Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Fungsi Kompleks I

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

1 Carilah turunan fungsi kompleks $f(z) = \sin\left(\log\left(z^2\right)\right)$.

2 Tentukan himpunan terbesar $f(z) = e^{\frac{1}{1-az}}, a \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga fungsi $f(z)$ analitik.

3 Jika diberikan fungsi $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$, tentukan suatu fungsi kompleks $f(z) = u(x,y) + iv(xy)$ sedemikian sehingga $v(x,y)$ merupakan fungsi harmonik sekawan $u(x,y)$.

SOAL NOMOR

1

Carilah turunan fungsi kompleks $f(z) = \sin\left(\log\left(z^2\right)\right)$.

Solusi:

Klaim I. Fungsi $a(z) = \log\left(z^2\right)$ terdiferensial di $z \neq 0$ di mana $a'(z) = \dfrac{2}{z}$ untuk $z \neq 0$ dan $a'(0)$ tidak ada.

Bukti. Tinjau $a(0)$ tidak terdefinisi, maka $a'(0)$ tidak ada. Untuk $z \neq 0$, misalkan $z = re^{i\theta}$ di mana $r = |z| \in \mathbb{R}^+$ dan $\theta \in \mathbb{R}$. Maka

$$a(z) = a\left(re^{i\theta}\right) = \log\left(r^2e^{2i\theta}\right) = \ln\left|r^2\right| + i(2\theta + 2\pi k) = 2\ln(r) + i(2\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ini berarti $u(r,\theta) = 2\ln(r)$ dan $v(r,\theta) = 2\theta + 2\pi k$. Perhatikan bahwa $u_r = \dfrac{2}{r}$, $u_\theta = 0$, $v_r = 0$, dan $v_\theta = 2$. Karena $ru_r = v_\theta$ dan $rv_r = -u_\theta = 0$, maka u dan v memenuhi PCR di (r,θ). Karena masing-masing turunan parsial u dan v kontinu dan ada di semua persekitaran (r,θ), serta terpenuhinya PCR, ini berarti $a'(z)$ ada untuk $z \neq 0$, dengan

$$a'(z) = (u_r + iv_r)e^{-\theta} = \left(\frac{2}{r} + i \cdot 0\right)e^{-\theta} = \frac{2}{re^{i\theta}} = \frac{2}{z}, \quad z \neq 0.$$

Terbukti. □

Klaim II. Fungsi $b(z) = \sin(z)$ terdiferensial di $\mathbb{C}$ dengan $b'(z) = \cos(z)$.

Bukti. Misalkan $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$, diperoleh

$$b(z) = \sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).$$

Ini berarti $u(x,y) = \sin(x)\cosh(y)$ dan $v(x,y) = \cos(x)\sinh(y)$. Perhatikan bahwa $u_x = \cos(x)\cosh(y)$, $u_y = \sin(x)\sinh(y)$, $v_x = -\sin(x)\sinh(y)$, $v_y = \cos(x)\cosh(y)$. Karena $u_x = u_y$ dan $u_y = -v_x$, maka u dan v memenuhi PCR di (x,y). Karena masing-masing turunan parsial x dan y kontinu dan ada di semua persekitaran (x,y), serta terpenuhinya PCR, ini berarti $b'(z)$ ada untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, dengan

$$b'(z) = u_x + iv_x = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y) = \cos(x+iy) = \cos(z).$$

Terbukti. □

Tinjau $f(0)$ tidak terdefinisi karena $a(0) = \log(0)$ tidak terdefinisi, ini berakibat $f'(0)$ tidak ada. Untuk $z \neq 0$, maka $b(z)$ terdiferensial di $z \neq 0$ dan $(a \circ b)(z)$ juga terdiferensial di $b(z)$. Akibatnya, komposisi $f(z) = (a \circ b)(z)$ juga terdiferensial di $z \neq 0$, dengan

$$f'(z) = \frac{da}{db} \cdot \frac{db}{dz} = \cos\left(\log\left(z^2\right)\right) \cdot \frac{2}{z} = \frac{2\cos\left(\log\left(z^2\right)\right)}{z}.$$

Jadi,

$$f'(z) = \boxed{\begin{cases} \dfrac{2\cos\left(\log\left(z^2\right)\right)}{z}, & z \neq 0 \\ \text{tidak ada}, & z = 0 \end{cases}}.$$

Soal Nomor

2

Tentukan himpunan terbesar $f(z) = e^{\frac{1}{1-az}}, a \in \mathbb{C}$ sedemikian sehingga fungsi $f(z)$ analitik.

Solusi:

Untuk $a = 0$, maka $f(z) = e$.

Klaim I. Fungsi $f(z) = e$ fungsi analitik di setiap $z \in \mathbb{C}$.

Bukti. Misalkan $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$. Pada $f(z) = e$, maka $u(x, y) = e$ dan $v(x, y) = 0$ yang berarti $u_x = 0$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, dan $v_y = 0$. Karena $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$, ini berarti u dan v memenuhi PCR di (x, y). Karena masing-masing turunal parsial u dan v kontinu dan ada di setiap persekitaran (x, y), serta terpenuhinya PCR, ini berarti $f'(z)$ ada dengan $f'(z) = u_x + iv_x = 0$. Karena $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, ini artinya $f(z)$ analitik di mana-mana.

Jadi, himpunan terbesar z yang memenuhi adalah $\{z \mid z \in \mathbb{C}\}$ untuk $a = 0$. □

Selanjutnya akan ditinjau untuk $a \neq 0$.

Klaim II. Fungsi $b(z) = \dfrac{1}{z}$ analitik selain di $z = 0$.

Bukti. Tinjau $a(0)$ tidak terdefinisi, akibatnya $b'(0)$ tidak ada. Ini artinya $b(z)$ tidak analitik di $z = 0$. Untuk $z \neq 0$, misalkan $z = re^{i\theta}$ di mana $r = |z| \in \mathbb{R}^+$ dan $\theta \in \mathbb{R}$. Dari sini diperoleh

$$b\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{re^{it\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{r} = \frac{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}{r} = \frac{\cos(\theta)}{r} - \frac{\sin(\theta)}{r}i.$$

Ini berarti $u(r, \theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{r}$ dan $v(r, \theta) = -\dfrac{\sin(\theta)}{r}$. Perhatikan bahwa $u_r = -\dfrac{\cos(\theta)}{r^2}$, $u_\theta = -\dfrac{\sin(\theta)}{r}$, $v_r = \dfrac{\sin(\theta)}{r^2}$, dan $v_\theta = -\dfrac{\cos(\theta)}{r}$. Karena $ru_r = v_\theta$ dan $rv_r = -u_\theta$, ini berarti u dan v memenuhi PCR di (r, θ). Karena turunan parsial u dan v masing-masing kontinu dan terdefinisi di setiap persekitaran (r, θ), maka $b'(z)$ ada dengan

$$\begin{aligned} b'(z) &= (u_r + iv_r)e^{-i\theta} \\ &= \left(-\frac{\cos(\theta)}{r^2} + i\frac{\sin(\theta)}{r^2}\right)e^{-i\theta} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}{r^2} e^{-i\theta} \\
&= -\frac{e^{-i\theta} \cdot e^{-i\theta}}{r^2} \\
&= \frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.
\end{aligned}
$$

Karena $b'(z)$ ada di setiap $z \neq 0$, ini berarti $b(z)$ analitik di selain $z = 0$. $\square$

Ini menunjukkan bahwa $c(z) = \dfrac{1}{1 - az}$ analitik di setiap $1 - az = 0 \iff z = \dfrac{1}{a}$.

Klaim III. Fungsi $d(z) = e^z$ analitik di setiap $z \in \mathbb{C}$.

Bukti. Misalkan $z = x + iy$ di mana $x, y \in \mathbb{R}$, maka

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i\sin(y)) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y).$$

Ini berarti $u(x, y) = e^x \cos(y)$ dan $v(x, y) = e^x \sin(y)$. Ini artinya $u_x = e^x \cos(y)$, $u_y = -e^x \sin(y)$, $v_x = e^x \sin(y)$, dan $v_y = e^x \cos(y)$. Karena $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$, ini berarti u dan v memenuhi PCR di setiap (x, y). Karena masing-masing turunan parsial u dan v kontinu dan ada di setiap persekitaran (x, y), maka $d'(z)$ ada dengan

$$d'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = e^z.$$

Karena $d'(z)$ ada di setiap $z \in \mathbb{C}$, jadi $d(z)$ analitik di setiap $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Tinjau $f(z) = (d \circ c)(z)$. Karena $c\left(\dfrac{1}{a}\right)$ tidak terdefinisi, maka $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ juga tidak terdefinisi. Ini menunjukkan bahwa $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)$ tidak ada. Untuk $z \neq \dfrac{1}{a}$, maka $c(z)$ analitik di z dan $(d \circ c)(z)$ analitik di $c(z)$. Jadi, himpunan terbesar sehingga $f(z)$ analitik adalah $\left\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \dfrac{1}{a}\right\}$.
Jadi,

- Untuk $a = 0$, himpunan terbesar sehingga $f(z)$ analitik adalah $\boxed{\{z \mid z \in \mathbb{C}\}}$.
- Untuk $a \neq 0$, himpunan terbesar sehingga $f(z)$ analitik adalah $\boxed{\left\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \dfrac{1}{a}\right\}}$.

Soal Nomor

3

Jika diberikan fungsi $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$, tentukan suatu fungsi kompleks $f(z) = u(x,y) + iv(xy)$ sedemikian sehingga $v(x,y)$ merupakan fungsi harmonik sekawan $u(x,y)$.

Solusi:

Akan dibuktikan bahwa u fungsi harmonik. Tinjau $u_x = -6xy$, $u_{xx} = -6y$, $u_y = 3y^2 - 3x^2$, $u_{yy} = 6y$, yang memberikan $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Ini berarti u harmonik sehingga $u(x,y)$ memiliki fungsi harmonik sekawan $v(x,y)$. Tinjau

$$v_y = u_x = -6xy \implies v(x,y) = \int -6xy \, \mathrm{d}y = -3xy^2 + g(x)$$

di mana $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Di sisi lain,

$$-3y^2 + g'(x) = v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2 \implies g'(x) = 3x^2 \implies g(x) = x^3 + C$$

di mana $C \in \mathbb{R}$ suatu konstan. Diperoleh $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$ yang berarti

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = y^3 - 3x^2y + i\left(x^3 - 3xy^2 + C\right) = \boxed{i\left(z^3 + C\right)}$$

di mana $C \in \mathbb{R}$ suatu konstan.