



Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Fungsi Kompleks I

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

- 1 Carilah solusi dari $x^4 + i = 0$.
- 2 Carilah bilangan kompleks z yang memenuhi $z^n = 1$ jika n bilangan asli.
- 3 Tentukan hasil transformasi bidang kompleks z oleh fungsi linier $w = z + 1 - 2i$.

Carilah solusi dari $x^4 + i = 0$.

Solusi:

Tulis $x = |x|\text{cis}(\theta)$ di mana $\theta \in \mathbb{R}$. Tinjau bahwa persamaan ekuivalen dengan $x^4 = -i$, maka $1 = |-i| = |x^4| = |x|^4$ sehingga $|x| = 1$. Dari sini diperoleh $x = \text{cis}(\theta)$, maka $-i = x^4 = (\text{cis}(\theta))^4 = \text{cis}(4\theta)$. Tinjau $-i = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, ini berarti $\text{cis}(4\theta) = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, maka

$$4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \implies \theta = \frac{3 + 4k}{8}\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Diperoleh semua solusinya adalah $x \in \left\{ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{11\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{15\pi}{8}\right) \right\}$.

Carilah bilangan kompleks z yang memenuhi $z^n = 1$ jika n bilangan asli.

Solusi:

Tulis $x = |x|\text{cis}(\theta)$ di mana $\theta \in \mathbb{R}$. Tinjau bahwa persamaan ekuivalen dengan $x^4 = -i$, maka $1 = |-i| = |x^4| = |x|^4$ sehingga $|x| = 1$. Dari sini diperoleh $x = \text{cis}(\theta)$, maka $-i = x^4 = (\text{cis}(\theta))^4 = \text{cis}(4\theta)$. Tinjau $-i = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, ini berarti $\text{cis}(4\theta) = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, maka

$$4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \implies \theta = \frac{3 + 4k}{8}\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Diperoleh semua solusinya adalah $x \in \left\{ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{11\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{15\pi}{8}\right) \right\}$.

Tentukan hasil transformasi bidang kompleks z oleh fungsi linier $w = z + 1 - 2i$.

Solusi:

Misalkan hasil transformasinya adalah $w = u(x, y) + iv(x, y)$ di mana $u, v \in \mathbb{R}$ dan $z = x + iy$ di mana $x, y \in \mathbb{R}$. Maka

$$u + iv = (x + iy) + 1 - 2i = (x + 1) + (y - 2)i \implies u = x + 1, \quad v = y - 2.$$

Dari sini diperoleh bahwa apabila titik (x_0, y_0) di bidang z ditransformasikan oleh $w = z + 1 - 2i$ menjadi $(x_0 + 1, y_0 - 2)$. Dengan kata lain, hasil transformasi diperoleh dari translasi dari bidang z sejauh 1 satuan ke arah kanan dan 2 satuan ke arah bawah.