Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Analisis Real II

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2021

Soal

1 Jika $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, buktikan bahwa

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2 Jika $f \in \mathcal{RS}[a, b]$ dan $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a, b]$, buktikan bahwa

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g \right| \leq M|g(a) - g(b)|.$$

3 (a) Dimisalkan (X, d) dan (Y, D) masing-masing ruang metrik, himpunan $E \subset X$ daN $f : E \to Y$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tuliskan definisi barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke fungsi f pada E.

(b) Amatilah apakah barisan $\langle f_n \rangle$ dan $\langle g_n \rangle$ dengan $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ dan $g_n(x) = \dfrac{1}{x}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ konvergen seragam pada interval $(0, 1)$.

Soal Nomor

1

Jika $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, buktikan bahwa

$$\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Solusi:

Misalkan $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = A$ dan $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = B$. Akan dibuktikan bahwa $A \leq B$. Misalkan $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dan tinjau bahwa $A = \sup\limits_P L(f,P)$ dan $B = \sup\limits_P L(g,P)$. Karena $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka $m_i(f) \leq m_i(g)$. Ini berarti

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(g)\Delta x_i = L(g,P).$$

Karena ini berlaku untuk sebarang $P \in \mathcal{P}[a,b]$,

$$A = \sup_P L(f,P) \leq \sup_P L(g,P) = B$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Soal Nomor

2

Jika $f \in \mathcal{RS}[a,b]$ dan $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a,b]$, buktikan bahwa

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}g \right| \leq M|g(a) - g(b)|.$$

Solusi:

Berdasarkan teorema rata-rata, terdapat $c \in [a,b]$ sedemikian sehingga $\int\limits_a^b f\ \mathrm{d}g = f(c)(g(b) - g(a))$.

Ini berarti

$$\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}g \right| = |f(c)(g(b) - g(a)| = |f(c)||g(b) - g(a)| \leq M|g(b) - g(a)|$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Soal Nomor

3

(a) Dimisalkan (X, d) dan (Y, D) masing-masing ruang metrik, himpunan $E \subset X$ daN $f : E \to Y$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tuliskan definisi barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke fungsi f pada E.

(b) Amatilah apakah barisan $\langle f_n \rangle$ dan $\langle g_n \rangle$ dengan $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$ dan $g_n(x) = \dfrac{1}{x}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ konvergen seragam pada interval $(0, 1)$.

Solusi:

(a) Barisan $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada E dengan $f_n \to f$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan setiap $x \in E$ berlaku $D(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

(b) Akan dibuktikan bahwa $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen seragam. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut Archimedes terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\dfrac{2}{\varepsilon} < N$ atau setara dengan $\dfrac{2}{N} < \varepsilon$. Untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq N$ dan setiap $x \in (0, 1)$, dengan ketaksamaan segitiga berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$$

yang berarti memenuhi kriteria Cauchy. Jadi, $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam di $(0, 1)$.
Akan dibuktikan $\langle g_n \rangle$ konvergen seragam. Untuk setiap bilangan asli m, n dan $x \in (0, 1)$ berlaku

$$|f_m(x) - f_n(x)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right| = 0 < \varepsilon$$

yang berarti memenuhi kriteria Cauchy. Jadi, $\langle g_n \rangle$ konvergen seragam di $(0, 1)$.