Soal dan Solusi UTS Analisis Real 2023

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Misalkan himpunan A terbilang dan B himpunan bagian sejati tak berhingga dari A. Buktikan bahwa himpunan B ekuivalen dengan himpunan A.

Penyelesaian.

Karena B himpunan bagian sejati tak berhingga dari himpunan terbilang A, maka B juga terbilang. Akibatnya, ada fungsi bijektif $f : A \to \mathbb{N}$ dan $g : \mathbb{N} \to B$ dan diperoleh juga $g \circ f : A \to B$ merupakan fungsi bijektif. Jadi, B ekuivalen dengan himpunan A. ▼

Question 2

Jika E suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang tidak kosong dan terbatas ke bawah dan $-E = \{y \mid y = -x, x \in E\}$, buktikan bahwa $\inf E = -\sup(-E)$.

Penyelesaian.

Karena E terbatas, maka terdapat bilangan real positif M yang memenuhi $|x| \leq M$ untuk setiap $x \in E$. Tinjau bahwa untuk sebarang $y \in (-E)$ berlaku $-y \in E$ sehingga berakibat $|-y| \leq M$. Namun, ini berakibat $|y| \leq M$ untuk setiap $y \in (-E)$ yang menunjukkan $-E$ juga terbatas.

Karena E dan $(-E)$ terbatas, menurut aksioma kelengkapan berlaku $\inf E$ dan $\sup(-E)$ ada. Misalkan $\sup(-E) = a$. Ambil sebarang $p \in E$, maka $-p \in (-E)$ yang berarti $-p \leq a$ yang berakibat $p \geq -a$. Ini berarti $-a$ merupakan batas bawah untuk E yang berarti $\inf E \geq -a$. Perhatikan pula untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $q \in (-E)$ yang memenuhi $a - \varepsilon < q$. Dari sini diperoleh $-q - \varepsilon < -a$. Karena $-q \in E$, maka $-q \geq \inf(E)$ yang berakibat

$$-a > -q - \varepsilon \geq \inf(E) - \varepsilon \implies -a > \inf(E) - \varepsilon.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, dapat disimpulkan bahwa $-a \geq \inf(E)$. Mengingat juga harus berlaku $\inf E \geq -a$, dapat disimpulkan bahwa $\inf E = -a$. ▼

Question 3

Diketahui himpunan $E \subset \mathbb{R}^2$ dan $E = \{(x, y) \mid (x, y) = (2, 1) \vee x^2 + y^2 \leq 1\}$. Tentukan

(a) Himpunan semua titik limit E.

(b) Himpunan semua titik interior E.

(c) Apakah E tertutup? Apakah E terbuka?

Penyelesaian.

(b) Misalkan $(a, b) \in E$ dan $s = \sqrt{a^2 + b^2}$, yaitu menyatakan jarak titik $(0, 0)$ dengan (a, b). Definisikan pula $N_\varepsilon(a, b) = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < \varepsilon^2\}$ sebagai persekitaran dari (a, b) dan $\varepsilon > 0$.

Kasus 1. Jika $(a, b) \in E$ memenuhi $a^2 + b^2 < 1$.
Jika $(a, b) = (0, 0)$, perhatikan bahwa untuk $\varepsilon = \frac{1}{2}$, maka untuk setiap $(x, y) \in N_{\frac{1}{2}}(0, 0)$ berlaku

$$x^2 + y^2 < \frac{1}{4} < 1 \implies x^2 + y^2 < 1 \implies (x, y) \in E.$$

Jadi, $N_{\frac{1}{2}}(0, 0) \subseteq E$ yang berarti $(0, 0) \in int(E)$. Sekarang, akan ditinjau apabila $(a, b) \in E \setminus \{(0, 0)\}$ yang memenuhi $a^2 + b^2 < 1$, jelas bahwa $0 < s < 1$. Perhatikan bahwa untuk $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{s, 1 - s\}$, maka untuk setiap $(x, y) \in N_\varepsilon(E)$ berlaku

$$x^2 + y^2 < \varepsilon^2 = \left(\frac{\min\{s, 1 - s\}}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} < 1 \implies x^2 + y^2 < 1.$$

Jadi, $N_\varepsilon(a, b) \subseteq E$ yang menunjukkan $(a, b) \in int(E)$.

Kasus 2. Akan ditinjau untuk $(a, b) \in E$ yang memenuhi $a^2 + b^2 = 1$, akan dibuktikan bahwa yang demikian bukan titik interior. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

- Untuk $(a, b) = (0, 1)$, tinjau $\left(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \in N_\varepsilon(0, 1)$ namun $\left(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \notin E$ karena

$$0^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} > 1$$

  yang berarti $N_\varepsilon(0, 1) \not\subseteq E$. Secara analog, untuk $(a, b) = (0, -1)$ berlaku $N_\varepsilon(0, -1) \not\subseteq E$ karena $\left(0, -1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \in N_\varepsilon(0, -1)$ namun $\left(0, -1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \notin E$.

- Untuk $(a, b) \neq (0, \pm 1)$. Tinjau titik $\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right)$ dan $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b\right)$ masing-masing anggota $N_\varepsilon(a, b)$. Jika $a > 0$, maka

$$\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + b^2 = a^2 + a\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} + b^2 > a^2 + b^2 = 1 \implies \left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \notin E$$

  yang menunjukkan bahwa $N_\varepsilon(a, b) \not\subseteq E$. Jadi, (a, b) bukan titik interior.
  Jika $a < 0$, misalkan $a = -a'$ dengan $a' > 0$, maka

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + b^2 = \left(-a' - \frac{\varepsilon}{2}\right) + b^2 = \left(a' + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + b^2 > (a')^2 + b^2 = a^2 + b^2 = 1$$

  sehingga $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \notin E$ yang berakibat $N_\varepsilon(a, b) \not\subseteq E$.

Jadi, terbukti bahwa setiap titik yang memenuhi $a^2 + b^2 = 1$ bukan titik interior.

Kasus 3. Tinjau titik $(a, b) = (2, 1)$ dan akan dibuktikan juga bukan titik interior. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, jelas bahwa $\left(2 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \neq (2, 1)$ dan $\left(2 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \in N_\varepsilon(a, b)$. Kemudian,

$$\left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + 1^2 > 2^2 + 1^2 = 5 > 1 \implies \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \notin E$$

yang berarti $N_\varepsilon(a, b) \nsubseteq E$.

Dari semua kemungkinan, himpunan semua titik interior E adalah $int(E) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(a) **Kasus 1.** Perhatikan bahwa $(a, b) = (2, 1)$ bukan titik limit karena untuk $\varepsilon = 2$, titik $(3, 1) \in N_\varepsilon(2, 1)$ berlaku $(3, 1) \notin E$.

Kasus 2. Akan dibuktikan bahwa setiap titik (a, b) yang memenuhi $a^2 + b^2 = 1$ merupakan titik limit. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

- Untuk $(a, b) = (0, 1)$, perhatikan bahwa jika $\varepsilon < 1$, maka $(0, 1 - \varepsilon) \in N_\varepsilon(0, 1)$ berlaku $(0, 1 - \varepsilon) \in E$ karena

$$0^2 + (1 - \varepsilon)^2 < 0 + 1^2 = 1 \implies 0^2 + (1 - \varepsilon)^2 < 1.$$

  Jelas bahwa $(0, 1 - \varepsilon) \neq (0, 1)$, ini berarti $(0, 1 - \varepsilon) \in N_\varepsilon(0, 1) \cap E \setminus \{(0, 1)\}$ sehingga $N_\varepsilon(0, 1) \cap E \setminus \{(0, 1)\}$ tak kosong. Jika $\varepsilon \geq 1$, tinjau $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in N_\varepsilon(0, 1) \cap E \setminus \{(0, 1)\}$ sehingga $N_\varepsilon(0, 1) \cap E \setminus \{(0, 1)\}$ tak kosong. Jadi, $(0, 1)$ merupakan titik limit.

- Untuk $(a, b) = (0, -1)$ dapat dilakukan secara analog. Untuk $\varepsilon < 1$, maka $(0, -1 + \varepsilon) \in N_\varepsilon(0, -1) \setminus \{(0, -1)\}$ sehingga $N_\varepsilon(0, -1) \cap E \setminus \{(0, -1)\}$ tak kosong. Untuk $\varepsilon \geq 1$, tinjau $\left(0, -\frac{1}{2}\right) \in N_\varepsilon(0, -1) \cap E \setminus \{(0, -1)\}$ sehingga $N_\varepsilon(0, -1) \cap E \setminus \{(0, -1)\}$ tak kosong. Jadi, $(0, -1)$ merupakan titik limit.

- Untuk $(a, b) \neq (0, \pm 1)$. Akan ditinjau apabila $a > 0$. Untuk $\varepsilon < 2a$ tinjau $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in N_\varepsilon(a, b)$ berlaku

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + b^2 = a^2 - a\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} + b^2 = 1 + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{4} - a\right) < 1 + 2a\left(\frac{2a}{4} - a\right) = 1 - a^2 < 1$$

  yang menunjukkan $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in E$. Jelas bahwa $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \neq (a, b)$, maka $N_\varepsilon(a, b) \cap E \setminus \{(a, b)\}$ tak kosong. Apabila $\varepsilon \geq 2a$, perhatikan bahwa $(0, b) \in N_\varepsilon(a, b)$ karena memenuhi $(0 - a)^2 + (b - b)^2 = a^2 < 4a^2 < \varepsilon^2$ yang berakibat pula $N_\varepsilon(a, b) \cap E \setminus \{(a, b)\}$ tak kosong.. Ini menunjukkan (a, b) titik limit.

  Akan ditinjau apabila $a < 0$ yang dapat dilakukan secara analog. Misalkan $a = -a'$ di mana $a' > 0$. Untuk $\varepsilon < -2a = 2a'$ tinjau $\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in N_\varepsilon(a, b)$ berlaku

$$\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + b^2 = \left(-a' + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + b^2 = \left(a' - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + b^2 < 1$$

  sebagaimana subkasus sebelumnya, berakibat $N_\varepsilon(a, b) \cap E \setminus \{(a, b)\}$ tak kosong.. Jika $\varepsilon \geq -2a = 2a'$, tinjau $(0, b) \in N_\varepsilon(a, b)$ yang berakibat pula $N_\varepsilon(a, b) \cap E \setminus \{(a, b)\}$ tak kosong. Ini menunjukkan (a, b) titik limit.

Dari semua subkasus yang mungkin membuktikan bahwa (a, b) titik limit untuk setiap (a, b) yang memenuhi $a^2 + b^2 = 1$.

Kasus 3. Akan dibuktikan bahwa semua titik $(a, b) \in Int(E)$ titik limit. Perhatikan bahwa terdapat $\varepsilon > 0$ yang memenuhi $N_\varepsilon(a, b) \subseteq E$. Ambil sebarang $\varepsilon' > 0$. Jika $\varepsilon' > \varepsilon$, tinjau titik $\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \neq (a, b)$ yang mana $\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in N_\varepsilon(a, b) \implies \left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in E$. Karena

$$\left(a + \frac{\varepsilon}{2} - a\right)^2 + (b - b)^2 = \frac{\varepsilon^2}{4} < (\varepsilon')^2 \implies \left(a + \frac{\varepsilon}{2} - a\right)^2 + (b - b)^2 < (\varepsilon')^2$$

yang berarti $\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in N_{\varepsilon'}(a, b)$, ini menunjukkan bahwa

$$\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in N_{\varepsilon'}(a, b) \cap E \setminus \{(a, b)\} \implies N_{\varepsilon'}(a, b) \cap E \setminus \{(a, b)\} \text{ tak kosong.}$$

Jika $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Tinjau bahwa $\left(a + \frac{\varepsilon'}{2}, b\right) \in N_{\varepsilon'}(a, b)$ berlaku

$$\left(a + \frac{\varepsilon'}{2} - a\right)^2 + (b - b)^2 = \frac{(\varepsilon')^2}{4} < \varepsilon^2 < 1 \implies \left(a + \frac{\varepsilon'}{2} - a\right)^2 + (b - b)^2 < 1$$

yang berarti $\left(a + \frac{\varepsilon'}{2}, b\right) \in E$. Karena $\left(a + \frac{\varepsilon'}{2}, b\right) \neq (a, b)$, maka

$$\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in N_{\varepsilon'}(a, b) \cap E \setminus \{(a, b)\} \implies N_{\varepsilon'}(a, b) \cap E \setminus \{(a, b)\} \text{ tak kosong.}$$

Jadi, terbukti bahwa setiap titik (a, b) yang memenuhi $(a, b) \in Int(E)$ merupakan titik limit.

Kasus 4. Akan dibuktikan bahwa semua titik-titik di E^c bukan titik limit. Misalkan $(a, b) \in E^c$, maka $s = a^2 + b^2 > 1$ dan $(a, b) \neq (2, 1)$. Jelas bahwa $s - 1 = \sqrt{a^2 + b^2} - 1 > 0$, pilih

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \left\{ s - 1, \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 1)^2} \right\}.$$

Tinjau bahwa $(2, 1) \notin N_\varepsilon(a, b)$ karena jika $(2, 1) \in N_\varepsilon(a, b)$ berakibat

$$(2-a)^2 + (1-b)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 < \varepsilon^2 \leq \frac{(a - 2)^2 + (b - 1)^2}{4} \implies (a-2)^2 + (b-1)^2 \leq \frac{(a - 2)^2 + (b - 1)^2}{4}$$

yang mana suatu kontradiksi karena $(a - 2)^2 + (b - 1)^2 > 0$. Akan ditinjau untuk setiap (p, q) yang memenuhi $p^2 + q^2 \leq 1$. Dari Minkowksi Inequality berlaku

$$\begin{aligned}
\sqrt{(p - a)^2 + (q - b)^2} + \sqrt{p^2 + q^2} &= \sqrt{(a - p)^2 + (b - q)^2} + \sqrt{p^2 + q^2} \\
&\geq \sqrt{(a - p + p)^2 + (b - q + q)^2} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} = s \\
&> \frac{1}{2}(s - 1) \geq \frac{1}{2}\varepsilon
\end{aligned}$$

mengingat

$$s - \frac{1}{2}(s - 1) = \frac{2s - (s - 1)}{2} = \frac{s + 1}{2} > 0.$$

Ini menunjukkan

$$(p - q)^2 + (q - b)^2 > \frac{1}{4}\varepsilon^2 \implies (p, q) \notin N_\varepsilon(a, b).$$

Karena juga berlaku $(2, 1) \notin N_\varepsilon(a, b)$, ini menunjukkan bahwa

$$\{(p, q) \mid p^2 + q^2 \leq 1\} \cup \{(2, 1)\}$$

saling lepas dengan $N_\varepsilon(a,b)$. Ini menunjukkan bahwa

$$(N_\varepsilon(a,b) \cap E) \setminus \{(a,b)\} = \varnothing$$

yang berarti (a,b) bukan titik limit.
Jadi, himpunan semua titik limit E adalah $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) E tidak terbuka karena $(2,1) \notin int(E)$, kemudian E juga tidak tertutup karena $(2,1)$ bukan titik limit E.

▼

Question 4

Misalkan (X, d) ruang metrik dan A, B himpunan bagian dari X. Buktikan bahwa

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Penyelesaian.

Definisikan K' sebagai himpunan titik limit K di X. Akan dibuktikan bahwa $(A \cup B)' = A' \cup B'$. Ambil sebarang $x \in (A \cup B)'$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $p \in N_\varepsilon(x) \cap (A \cup B)$ dengan $p \neq x$. Tinjau bahwa

$$N_\varepsilon(x) \cap (A \cup B) = (N_\varepsilon(x) \cap A) \cup (N_\varepsilon(x) \cap B) \implies p \in N_\varepsilon(x) \cap A \vee p \in N_\varepsilon(x) \cap B.$$

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $p \in N_\varepsilon(x) \cap A$. Karena $p \neq x$ dan berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $x \in A'$. Ini berarti $x \in A' \cup B'$ yang membuktikan $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$. Ambil sebarang $y \in A' \cup B'$, maka $y \in A'$ atau $y \in B'$. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $y \in A'$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $q \in N_\varepsilon(y) \cap A'$ dengan $q \neq y$. Diperoleh

$$q \in (N_\varepsilon(y) \cap A) \cup (N_\varepsilon(y) \cap B) = N_\varepsilon(y) \cap (A \cup B) \implies q \in N_\varepsilon(y) \cap (A \cup B).$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan $q \neq y$, maka $q \in (A \cup B)'$ yang membuktikan $A' \cup B' \subseteq (A \cup B)'$. Terbukti.

Diperoleh

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= (A \cup B) \cup (A \cup B)' \\
&= (A \cup B) \cup (A' \cup B') \\
&= (A \cup A') \cup (B \cup B') \\
&= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. ▼