Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Analisis Real II

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2022

Soal

1 Jika $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, maka $f^2, f+g$, dan $f-g$ masing-masing teintegral Riemann di $[a,b]$. Menggunakan fakta tersebut, buktikan jika $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ maka $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

2 Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{untuk } 1 < x \le 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{untuk } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Selidiki apakah f terintegral Riemann-Stieltjes pada $[0,2]$.

3 Tentukan fungsi limit barisan f untuk barisan $\langle f_n \rangle$ dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \le x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

untuk $0 \le x \le 1$ dan $n \in \mathbb{N}$. Masing-masing f_n kontinu pada $[0,1]$, apakah f juga kontinu? Apakah $f_n \to f$ seragam pada $[0,1]$?

4 Misalkan (X, d_1) dan (Y, d_2) merupakan ruang metrik, himpunan $E \subset X$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \to Y$. Tuliskan definisi f_n konvergen seragam pada E.

Soal Nomor

1

Jika $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, maka $f^2, f + g$, dan $f - g$ masing-masing teintegral Riemann di $[a, b]$. Menggunakan fakta tersebut, buktikan jika $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ maka $fg \in \mathcal{R}[a, b]$.

Solusi:

Diketahui $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Ini berarti $f+g, f-g \in \mathcal{R}[a, b]$ sehingga diperoleh pula $(f+g)^2, (f-g)^2 \in \mathcal{R}[a, b]$. Akibatnya,

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \in \mathcal{R}[a, b]$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Soal Nomor

2

Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{untuk } 1 < x \le 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{untuk } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Selidiki apakah f terintegral Riemann-Stieltjes pada $[0,2]$.

Solusi:

Akan dibuktikan bahwa $f \notin \mathcal{RS}(g)[0,2]$. Pilih $\varepsilon = 1$. Ambil sebarang partisi $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[0,2]$, maka terdapat bilangan asli k dengan $1 \le k \le n$ yang memenuhi $1 \in [x_k, x_{k+1}]$. Ini berarti $M_i(f) = m_i(f) = 1$ untuk setiap $i \le k$ dan $M_j(f) = m_j(f) = 0$ untuk setiap $j \ge k+2$. Jadi,

$$\begin{aligned} U(f;g,P) - L(f;g,P) &= \sum_{i=1}^{k}(M_i(f) - m_i(f))\Delta g_i + (M_{k+1}(f) - m_{k+1}(f))\Delta g_{k+1} \\ &\quad + \sum_{j=k+2}^{n}(M_j(f) - m_j(f))\Delta g_j \\ &= \sum_{i=1}^{k}(1-1)\Delta g_i + (1-0)\Delta g_{k+1} + \sum_{j=k+2}^{n}(0-0)\Delta g_j \\ &= \Delta g_k \\ &= g(x_{k+1}) - g(x_k) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \\ &\ge \varepsilon \end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Soal Nomor

3

Tentukan fungsi limit barisan f untuk barisan $\langle f_n \rangle$ dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $n \in \mathbb{N}$. Masing-masing f_n kontinu pada $[0,1]$, apakah f juga kontinu? Apakah $f_n \to f$ seragam pada $[0,1]$?

Solusi:

Untuk setiap $x \in [0,1]$, akan dibuktikan bahwa $f(x) = 0$. Untuk $x = 0$, perhatikan bahwa $f_n(0) = 1 - n(0) = 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sehingga $f_n(0)$ konvergen ke 1. Untuk $x \in (0,1]$, akan dibuktikan bahwa f_n konvergen ke 0. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut Archimedes terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\dfrac{1}{x} < N$. Untuk setiap bilangan asli $n \geq N$, yaitu $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < x$ sehingga berlaku

$$|f_n(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

yang menunjukkan $f_n(x) \to 0$. Jadi,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \boxed{f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}}.$$

Ini menunjukkan $\boxed{f \text{ tidak kontinu}}$, yaitu tidak kontinu di $x = 0$. Akan ditunjukkan f_n tidak konvergen seragam ke f. Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan memilih $x = \dfrac{1}{2n}$ yang mana $0 \leq x < \dfrac{1}{n}$ berlaku

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left|1 - n \cdot \frac{1}{2n} - 0\right| = \frac{1}{2}.$$

Karena ini berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \geq \dfrac{1}{2}$ yang mana $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \neq 0$. Ini menunjukkan f_n $\boxed{\text{tidak konvergen seragam}}$ pada $[0,1]$.

Soal Nomor 4

Misalkan (X, d_1) dan (Y, d_2) merupakan ruang metrik, himpunan $E \subset X$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \to Y$. Tuliskan definisi f_n konvergen seragam pada E.

Solusi:

Barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada E dengan $f_n \to f$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan setiap $x \in E$ berlaku $d_2(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.