Soal dan Solusi UTS Analisis Real I 2024

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Misalkan $A, B \subset \mathbb{R}$ keduanya tidak kosong dan terbatas.

(a) Buktikan bahwa batas atas terkecil ($\sup A$) adalah tunggal.

(b) Buktikan $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Penyelesaian.

Karena A, B terbatas ke atas dan $\mathbb{R}$ memiliki sifat supremum, maka $\sup A, \sup B$ ada di $\mathbb{R}$.

(a) Misalkan a dan a' adalah batas atas terkecil dari $\sup A$. Ini berarti a dan a' keduanya adalah batas atas dari a. Karena a' batas atas dari A, maka $a \leq a'$. Karena a juga batas atas dari A, maka $a \leq a'$. Dari $a \leq a'$ dan $a' \leq a$ diperoleh bahwa $a = a'$. Terbukti batas atas terkecil adalah tunggal.

(b) Akan dibuktikan bahwa $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$. Ambil sebarang $(x+y) \in (A+B)$ di mana $x \in A$ dan $y \in B$. Karena $x \leq \sup A$ dan $y \leq \sup B$, maka $x + y \leq \sup(A) + \sup(B)$. Karena berlaku untuk sebarang $(x+y) \in (A+B)$, ini berarti $\sup(A) + \sup(B)$ adalah batas atas dari $A + B$. Mengingat $A + B \subseteq \mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}$ memiliki sifat supremum, maka $\sup(A+B)$ ada dan $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$. (1)

Akan dibuktikan bahwa $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $x^* \in A$ dan $y^* \in B$ sedemikian sehingga $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < x^*$ dan $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < y^*$. Ini berarti $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < x^* + y^*$. Mengingat $x^* + y^* \in (A+B)$, maka

$$\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < x^* + y^* \leq \sup(A+B) \implies \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < \sup(A) + \sup(B).$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$. (2)

Karena (1) dan (2), terbukti bahwa $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A+B)$.

▼

Question 2

Penutup (*closure*) himpunan E didefinisikan sebagai $\overline{E} = E \cup E'$ di mana E' himpunan semua titik limit E. Secara umum berlaku

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Jika $A = (0,1)$ dan $B = (1,2)$ masing-masing interval terbuka di $\mathbb{R}$, buktikan bahwa $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa $A \cap B = \varnothing$.

Klaim 1. $(A \cap B)' = \varnothing$.

Bukti. Andaikan tidak, misalkan $p \in (A \cap B)'$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $y \neq p$ sedemikian sehingga $y \in N_\varepsilon(x) \cap (A \cap B) \implies y \in A \cap B$, kontradiksi karena $A \cap B = \varnothing$. Terbukti $(A \cap B)' = \varnothing$.

Klaim 2. Setiap $x \in (0,1)$ merupakan titik limit A.

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Untuk $\varepsilon \leq \min\{x, 1-x\}$, ini berarti $\varepsilon \leq x$ dan $\varepsilon \leq 1 - x$ yang berarti $0 \leq x - \varepsilon < x + \varepsilon \leq 1$. Akan ditinjau untuk $x + \frac{\varepsilon}{2}$. Perhatikan bahwa

$$0 < x - \varepsilon < x < x + \frac{\varepsilon}{2} < x + \varepsilon < 1 \implies 0 < x + \frac{\varepsilon}{2} < 1, \quad x - \varepsilon < x + \frac{\varepsilon}{2} < x + \varepsilon, \quad x \neq x + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jadi, $x + \frac{\varepsilon}{2} \in A$ dan $x + \frac{\varepsilon}{2} \in N_\varepsilon(x)$, kemudian $x + \frac{\varepsilon}{2} \neq x$ sehingga diperoleh $x + \frac{\varepsilon}{2} \in [N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\}$. Jadi, $[N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\}$ tak kosong. Untuk $\varepsilon > \min\{x, 1-x\}$, maka $\varepsilon > x$ atau $\varepsilon > 1 - x$. Jika $\varepsilon > x$, maka $x - \varepsilon < 0$. Tinjau bahwa

$$x - \varepsilon < 0 < \frac{x}{2} < x < x + \varepsilon \implies x - \varepsilon < \frac{x}{2} < x + \varepsilon \implies \frac{x}{2} < N_\varepsilon(x).$$

Selain itu, $0 < \frac{x}{2} < x < 1 \implies 0 < \frac{x}{2} < 1$ sehingga $\frac{x}{2} \in A$ dan jelas $\frac{x}{2} \neq x$. Jadi, $\frac{x}{2} \in [N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\}$ yang berarti $[N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\}$ tak kosong. Jika $\varepsilon > 1 - x$ yang berarti $x + \varepsilon > 1$. Akan ditinjau $\frac{x+1}{2}$. Perhatikan bahwa $x < 1$ berlaku

$$x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2} < 0 \quad \text{dan} \quad 0 < \frac{x+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

sehingga diperoleh

$$x - \varepsilon < x < \frac{x+1}{2} < 1 < x + \varepsilon \implies x - \varepsilon < \frac{x+1}{2} < x + \varepsilon, \quad 0 < \frac{x+1}{2} < 1, \quad x \neq \frac{x+1}{2}.$$

Ini menunjukkan $\frac{x+1}{2} \in [N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\}$ yang berarti $[N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\}$ tak kosong.
Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $[N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\}$ tak kosong, maka $x \in A'$.

Klaim 3. $0 \in A'$.

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Jika $0 < \varepsilon \leq 1$, tinjau bahwa

$$-\varepsilon < 0 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \leq 1 \implies -\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad 0 < \frac{\varepsilon}{2} < 1, \quad \frac{\varepsilon}{2} \neq 0.$$

Jadi, $\frac{\varepsilon}{2} \in [N_\varepsilon(0) \cap A] \setminus \{0\}$ sehingga $[N_\varepsilon(0) \cap A]$ tak kosong. Jika $\varepsilon > 1$, tinjau $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{2} < 1 < \varepsilon$ yang berarti $-\varepsilon < \frac{1}{2} < \varepsilon$, $0 < \frac{1}{2} < 1$, dan jelas $0 \neq \frac{1}{2}$. Jadi, $\frac{1}{2} \in [N_\varepsilon(0) \cap A] \setminus \{0\}$ yang berarti $[N_\varepsilon(0) \cap] \setminus \{0\}$ tak kosong untuk setiap $\varepsilon > 0$. Terbukti $0 \in A'$.

Klaim 4. $1 \in A'$.

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Jika $0 < \varepsilon \le 1$, maka

$$0 \le 1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1 < 1 + \varepsilon \implies 1 - \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1 + \varepsilon, \quad 0 < 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1, \quad 1 \neq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ini berarti $1 - \frac{\varepsilon}{2} \in [N_\varepsilon(1) \cap A] \setminus \{1\}$. Jika $\varepsilon > 1$, tinjau

$$1 - \varepsilon < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 1 + \varepsilon \implies 1 - \varepsilon < \frac{1}{2} < 1 + \varepsilon, \quad 0 < \frac{1}{2} < 1.$$

Jadi, $\frac{1}{2} \in [N_\varepsilon(1) \cap A] \setminus \{1\}$. Ini membuktikan bahwa $[N_\varepsilon(1) \cap A] \setminus \{1\}$ tak kosong untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan terbukti $1 \in A'$.

Klaim 5. Untuk $x < 0$ atau $x > 1$, maka $x \notin A'$.

Bukti. Akan ditinjau saat $x < 0$, pilih $\varepsilon = -\frac{x}{2} > 0$. Perhatikan bahwa

$$x + \varepsilon = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} < 0 \implies x + \varepsilon < 0$$

yang berarti $N_\varepsilon(x)$ disjoin dengan A. Akibatnya, $N_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ yang berarti terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $[N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\} = \varnothing$. Jadi, $x \notin A'$.
Akan ditinjau saat $x > 1$. Pilih $\varepsilon = \frac{x-1}{2} > 0$, perhatikan bahwa

$$x - \varepsilon = x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1 \implies x - \varepsilon > 1$$

yang berarti $N_\varepsilon(x)$ disjoin dengan A. Jadi, terdapat $\varepsilon > 0$ yang memenuhi $[N_\varepsilon(x) \cap A] \setminus \{x\} = \varnothing$. Jadi, $x \in A'$.

Dari Klaim 2 hingga Klaim 5 membuktikan bahwa $A' = [0,1]$ dan secara analog diperoleh $B' = [1,2]$. Jadi,

$$\overline{A} = A \cup A' = [0,1], \quad \overline{B} = B \cup B' = [1,2] \implies \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$$

yang mana membuktikan bahwa $\overline{A \cap B} = \varnothing \subset \{1\} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$. ▼

Question 3

Misalkan himpunan A terbilang dan himpunan bagian sejati dari A. Buktikan bahwa himpunan B ekuivalen dengan himpunan A.

Penyelesaian.

Karena $B \subset A$ dan A terbilang, maka B terbilang. Maka terdapat fungsi korespondensi 1-1 f, g dengan $f : A \to \mathbb{N}$ dan $g : \mathbb{N} \to B$. Akibatnya, $g \circ f : A \to B$ juga korespondensi 1-1 dan terbukti $A \sim B$. ▼