Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Analisis Real II

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

1 Misalkan fungsi f non-negatif dan kontinu apda $[a, b]$ yang memenuhi $\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

2 Diandaikan fungsi g naik pada $[a, b]$, $a \leq c \leq b$, g kontinu di c dengan $f(c) = 1$ dan $f(x) = 0$ jika $x \neq c$. Buktikan bahwa f terintegral Riemann-Stieljes terhadap g dan

$$\int\limits_a^b f\ \mathrm{d}g = 0.$$

3 (a) Misalkan (X, d_1) dan (Y, d_2) merupakan ruang metrik, himpunan $E \subset X$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \to Y$. Tuliskan definisi f_n konvergen seragam pada E.

(b) Tentukan fungsi limit barisan f untuk barisan $\langle f_n \rangle$ dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $n \in \mathbb{N}$. Masing-masing f_n kontinu pada $[0, 1]$, apakah f juga kontinu? Apakah $f_n \to f$ seragam pada $[0, 1]$?

4 Buktikan bahwa deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + x}{n^2}$$

konvergen seragam pada setiap selang tertutup dan terbatas.

SOAL NOMOR

1

Misalkan fungsi f non-negatif dan kontinu apda $[a, b]$ yang memenuhi $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

Solusi:

Andaikan terdapat $c \in [a, b]$ yang memenuhi $f(c) > 0$. Karena f kontinu di c, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$. sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Lemma. Terdapat $p > 0$ sedemikian sehingga $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < p$.

Bukti. Pilih $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$, terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta_1$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$. Ini berakibat

$$\frac{f(c)}{2} > |f(x) - f(c)| = |f(c) - f(x)| \geq |f(c)| - |f(x)| = f(c) - f(x)$$

sehingga $f(x) > \frac{f(c)}{2}$. Jadi, untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta_1$ berlaku $f(x) > \frac{f(c)}{2}$.

Pilih $w = \frac{1}{2} \min\{\delta, \delta_1, c - a, b - c\} > 0$. Akan dibagi menjadi tiga kasus.

- Jika $c \in (a, b)$, dengan kondisi f tak negatif berlaku

  $$0 = \int_a^b f\, dx = \int_a^{c-w} f\, dx + \int_{c-w}^{c+w} f\, dx + \int_{c+w}^{b} f\, dx \geq 0 + \int_{c-w}^{c+w} f\, dx + 0 = \int_{c-w}^{c+w} f\, dx.$$

  Perhatikan bahwa untuk $c - w \leq x \leq c + w$ berarti

  $$|x - c| \leq w \leq \frac{1}{2}\delta_1 < \delta_1$$

  sehingga menurut lemma berlaku $f(x) > \frac{f(c)}{2}$. Ini berarti

  $$\int_{c-w}^{c+w} f\, dx \geq \int_{c-w}^{c+w} \frac{f(c)}{2}\, dx = \frac{f(c)}{2}((c + w) - (c - w)) = 2wf(c).$$

Diperoleh hubungan

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}x \geq 2wf(c) > 0$$

sehingga kontradiksi.

- Jika $c = a$, pilih $w = \frac{1}{2}\min\{\delta, \delta_1, b-a\} > 0$. Dengan cara yang sama berlaku

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^{a+w} f \, \mathrm{d}x + \int_{a+w}^b f \, \mathrm{d}x \geq \int_a^{a+w} \frac{f(a)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{wf(a)}{2} > 0$$

sehingga kontradiksi.

- Jika $c = b$, pilih $w = \frac{1}{2}\min\{\delta, \delta_1, b-a\} > 0$. Dengan cara yang sama berlaku

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^{b-w} f \, \mathrm{d}x + \int_{b-w}^b f \, \mathrm{d}x \geq \int_{b-w}^b \frac{f(b)}{2} > \frac{wf(b)}{2} > 0$$

sehingga kontradiksi.

Jadi, $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

Soal Nomor

2

Diandaikan fungsi g naik pada $[a,b]$, $a \le c \le b$, g kontinu di c dengan $f(c)=1$ dan $f(x)=0$ jika $x \neq c$. Buktikan bahwa f terintegral Riemann-Stieljes terhadap g dan

$$\int_a^b f \ \mathrm{d}g = 0.$$

Solusi:

Karena g kontinu di c, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in [a,b]$ dengan $|x-c| < \delta$ berlaku $|g(x)-g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Akan dibagi menjadi tiga kasus.

Kasus 1. Jika $c \in (a,b)$.

Pilih $h = \frac{1}{2}\min\{c-a, b-c, \delta\}$ dan partisi

$$P := \{x_0 = a, x_1 = c-h, x_2 = c+h, x_3 = b\}$$

Diperoleh

$$M_1(f) = 0, M_2(f) = 1, M_3(f) = 0, \quad m_1(f) = m_2(f) = m_3(f) = 0.$$

Dari sini diperoleh

$$U(f;g,P) - L(f;g,P) = \sum_{i=1}^{3}(M_i(f) - m_i(f))\Delta g_i = \Delta g_2 = g(x_2) - g(x_1) = g(c+h) - g(c-h).$$

Perhatikan bahwa

$$|(c+h)-c| = |h| \le \frac{1}{2}\delta < \delta$$

sehingga berakibat $|g(c+h)-g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dengan alasan yang sama, $|g(c-h)-g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
|g(c+h) - g(c-h)| &= \Big|\Big(g(c+h) - g(c)\Big) - \Big(g(c-h) - g(c)\Big)\Big| \\
&\le |g(c+h) - g(c)| + |g(c-h) - g(c)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

sehingga $U(f;g,P) - L(f;g,P) < \varepsilon$ yang membuktikan $f \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$. Maka terdapat $\delta' > 0$ sehingga untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta'$ berlaku $|S(f;g,P) - A| < \varepsilon$. Dengan memilih $t_i \neq c$,

$$\varepsilon > \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g_i - A \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta g_i - A \right| = |-A| = |A| \geq 0.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $A = 0$.

Kasus 2. Jika $c = a$ atau $c = b$.

Akan ditinjau jika $c = a$, sedankan kasus $c = b$ dapat dibuktikan secara analog. Pilih $h = \min\left\{a + \frac{\delta}{2}, b\right\}$. Karena $a + \frac{\delta}{2}, b > a$, ini berarti $h > a$. Diperoleh pula

$$|h - a| = h - a \leq a + \frac{\delta}{2} - a = \frac{\delta}{2} < \delta$$

sehingga berlaku $|g(h) - g(a)| < \varepsilon$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} U(f;g,P) - L(f;g,P) &= (M_1(f) - m_1(f))\Delta g_1 + (M_2(f) - m_2(f))\Delta g_2 \\ &= (1-0)(g(h) - g(a)) + (0-0)\Delta g_2 \\ &= g(h) - g(a) \\ &\leq |g(h) - g(a)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ini berarti $f \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$ dan dengan cara yang sama seperti kasus sebelumnya, diperoleh $\int_a^b f \, \mathrm{d}g = 0$.

Soal Nomor

3

(a) Misalkan (X, d_1) dan (Y, d_2) merupakan ruang metrik, himpunan $E \subset X$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \to Y$. Tuliskan definisi f_n konvergen seragam pada E.

(b) Tentukan fungsi limit barisan f untuk barisan $\langle f_n \rangle$ dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $n \in \mathbb{N}$. Masing-masing f_n kontinu pada $[0, 1]$, apakah f juga kontinu? Apakah $f_n \to f$ seragam pada $[0, 1]$?

Solusi:

(a) Barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada E dengan $f_n \to f$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan setiap $x \in E$ berlaku $d_2(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

(b) Untuk setiap $x \in [0, 1]$, akan dibuktikan bahwa $f(x) = 0$. Untuk $x = 0$, perhatikan bahwa $f_n(0) = 1 - n(0) = 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sehingga $f_n(0)$ konvergen ke 1. Untuk $x \in (0, 1]$, akan dibuktikan bahwa f_n konvergen ke 0. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut Archimedes terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\dfrac{1}{x} < N$. Untuk setiap bilangan asli $n \geq N$, yaitu $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < x$ sehingga berlaku

$$|f_n(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

yang menunjukkan $f_n(x) \to 0$. Jadi,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \boxed{f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}}.$$

Ini menunjukkan $\boxed{f \text{ tidak kontinu}}$, yaitu tidak kontinu di $x = 0$. Akan ditunjukkan f_n tidak konvergen seragam ke f. Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan memilih $x = \dfrac{1}{2n}$ yang mana $0 \leq x < \dfrac{1}{n}$ berlaku

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left|1 - n \cdot \frac{1}{2n} - 0\right| = \frac{1}{2}.$$

Karena ini berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} M_n \geq \frac{1}{2}$ yang mana $\lim_{n\to\infty} M_n \neq 0$. Ini menunjukkan f_n $\boxed{\text{tidak konvergen seragam}}$ pada $[0,1]$.

Soal Nomor

4

Buktikan bahwa deret

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+x}{n^2}$$

konvergen seragam pada setiap selang tertutup dan terbatas.

Solusi:

Misalkan $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+x}{n}$ merupakan barisan fungsi pada interval tertutup $[a, b]$. Perhatikan bahwa

$$|f_n(x)| = \left|(-1)^n \frac{x^2+x}{n}\right| = \frac{|x^2+x|}{n}.$$

Karena x^2+x merupakan fungsi kontinu dan $[a, b]$ kompak, maka x^2+x mencapai nilai minimum dan maksimum di $[a, b]$. Misalkan p dan P berturut-turut menyatakan nilai minimum dan maksimum dari x^2+x di $[a, b]$, diperoleh $|x^2+x| \leq \max\{|p|, |P|\} = Y$ untuk suatu $Y \geq 0$. Oleh karena itu,

$$|f_n(x)| = \frac{|x^2+x|}{n^2} \leq \frac{Y}{n^2}.$$

Dalam hal ini, $M_n = \dfrac{Y}{n^2}$ yang mana deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = Y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen. Ini menunjukkan bahwa $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergen seragam pada $[a, b]$.