Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Analisis Real I

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2025

Soal

1 Diberikan fungsi $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Buktikan bahwa $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$.

2 Diberikan x dan y dua bilangan real. Buktikan bahwa

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

3 Show that the following function define a metric on $\mathbb{R}$, $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$.

4 Discuss whether the following sets are open or closed. Determine the interior, closure, and boundary of each set.

(a) $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) $[1, 2] \subseteq \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-2, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$.

SOAL NOMOR

1

Diberikan fungsi $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Buktikan bahwa $(-1,1) \sim \mathbb{R}$.

Solusi:

Akan dibuktikan bahwa f fungsi 1-1, misalkan $f(x) = f(y)$ yang berarti $\frac{x}{x^2-1} = \frac{y}{y^2-1}$. Ini setara dengan

$$xy^2 - x = x^2y - y \iff y - x = x^2y - xy^2 = xy(x-y).$$

Andaikan $x \neq y$, ini berarti $xy = -1$. Namun, $x, y \in (-1,1)$ sehingga $-1 < xy < 1$ yang tentu kontradiksi. Jadi, $x = y$ sehingga terbukti.

Akan dibuktikan f onto, ambil sebarang $c \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $x = \frac{1}{2c} - \sqrt{\frac{1}{4c^2}+1} \in (-1,1)$. Tinjau bahwa

$$2 < \sqrt{\frac{1}{4c^2}+4} \iff \frac{1}{4c^2} - \sqrt{\frac{1}{c^2}+4} + 2 < \frac{1}{4c^2}$$

sehingga $\left(\sqrt{\frac{1}{4c^2}+1} - 1\right)^2 < \left(\frac{1}{2c}\right)^2$. Ini berarti

$$\sqrt{\frac{1}{4c^2}+1} - 1 < \frac{1}{2c} \iff -1 < \frac{1}{2c} - \sqrt{\frac{1}{4c^2}+1} < 0$$

sehingga terbukti. Di sisi lain, $f(x) = c$ sehingga terbukti f onto.
Terbukti $(-1,1) \sim \mathbb{R}$.

SOAL NOMOR **2**

Diberikan x dan y dua bilangan real. Buktikan bahwa

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Solusi:

Perhatikan bahwa $\dfrac{a}{1+a} = 1 - \dfrac{1}{1+a}$, maka dalam hal ini ekivalen dengan membuktikan

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{1+|x+y|} &\leq 1 - \frac{1}{1+|x|} + 1 - \frac{1}{1+|y|} \\
\iff \quad \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|y|} &\leq 1 + \frac{1}{1+|x+y|}.
\end{aligned}$$

Akan digunakan ketaksamaan segitiga $|x+y| \leq |x| + |y|$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{1+|x+y|} &\geq 1 + \frac{1}{1+|x|+|y|} \\
&= \frac{2+|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \\
&\geq \frac{2+|x|+|y|}{1+|x|+|y|+|xy|} \\
&= \frac{2+|x|+|y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \\
&= \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|y|}.
\end{aligned}$$

Terbukti.

Soal Nomor 3

Show that the following function define a metric on $\mathbb{R}$, $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$.

Solusi:

Akan dibuktikan tiga hal. Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- Perhatikan bahwa $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} \geq 0$ di mana $0 = d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ jika dan hanya jika $x = y$.
- Perhatikan bahwa $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d(y,x)$.
- Akan dibuktikan bahwa $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \iff \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|} \geq \sqrt{|x-z|}$. Misalkan $a = |x-y|, b = |y-z|$, dan $c = |x-z|$. Dari ketaksamaan segitiga diperoleh

$$c = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = a + b \implies c \leq a + b.$$

Perhatikan bahwa

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b \geq c$$

yang memberikan $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{c}$, terbukti.

Terbukti $(\mathbb{R}, d)$ membentuk metrik.

Soal Nomor

4

Discuss whether the following sets are open or closed. Determine the interior, closure, and boundary of each set.

(a) $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) $[1,2] \subseteq \mathbb{R}$.

(c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-2, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$.

Solusi:

Misalkan $A := (0,1), B := [1,2]$, dan $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-2, \frac{1}{n}\right)$.

(a) Akan dibuktikan bahwa $A^o = (0,1)$. Ambil sebarang $x \in (0,1)$, pilih $r := \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$. Ini berarti

$$x + r \le x + \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2} < 1, \quad x - r \ge x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0$$

yang menunjukkan $N_r(x) \subseteq A$, terbukti. Karena $A^o = A$, maka A terbuka.

Akan dibuktikan bahwa $A' = [0,1]$. Misalkan $y \in \mathbb{R}$. Andaikan $y > 1$, untuk $\varepsilon := \frac{y-1}{2}$ yang mana

$$y - \varepsilon = y - \frac{y-1}{2} = \frac{y+1}{2} > 1$$

yang menunjukkan $N_\varepsilon(y) \cap A = \{y\}$ sehingga y bukan titik limit dari A. Andaikan $y < 0$, pilih $\varepsilon := -\frac{y}{2}$ sehingga $y + \varepsilon = \frac{y}{2} < 0$ yang berarti $N_\varepsilon(y) \cap A = \{y\}$. Jadi, y bukan titik limit dari A. Jika $y = 0$, tinjau bahwa $\varepsilon \in N_\varepsilon(0) \cap A$ untuk $\varepsilon \le 1$ dan $\frac{1}{2} \in N_\varepsilon(0) \cap A$ untuk $\varepsilon > 1$. Ini berarti $N_\varepsilon(0) \cap A$ mengandung anggota yang berbeda dengan 0 yang menunjukkan $0 \in A'$. Jika $y = 1$, tinjau $1 - \varepsilon \in N_\varepsilon(1) \cap A$ untuk setiap $\varepsilon \le 1$ dan $\frac{1}{2} \in N_\varepsilon(1) \cap A$ sehingga $1 \in A'$. Jika $0 < y < 1$, tinjau $(y + \varepsilon) \in N_\varepsilon(1) \cap A$ untuk $\varepsilon \le \min\{y, 1-y\}$. Jika $\varepsilon > y$ tinjau $\frac{y}{2} \in N_\varepsilon(y) \cap A$, sedangkan $\varepsilon > 1 - y$ tinjau pula $\frac{y+1}{2} \in N_\varepsilon(y) \cap A$. Ini berarti $N_\varepsilon(y) \cap A$ mengandung anggota lain selain y sehingga $y \in A'$. Jadi, $A' = [0,1]$.

Tinjau *boundary* dari A adalah $\partial A = A' \setminus A^o = \{0,1\}$.

(b) Akan dibuktikan bahwa $B^o = (1,2)$. Ambil sebarang $x \in (1,2)$, pilih $r := \frac{1}{2}\min\{r-1, 2-r\}$ sehingga

$$x + r \leq x + \frac{2-x}{2} = \frac{2+x}{2} < 2, \quad x - r \geq x - \frac{1-x}{2} = \frac{x+1}{2} > 1$$

yang menunjukkan $N_r(x) \subseteq B$. Jadi, $B^o = (1,2)$.

Akan dibuktikan $B' = [1,2]$. Misalkan $y \in \mathbb{R}$. Andaikan $y > 2$, untuk $\varepsilon := \frac{y-2}{2}$ yang mana

$$y - \varepsilon = y - \frac{y-2}{2} = \frac{y+2}{2} > 2 \implies N_\varepsilon(y) \cap B = \{y\}$$

yang berarti $y \notin B'$. Andaikan $y < 1$, untuk $\varepsilon := \frac{1-y}{2}$ yang mana

$$y + \varepsilon = y - \frac{1-y}{2} = \frac{1+y}{2} < 1 \implies N_\varepsilon(y) \cap B = \{y\}$$

sehingga $y \notin B'$. Jika $y = 1$, tinjau $y + \varepsilon \in N_\varepsilon(1) \cap B$ untuk $\varepsilon \leq 1$ dan $\frac{3}{2} \in N_\varepsilon(1) \cap B$ untuk $\varepsilon > 1$ sehingga diperoleh $1 \in B'$. Jika $y = 2$, tinjau $y - \varepsilon \in B$ untuk $\varepsilon \leq 1$ dan $\frac{3}{2} \in B$ untuk $\varepsilon > 1$ sehingga $2 \in B'$. Jika $1 < y < 2$, tinjau $(y + \varepsilon) \in N_\varepsilon(y) \cap B$ untuk $\varepsilon \leq \min\{2-y, y-1\}$. Jika $\varepsilon > y - 1$ tinjau $1 \in N_\varepsilon(y) \cap B$, sedangkan jika $\varepsilon > 2 - y$ tinjau $2 \in N_\varepsilon(y) \cap B$. Jadi, $y \in B'$ yang menunjukkan $B' = [1,2]$. Karena $B' = B$, ini berarti B tertutup.

Diperoleh *boundary* dari B adalah $\partial B = B' \setminus B^o = \{1,2\}$.

(c) Akan dibuktikan $C = [-2,0]$. Perhatikan $[-2,0] \subseteq C$ karena untuk setiap $p \in [-2,0]$ berlaku $p \in \left[-2, \frac{1}{n}\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $C \subseteq [-2,0]$. Hal ini ekivalen dengan membuktikan bahwa tidak ada $k > 0$ yang memenuhi $k \in C$. Misalkan $k > 0$, dari properti Archimedes berlaku terdapat bilangan asli $N > 1$ yang memenuhi $N > \frac{1}{k} \iff k > \frac{1}{N}$. Ini menunjukkan bahwa $k \notin \left[-2, \frac{1}{N}\right)$ sehingga $k \notin C$. Terbukti bahwa $C \subseteq [-2,0]$ sehingga $C = [-2,0]$. Selanjutnya dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti (b) dan diperoleh $B^o = (-2,0), B' = [-2,0], \partial B = \{-2,0\}$ sehingga B tertutup.