{4\pi^2}$.