Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Kalkulus I

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2022

Soal

1 Jika fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kontinu di $\mathbb{R}^+$ dan

$$\int_1^{x^3} f(t)\, dt = x^2\sqrt{x}.$$

Tentukan aturan (rumus) fungsi $f(x)$.

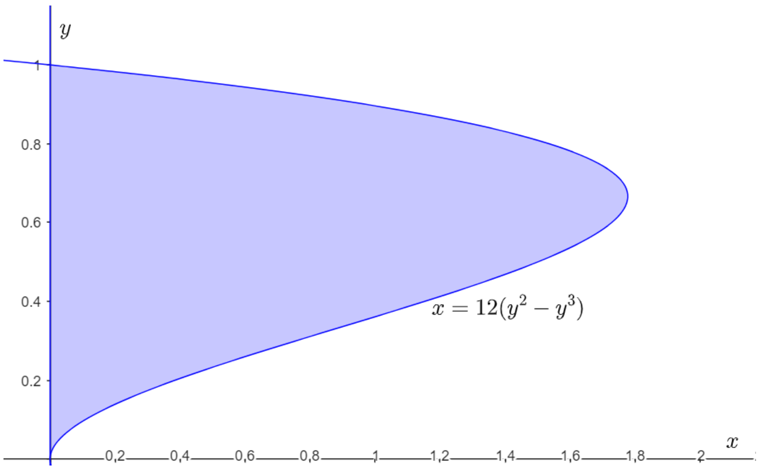
2 (a) Buktikan $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(b) Tentukan y' jika $\cosh\left(x^2 y\right) = e^{x+xy^2}$.

3 Hitunglah integral tak wajar berikut

$$\int_0^2 x^2 \ln(x)\, dx.$$

4 Tentukan volume benda putar yang dihasilkan dengan memutar daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini terhadap garis $y = 1$.



SOAL NOMOR

1

Jika fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kontinu di $\mathbb{R}^+$ dan

$$\int_1^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t = x^2\sqrt{x}.$$

Tentukan aturan (rumus) fungsi $f(x)$.

Solusi:

Ambil turunan kedua ruas terhadap x, maka

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^3} f(t)\ dt = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\sqrt{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{5/2} = \frac{5}{2}x^{3/2}.$$

Dengan Teorema Dasar Kalkulus 1, maka

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\int_1^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^3}\cdot\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x} = f\left(x^3\right)\cdot 3x^2 = 3x^2 f\left(x^3\right).$$

Jadi, kita punya

$$3x^2 f\left(x^3\right) = \frac{5}{2}x^{3/2} \iff f\left(x^3\right) = \frac{5}{6}x^{-1/2}.$$

Karena $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ di mana $g(x) = x^3$ bersifat surjektif, maka untuk setiap $y \in \mathbb{R}^+$ terdapat $x \in \mathbb{R}^+$ sehingga $g(x) = y \iff x = y^{1/3}$. Jadi, kita punya

$$f(y) = \frac{5}{6}\left(y^{1/3}\right)^{-1/2} = \frac{5}{6}y^{-1/6}$$

sehingga $f(x) = \frac{5}{6}x^{-1/6}$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$. Cek kembali,

$$\int_1^{x^3} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{x^3}\frac{5}{6}t^{-1/6}\ \mathrm{d}t = \left[x^{5/6}\right]_1^{x^3} = x^{15/6} - 1 = x^{5/2} - 1 = x^2\sqrt{x} - 1$$

yang berarti tidak memenuhi. Jadi, $\boxed{\text{tidak ada}}$ fungsi f yang memenuhi.

SOAL NOMOR

2

(a) Buktikan $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sec^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(b) Tentukan y' jika $\cosh\left(x^2y\right) = e^{x+xy^2}$.

Solusi:

(a) Misalkan $f(x) = \sec(x)$. Maka

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'\left(\sec^{-1}(x)\right)}.$$

Di sisi lain, kita punya $f'(x) = \sec(x)\tan(x)$ sehingga diperoleh

$$f'\left(\sec^{-1}(x)\right) = \sec\left(\sec^{-1}(x)\right)\tan\left(\sec^{-1}(x)\right) = x \cdot \tan\left(\sec^{-1}(x)\right).$$

Misalkan $\sec^{-1}(x) = k$ sehingga $\sec(k) = \sec\left(\sec^{-1}(x)\right) = x$. Kita punya

$$x^2 = \sec^2(k) = \tan^2(k) + 1 \iff \sqrt{x^2-1} = \tan(k) = \tan\left(\sec^{-1}(x)\right).$$

Sehingga kita peroleh $f'\left(\sec^{-1}(x)\right) = x\sqrt{x^2-1}$ dan kita punya $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ seperti yang ingin dibuktikan.

(b) Ambil turunan kedua ruas terhadap x, maka

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh\left(x^2y\right) &= e^{x+xy^2} \\
\frac{\mathrm{d}\cosh\left(x^2y\right)}{\mathrm{d}\left(x^2y\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(x^2y\right)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}\left(e^{x+xy^2}\right)}{\mathrm{d}\left(x+xy^2\right)} \cdot \frac{d\left(x+xy^2\right)}{\mathrm{d}x} \\
\sinh\left(x^2y\right)\left(2x \cdot y + x^2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) &= e^{x+xy^2} \cdot \left(1 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \\
2xy\sinh\left(x^2y\right) + x^2\sinh\left(x^2y\right) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^{x+xy^2} + y^2e^{x+xy^2} + 2ye^{x+xy^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
x^2\sinh\left(x^2y\right) \cdot \frac{dy}{dx} - 2ye^{x+xy^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^{x+xy^2} + y^2e^{x+xy^2} - 2xy\sinh\left(x^2y\right)
\end{aligned}$$

$$\left(x^2 \sinh\left(x^2 y\right) - 2ye^{x+xy^2}\right) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+xy^2} + y^2 e^{x+xy^2} - 2xy \sinh\left(x^2 y\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \boxed{\frac{e^{x+xy^2} + y^2 e^{x+xy^2} - 2xy \sinh\left(x^2 y\right)}{x^2 \sinh\left(x^2 y\right) - 2ye^{x+xy^2}}}.$$

Catatan. Hasil akhir dari soal ini bisa berbagai bentuk, tergantung manipulasi yang dilakukan. Hasil akhir yang berbeda dengan di atas belum tentu jawaban Anda salah.

Soal Nomor

3

Hitunglah integral tak wajar berikut
$$\int_0^2 x^2 \ln(x)\, dx.$$

Solusi:

Akan kita tentukan $\int x^2 \ln(x)\, dx$ menggunakan integral parsial. Misalkan $u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x}\, dx$ dan $dv = x^2\, dx = v = \frac{x^3}{3}$. Maka
$$\int \ln(x) \cdot x^2\, dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3} \int x^2\, dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$$
Kita peroleh
$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 \ln(x)\, dx &= \lim_{n \to 0^+} \int_n^2 x^2 \ln(x) \\
&= \lim_{n \to 0^+} \left[\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_n^2 \\
&= \lim_{n \to 0^+} \left(\frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9} - \left(\frac{n^3 \ln(n)}{3} - \frac{n^3}{9} \right) \right) \\
&= \lim_{n \to 0^+} \left(\frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9} - \frac{n^3 \ln(n)}{3} + \frac{n^3}{9} \right) \\
&= \lim_{n \to 0^+} \frac{8\ln(2)}{3} - \lim_{n \to 0^+} \frac{8}{9} - \lim_{n \to 0^+} \frac{n^3 \ln(n)}{3} + \lim_{n \to 0^+} \frac{n^3}{9} \\
&= \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} \lim_{n \to 0^+} n^3 \ln(n) + 0 \\
&= \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} \lim_{n \to 0^+} n^3 \ln(n).
\end{aligned}$$
Perhatikan bahwa
$$\lim_{n \to 0^+} n^3 \ln(n) = \lim_{n \to 0^+} \frac{\ln(n)}{\frac{1}{n^3}} \overset{L}{=} \lim_{n \to 0^+} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{3}{n^4}} = \lim_{n \to 0^+} \frac{n^3}{-3} = 0.$$

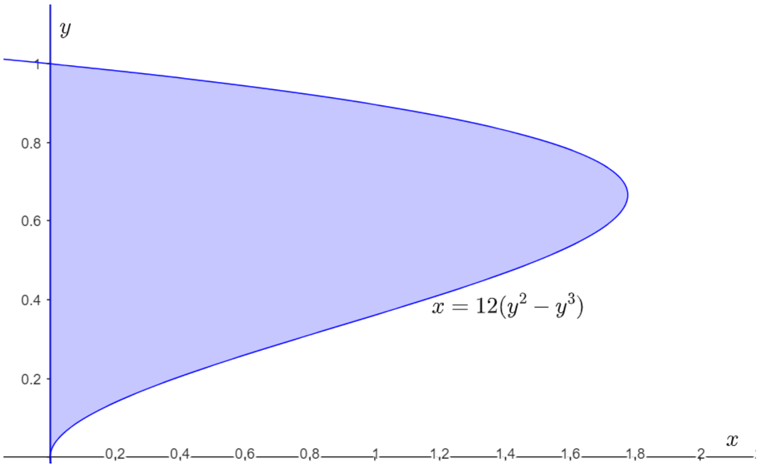
Sehingga kita peroleh

$$\int_0^2 x^2 \ln(x)\, dx = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} \cdot 0 = \boxed{\frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9}}.$$

SOAL NOMOR

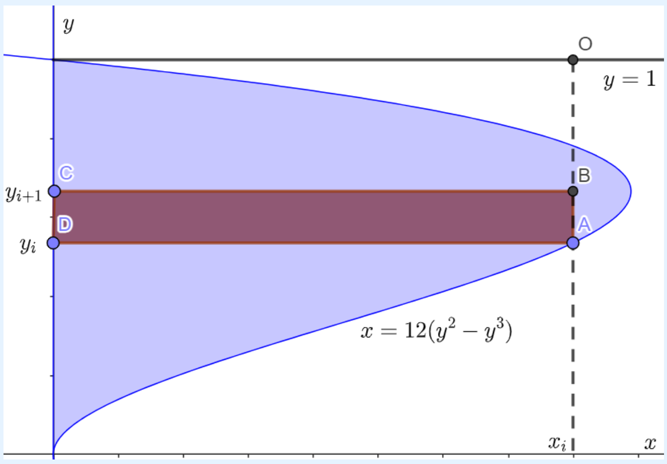
4

Tentukan volume benda putar yang dihasilkan dengan memutar daerah yang diarsir pada gambar di bawah ini terhadap garis $y = 1$.



Solusi:

Partisi secara horizontal pada interval $[0, 1]$ dari sumbu-y dengan $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 1$.



Apabila $ABCD$ diputar terhadap garis $y = 1$ maka akan terbentuk sebuah tabung besar dan kecil di mana tabung besar yang keduanya berpusat di O, di mana tabung besar berjari-jari

OA dan tabung kecil berjari-jari OB. Kita punya $OB = 1 - y_{i+1}$ dan $OA = 1 - y_1$. Sedangkan, tinggi tabung adalah $AD = x_i = 12\left(y_i^2 - y_i^3\right)$. Sehingga volume tabung hasil perputaran $ABCD$ terhadap garis $y = 1$ adalah

$$\begin{aligned}
\Delta V &= \pi\left(1 - y_i\right)^2 \cdot 12\left(y_i^2 - y_i^3\right) - \pi\left(1 - y_{i+1}\right)^2 \cdot 12\left(y_i^2 - y_i^3\right) \\
&= 12\pi\left(y_i^2 - y_i^3\right) \cdot \left[(1 - y_i)^2 - (1 - y_{i+1})^2\right] \\
&= 12\pi\left(y_i^2 - y_i^3\right) \cdot [(1 - y_i + 1 - y_{i+1})(1 - y_i - (1 - y_{i+1}))] \\
&= 12\pi\left(y_i^2 - y_i^3\right)\left(2 - y_i - y_{i+1}\right)\left(y_{i+1} - y_i\right) \\
&= 12\pi\left(y_i^2 - y_i^3\right) \cdot 2\left(1 - \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)\Delta y \\
&= 24\pi\left(y_i^2 - y_i^3\right)(1 - y_i^*)\Delta y.
\end{aligned}$$

Kita punya

$$V \approx \int_0^1 24\pi\left(y^2 - y^3\right)(1 - y)\,dy = 24\pi\int_0^1 \left(y^2 - y^3\right)(1 - y) = 24\pi\int_0^1 \left(y^2 - 2y^3 + y^4\right)\,dy.$$

Maka

$$V = 24\pi\left[\frac{y^3}{3} - \frac{2y^4}{4} + \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = 24\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} - (0 - 0 + 0)\right) = 24\pi \cdot \frac{10 - 15 + 6}{30} = \frac{24\pi}{30} = \boxed{\frac{4}{5}\pi}.$$