Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Fungsi Khusus

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

1 Relasi rekurensi dari polinom Bessel adalah

$$B_n(x) = 2(n-1)B_{n-1}(x) - x^2 B_{n-2}(x)$$

dengan $B_1(x) = x + 1$ dan $B_2(x) = x^2 + 3x + 3$.

(a) Tentukan polinom Bessel $B_3(x)$.

(b) Hitung $\displaystyle\int x^{p+3}\, dx$ jika berlaku identitas integral polinom Bessel

$$\int x^{p+1} B_p(x)\, \mathrm{d}x = x^{p+1} B_{p+1}(x) + C.$$

2 Polinom Chebyshev didefinisikan dengan

$$T_n(x) = \cos\Big(n\cos^{-1}(x)\Big) \quad \text{ekivalen} \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

(a) Buktikan $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

(b) Tunjukkan

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases} .$$

3 Relasi rekursif untuk polinom Laguerre adalah

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

dengan $L_0(x) = 1$ dan $L_1(x) = 1 - x$.

(a) Tentukan polinom Laguerre $L_4(x)$.

(b) Verivikasi untuk nilai $n = 2$ dan $n = 3$ polinom Laguerre ortogonal terhadap fungsi bobot e^{-x}.

4 Representasi Rodrigues untuk polinom Hermite adalah

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

(a) Tentukan polinom Hermite $H_2(x)$ dan $H_3(x)$.

(b) Tunjukkan $H_2(x)$ dan $H_3(x)$ adalah ortogonal terhadap fungsi bobot e^{-x^2}.

Soal Nomor

1

Relasi rekurensi dari polinom Bessel adalah

$$B_n(x) = 2(n-1)B_{n-1}(x) - x^2 B_{n-2}(x)$$

dengan $B_1(x) = x + 1$ dan $B_2(x) = x^2 + 3x + 3$.

(a) Tentukan polinom Bessel $B_3(x)$.

(b) Hitung $\int x^{p+3}\, dx$ jika berlaku identitas integral polinom Bessel

$$\int x^{p+1} B_p(x)\, dx = x^{p+1} B_{p+1}(x) + C.$$

Solusi:

(a) Perhatikan bahwa

$$B_3(x) = 2(2)B_2(x) - x^2 B_1(x) = 4x^2 + 12x + 12 - x^3 - x^2 = \boxed{-x^3 + 3x^2 + 12x + 12}.$$

(b) Soal tidak jelas, sepertinya ada kesalahan dalam soal.

Soal Nomor **2**

Polinom Chebyshev didefinisikan dengan

$$T_n(x) = \cos\Big(n\cos^{-1}(x)\Big) \quad \text{ekivalen} \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

(a) Buktikan $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

(b) Tunjukkan

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x)T_n(x)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}.$$

Solusi:

(a) Substitusi $x = \cos\theta$, maka

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta \\ &= \cos(n\theta + \theta) \\ &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta) - \sin(\theta) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - (\cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos(n\theta - \theta) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos(n-1)\theta \\ &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

(b) Untuk $m = n = 0$, perhatikan bahwa $T_0(x) = \cos(0) = 1$. Ini berarti

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x)T_0(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Substitusi $x = \cos(\theta) \implies \mathrm{d}x = -\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta$, maka

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{-\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta)}} = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta}{\sin(\theta)} = \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\theta = \pi$$

karena $\sin(\theta) \geq 0$ untuk $0 \leq x \leq \pi$, terbukti.

Akan ditinjau untuk $m \neq n$, substitusikan $x = \cos(\theta) \implies \mathrm{d}x = -\sin(\theta)\ \mathrm{d}\theta$. Secara analog diperoleh

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(m\theta)\cos(n\theta)}{\sin(\theta)} \cdot (-\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Karena $\cos(m\theta)\cos(n\theta) = \dfrac{\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta}{2} = \dfrac{\cos(m+n)\theta}{2} + \dfrac{\cos(m-n)\theta}{2}$, diperoleh

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(m+n)\theta}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)\theta}{2(m-n)}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0$$

karena $\sin(k\pi) = 0$ untuk setiap bilangan bulat k. Terbukti.

Soal Nomor

3

Relasi rekursif untuk polinom Laguerre adalah

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

dengan $L_0(x) = 1$ dan $L_1(x) = 1 - x$.

(a) Tentukan polinom Laguerre $L_4(x)$.

(b) Verivikasi untuk nilai $n = 2$ dan $n = 3$ polinom Laguerre ortogonal terhadap fungsi bobot e^{-x}.

Solusi:

(a) Perhatikan bahwa $L_n(x) = \dfrac{(2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n+1}$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(3-x)L_1(x) - L_0(x)}{2} = \frac{(3-x)(1-x)-1}{2} = \frac{x^2-4x+2}{2},\\
L_3(x) &= \frac{(5-x)L_2(x) - 2L_1(x)}{3} = \frac{(5-x)\cdot\frac{x^2-4x+2}{2} - 2 + 2x}{3} = \frac{-x^3+9x^2-18x+6}{6},\\
L_4(x) &= \frac{(7-x)L_3(x) - 3L_2(x)}{4} = \frac{(7-x)\cdot\frac{-x^3+9x^2-18x+6}{6} - 3\cdot\frac{x^2-4x+2}{2}}{4}\\
&= \boxed{\frac{x^4-16x^3+72x^2-96x+24}{24}}.
\end{aligned}$$

(b) Akan dibuktikan $\int\limits_0^\infty L_2(x)L_3(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty L_2(x)L_3(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^\infty \frac{\left(x^2-4x+2\right)\left(-x^3+9x^2-18x+6\right)}{12}e^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{12}\int\limits_0^\infty -x^5e^{-x} + 13x^4e^{-x} - 56x^3e^{-x} + 96x^2e^{-x} - 60xe^{-x} + 12e^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{-\Gamma(6) + 13\Gamma(5) - 56\Gamma(4) + 96\Gamma(3) - 60\Gamma(2) + 12\Gamma(1)}{12}
\end{aligned}$$

karena $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\ \mathrm{d}x$. Karena $\Gamma(n) = (n-1)!$ untuk setiap bilangan asli n, maka

$$\int\limits_0^\infty L_2(x)L_3(x)e^{-x}\ dx = \frac{-5! + 13\cdot 4! - 56\cdot 3! + 96\cdot 2! - 60\cdot 1! + 12\cdot 0!}{12} = 0,$$

terbukti.

Soal Nomor

4

Representasi Rodrigues untuk polinom Hermite adalah

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}.$$

(a) Tentukan polinom Hermite $H_2(x)$ dan $H_3(x)$.

(b) Tunjukkan $H_2(x)$ dan $H_3(x)$ adalah ortogonal terhadap fungsi bobot e^{-x^2}.

Solusi:

(a) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{x^2} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \cdot (-2x)\right) = e^{x^2}\left(-2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x)\right) \\ &= \boxed{-2 + 4x^2}, \\ H_3(x) &= (-1)^3 e^{x^2} \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = -e^{x^2} \frac{d}{dx}\left(-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}\right) \\ &= -e^{x^2}\left(-2e^{-x^2}(-2x) + 4(2x)e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}(-2x)\right) \\ &= \boxed{8x^3 - 12x}. \end{aligned}$$

(b) Akan dibuktikan bahwa $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_2(x)H_3(x)e^{-x^2}\, dx = 0$. Misalkan

$$f(x) = H_2(x)H_3(x)e^{-x^2} = \left(4x^2 - 2\right)\left(8x^3 - 12x\right) e^{-x^2}.$$

Karena

$$f(-x) = \left(4x^2 - 2\right)\left(-8x^3 + 12x\right) e^{-x^2} = -\left(4x^2 - 2\right)\left(8x^3 - 12x\right) e^{-x^2} = -f(x),$$

maka f fungsi ganjil dan berakibat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_2(x)H_3(x)e^{-x^2}\, dx = 0.$