Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Analisis Real II

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

1 Buktikan fungsi f terdiferensial di titik $x = x_0$ jika dan hanya jika

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

untuk m konstan. Dalam hal ini, $m = f'(x_0)$.

2 Jika g bervariasi terbatas pada $[a, b]$ dan terdapat bilangan c sedemikian sehingga $0 < c \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, buktikan bahwa fungsi $\dfrac{1}{g}$ juga bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

3 Jika n suatu bilangan asli dan $f(x) = x^n e^{-x}$ dengan $0 < n < a$, buktikan f bervariasi terbatas pada $[0, a]$ dan tentukan $V(f, [0, a])$.

Soal Nomor

1

Buktikan fungsi f terdiferensial di titik $x = x_0$ jika dan hanya jika

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

untuk m konstan. Dalam hal ini, $m = f'(x_0)$.

Solusi:

($\Rightarrow$) Jika f terdiferensial di $x = x_0$, maka $f'(x_0)$ ada dan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = m$$

untuk suatu konstan m. Ini berarti

$$\begin{aligned} 0 = f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) - m = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m\right) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan.
($\Leftarrow$) Jika terdapat konstan m yang memenuhi

$$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m\right).$$

Akan dibuktikan bahwa $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ada.

Lemma. Diberikan fungsi $a(x)$ dan $b(x)$ yang bernilai real. Jika $\lim\limits_{x\to x_0} (a+b)(x)$ ada dan $\lim\limits_{x\to x_0} a(x)$ ada, maka $\lim\limits_{x\to x_0} b(x)$ ada.

Bukti. Karena $\lim\limits_{x\to x_0} (a+b)(x)$ ada dan $\lim\limits_{x\to x_0} a(x)$ ada, maka

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} b(x) &= \lim_{x\to x_0} \big(a(x) + b(x) - a(x)\big) = \lim_{x\to x_0} \big((a+b)(x) - a(x)\big) \\ &= \lim_{x\to x_0} (a+b)(x) - \lim_{x\to x_0} a(x) \end{aligned}$$

yang berarti $\lim\limits_{x\to x_0} b(x)$ ada. Lemma terbukti.

Pilih

$$b(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ m, & x = x_0 \end{cases}, \quad a(x) = -m.$$

Ini berarti

$$(a+b)(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}.$$

Karena

$$\lim_{x \to x_0} (a+b)(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right) = 0$$

dan $\lim\limits_{x \to x_0} a(x) = -m$, menurut lemma $\lim\limits_{x \to x_0} b(x)$ ada dan

$$\lim_{x \to x_0} b(x) = \lim_{x \to x_0} (a+b)(x) - \lim_{x \to x_0} a(x) = 0 - (-m) = m.$$

Dalam hal ini, $m = \lim\limits_{x \to x_0} b(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ yang menunjukkan f terdiferensial di x_0.

Soal Nomor 2

Jika g bervariasi terbatas pada $[a, b]$ dan terdapat bilangan c sedemikian sehingga $0 < c \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, buktikan bahwa fungsi $\dfrac{1}{g}$ juga bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

Solusi:

Karena g bervariasi terbatas pada $[a, b]$, maka $V(g, [a, b])$ terbatas. Akan dibuktian bahwa $1/g$ bervariasi terbatas. Ambil sebarang partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ di mana $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Maka

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{g}, [a, b]\right) &= \sup_P \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{g(x_k)} - \frac{1}{g(x_{k-1})} \right| = \sup_P \sum_{k=1}^{n} \frac{|g(x_{k-1}) - g(x_k)|}{|g(x_k) g(x_{k-1})|} \\ &= \sup_P \sum_{k=1}^{n} \frac{|g(x_k) - g(x_{k-1})|}{g(x_k) g(x_{k-1})}. \end{aligned}$$

Karena $0 < c \leq g(x)$, ini berarti $0 < \dfrac{1}{g(x)} \leq \dfrac{1}{c}$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Jadi,

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{g}, [a, b]\right) &= \sup_P \sum_{k=1}^{n} \frac{|g(x_k) - g(x_{k-1})|}{g(x_k) g(x_{k-1})} \leq \sup_P \sum_{k=1}^{n} \frac{|g(x_k) - g(x_{k-1})}{c^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \sup_P \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{c^2} V(g, [a, b]). \end{aligned}$$

Ini berarti

$$V\left(\frac{1}{g}, [a, b]\right) \leq \frac{1}{c^2} V(g, [a, b]).$$

Karena $V(g, [a, b])$ terbatas, maka $V(1/g, [a, b])$ juga terbatas. Terbukti bahwa $\dfrac{1}{g}$ bervariasi terbatas di $[a, b]$.

SOAL NOMOR

3

Jika n suatu bilangan asli dan $f(x) = x^n e^{-x}$ dengan $0 < n < a$, buktikan f bervariasi terbatas pada $[0, a]$ dan tentukan $V(f, [0, a])$.

Solusi:

Perhatikan bahwa f kontinu di $\mathbb{R}$ dan

$$f'(x) = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n - x)$$

yang juga kontinu di $\mathbb{R}$. Tentu, f dan f' juga kontinu di $[0, a]$. Akibatnya, f bervariasi terbatas pada $[0, a]$ dan

$$V(f, [0, a]) = \int_0^a |f'(x)| \, \mathrm{d}x = \int_0^a \left| x^{n-1}e^{-x}(n - x) \right| \, \mathrm{d}x = \int_0^a x^{n-1}e^{-x}|n - x| \, \mathrm{d}x$$

karena $x^{n-1}, e^{-x} \geq 0$ untuk $x \in [0, a]$. Karena $0 < n < a$, tinjau

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^{n-1}e^{-x}|n - x| \, \mathrm{d}x &= \int_0^n x^{n-1}e^{-x}|n - x| \, \mathrm{d}x + \int_n^a x^{n-1}e^{-x}|n - x| \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^a x^{n-1}e^{-x}(n - x) \, \mathrm{d}x + \int_n^a x^{n-1}e^{-x}(x - n) \, \mathrm{d}x \\
&= n\int_0^n x^{n-1}e^{-x} \, \mathrm{d}x - \int_0^n x^n e^{-x} \, \mathrm{d}x + \int_n^a x^n e^{-x} \, \mathrm{d}x - n\int_n^a x^{n-1}e^{-x} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Akan diselesaikan $\int x^k e^{-x} \, \mathrm{d}x$ di mana k bilangan bulat tak negatif. Menggunakan integral parsial berkali-kali,

$$\int x^k e^{-x} \, \mathrm{d}x = -\sum_{i=0}^{k} i! \binom{k}{i} x^{k-i}e^{-x}, \qquad \binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}.$$

Diperoleh

$$n\int_0^n x^{n-1}e^{-x} \, \mathrm{d}x = n\left[-\sum_{i=0}^{n-1} i! \binom{n-1}{i} x^{n-1-i}e^{-x}\right]_0^n = n\left[-\sum_{i=0}^{n-1} i! \binom{n-1}{i} n^{n-1-i}e^{-n} + (n-1)!\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= n! - \sum_{i=0}^{n-1} i!\binom{n-1}{i} n^{n-i}e^{-n}. \\
\int\limits_0^n x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-\sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i} x^{n-i}e^{-x}\right]_0^n = -\sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i} n^{n-i}e^{-n} + n!. \\
\int\limits_n^a x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-\sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i} x^{n-i}e^{-x}\right]_n^a = \sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i} n^{n-i}e^{-n} - \sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i} a^{n-i}e^{-a}. \\
n\int\limits_n^a x^{n-1}e^{-e}\,\mathrm{d}x &= n\left[-\sum_{i=0}^{n-1} i!\binom{n-1}{i} x^{n-1-i}e^{-x}\right]_n^a \\
&= n\left[-\sum_{i=0}^{n-1} i!\binom{n-1}{i} a^{n-1-i}e^{-a} + \sum_{i=0}^{n-1} i!\binom{n-1}{i} n^{n-1-i}e^{-n}\right] \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} ni!\binom{n-1}{i} a^{n-1-i}e^{-a} + \sum_{i=0}^{n-1} i!\binom{n-1}{i} n^{n-i}e^{-n}.
\end{aligned}
$$

Lakukan perhitungan, diperoleh nilai dari $V(f,[0,a])$ adalah

$$
\boxed{\sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i}\left(2n^{n-i}e^{-n} - a^{n-i}e^{-a}\right) + \sum_{i=0}^{n-1} i!\binom{n-1}{i}\left(na^{n-1-i}e^{-a} - 2n^{n-i}e^{-n}\right)}.
$$

Komentar. ANALISIS REAL KOK NGULI!??!