Soal dan Solusi UTS Analisis Real I 2022

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

(a). Jika E himpunan bagian dari $\mathbb{R}$, E tidak kosong, E terbatas ke atas dan terbatas ke bawah, maka $\inf E \leq \sup E$. Buktikan!

(b). Buktikan bahwa jika m bilangan bulat, maka pernyataan berikut benar. Jika m^2 kelipatan 3, maka m kelipatan 3.

Penyelesaian.

(a). Perhatikan bahwa jika $x \in E$, maka $\inf E \leq x \leq \sup E \implies \inf E \leq \sup E$, terbukti.

(b). Andaikan m bukan kelipatan 3, maka $m = 3n + 1$ atau $m = 3n + 2$ untuk suatu bilangan bulat n. Maka $m^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3\left(3n^2 + 2n\right) + 1$ atau $m^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3\left(3n^2 + 4n + 1\right) + 1$ yang mana masing-masing bukan kelipatan 3, kontradiksi. Jadi, haruslah $m = 3n$ yang berarti m kelipatan 3.

▼

Question 2

Dalam ruang metrik (X, d), buktikan

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Penyelesaian.

Hal ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa $-d(y, z) \leq d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z)$.

Akan dibuktikan bahwa $-d(y, z) \leq d(x, y) - d(x, z)$. Perhatikan bahwa berdasarkan definisi metrik berlaku $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ yang memberikan $-d(y, z) \leq d(x, y) - d(x, z)$ seperti yang ingin dibuktikan.

Akan dibuktikan bahwa $d(x, y)-d(x, z) \leq d(y, z)$. Dengan cara yang sama, $d(x, y) \leq d(x, z)+d(z, y) = d(x, z)+d(y, z) \implies d(x, y) \leq d(x, z)+d(y, z)$ sehingga diperoleh $d(x, y)-d(x, z) \leq d(y, z)$. Diperoleh seperti yang ingin dibuktikan pada soal. ▼

Question 3

(a). Buatlah suatu fungsi korespondensi 1-1 dari selang terbuka $(-1,1)$ ke $\mathbb{R}$.

(b). Diberikan himpunan $E=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$. Tentukan himpunan semua titik limit E dan himpunan semua titik interior E.

Penyelesaian.

(a). Pandang fungsi $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ dengan $f(x)=\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Akan dibuktikan f bijektif. Pertama, akan dibuktikan f fungsi 1-1. Misalkan $x,y\in(-1,1)$ yang memenuhi $f(x)=f(y)$, yaitu $\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi y}{2}\right)$. Diperoleh $\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi y}{2}+\pi k$ di mana k bilangan bulat, yang berarti $x=y+2k\iff x-y=2k$. Karena $(x-y)\in(-2,2)\implies k\in(-1,1)$, maka haruslah $k=0$. Ini memberikan $x=y$, terbukti f fungsi 1-1. Akan dibuktikan f surjektif. Ambil sebarang $a\in\mathbb{R}$ dan tinjau $t=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(a)$ yang mana $\tan^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ well-defined. Akibatnya, $t=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(a)\in(-1,1)$ yang mana $f(t)=\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)=\tan\left(\tan^{-1}a\right)=a$. Jadi, terdapat $t\in(-1,1)$ yang memenuhi $f(t)=a$ sehingga f surjektif. Jadi, f bijektif seperti yang ingin dibuktikan.

(b). Pandang

$$E=\left\{1+\frac{1}{2n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{-1+\frac{1}{2n-1}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Akan dibuktikan bahwa $E'=\{-1,1\}$. Akan dibuktikan $1\in E'$, ambil sebarang $\varepsilon>0$. Jika $\varepsilon=1$, tinjau $\frac{3}{2}\in N_\varepsilon(1)$ yang mana juga $\frac{3}{2}\in[N_\varepsilon(1)\cap E]\setminus\{1\}$. Jadi, $[N_\varepsilon(1)\cap E]\setminus\{1\}\neq\varnothing$. Untuk $\varepsilon\neq1$, tinjau $\frac{1}{\varepsilon-1}\in\mathbb{R}$ sehingga menurut Archimedes terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{1}{\varepsilon-1}<N<2N\implies\frac{1}{\varepsilon-1}<2N$ sehingga $1+\frac{1}{2N}<\varepsilon$. Ini berarti $1+\frac{1}{2N}\in[N_\varepsilon(1)\cap E]\setminus\{1\}$. Ini berarti untuk setiap $\varepsilon>0$ berakibat $[N_\varepsilon(1)\cap E]\setminus\{1\}$ tak kosong. Jadi, $1\in E'$.
Akan dibuktikan $-1\in E'$. Ambil sebarang $\varepsilon>0$. Tinjau $\frac{1}{\varepsilon+1}\in\mathbb{R}$ sehingga menurut Archimedes terdapat bilangan asli M yang memenuhi $\frac{1}{\varepsilon+1}<M\leq 2M-1\implies\frac{1}{\varepsilon+1}<2M-1$. Diperoleh $-1+\frac{1}{2M-1}<\varepsilon$ yang berarti $-1+\frac{1}{2M-1}\in[N_\varepsilon(-1)\cap E]\setminus\{-1\}$ sehingga $[N_\varepsilon(-1)\cap E]\setminus\{E\}$ tak kosong untuk setiap $\varepsilon>0$. Jadi, $-1\in E'$.
Akan dibuktikan apabila $c\notin\{-1,1\}$, maka $c\notin E'$.

- Jika $0<c<1$, pilih $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{c,1-c\}$. Misalkan $x\in\mathbb{R}$ dengan $x\in N_\varepsilon(c)$. Maka

  $$|x-c|<\varepsilon\iff c-\varepsilon<x<c+\varepsilon$$

  yang mana

  $$c+\varepsilon\leq c+\frac{1-c}{2}=\frac{1+c}{2}<1,\quad c-\varepsilon\geq c-\frac{c}{2}=\frac{c}{2}>0.$$

  Diperoleh $0<c-\varepsilon<x<c+\varepsilon<1$ sehingga $0<x<1$. Akibatnya, $x\notin E$ sehingga $[N_\varepsilon(c)\cap E]\setminus\{c\}=\varnothing$. Jadi, $c\notin E'$.

- Jika $c\in E$ dengan $c>0$, maka $c=1+\frac{1}{2K}$ untuk suatu bilangan asli K. Pilih $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2K}-\frac{1}{2K+2}\right)=\frac{1}{4K(K+1)}$. Maka

  $$c+\varepsilon<1+\frac{1}{2K}+\frac{1}{4K(K+1)}=1+\frac{2(K+1)+1}{4K(K+1)}=1+\frac{2K+3}{4K(K+1)}.$$

Akan dibuktikan $\frac{2K+3}{4K(K+1)} < \frac{1}{2K-1}$. Hal ini ekuivalen dengan membuktikan

$$(2K+3)(2K-1) < 4K(K+1) \iff 4K^2+4K-3 < 4K^2+4K$$

dan diperoleh seperti yang diinginkan. Maka jika $x < c+\varepsilon$ berlaku

$$x < c+\varepsilon < 1+\frac{2K+3}{4K(K+1)} < 1+\frac{1}{2K-1} \implies x < 1+\frac{1}{2K-1}.$$

Tinjau

$$c-\varepsilon > 1+\frac{1}{2K}-\frac{1}{4K(K+1)} = 1+\frac{2(K+1)-1}{4K(K+1)} = 1+\frac{2K+1}{4K(K+1)}.$$

Akan dibuktikan $\frac{2K+1}{4K(K+1)} > \frac{1}{2K+2}$. Hal ini ekuivalen dengan membuktikan

$$(2K+1)(2K+2) > 4K(K+1) \iff 4K^2+6K+2 > 4K^2+4K$$

seperti yang ingin dibuktikan. Maka jika $x > c-\varepsilon$ berlaku

$$x > c-\varepsilon > 1+\frac{1}{2K+2} \implies x > 1+\frac{1}{2K+2}.$$

Jadi, $1+\frac{1}{2K+2} < x < 1+\frac{1}{2K-2}$ sehingga $[N_\varepsilon(c)\cap E]\setminus\{c\} = \varnothing$. Akibatnya, $c \notin E'$.

- Jika $1 < c \le \frac{3}{2}$ dengan $c \notin E$. Akan dibuktikan bahwa terdapat bilangan asli T yang memenuhi $1+\frac{1}{2T+2} < c < 1+\frac{1}{2T}$. Perhatikan bahwa $\frac{1}{c-1} \ge 2$. Berdasarkan akibat Archimedes, terdapat bilangan bulat asli $L \ge 2$ yang memenuhi $L \le \frac{1}{c-1} < L+1$. Jika L ganjil, misalkan $L = 2T+1$ di mana T bilangan bilangan bulat asli, maka $2T+1 \le \frac{1}{c-1} < 2T+2$ dan tulis $2T < 2T+1 \le \frac{1}{c-1} < 2T+2 \implies 2T < \frac{1}{c-1} < 2T+2$. Jika L genap, misalkan $L = 2T'$ untuk suatu bilangan asli T', tulis $2T' \le \frac{1}{c-1} < 2T'+1 < 2T'+2 \implies 2T' \le \frac{1}{c-1} < 2T'+2$. Jadi, telah dibuktikan bahwa terdapat bilangan asli T yang memenuhi $2T \le \frac{1}{c-1} < 2T+2$. Diperoleh $\frac{1}{2T+2} < c-1 \le \frac{1}{2T} \implies 1+\frac{1}{2T+2} < c \le 1+\frac{1}{2T}$. Sekarang, pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{1+\frac{1}{2T}-c, c-1-\frac{1}{2T+2}\right\}$. Jika $x < c+\varepsilon$ berlaku

$$x < c+\varepsilon \le c+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2T}-c\right) = \frac{c}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4T} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{4T}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4T} = 1+\frac{1}{2T}$$

sehingga $x < 1+\frac{1}{2T}$. Jika $c-\varepsilon < x$ berlaku

$$x > c-\varepsilon \ge c-\frac{1}{2}\left(c-1-\frac{1}{2T+2}\right) = \frac{c}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4T+2} \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4T+2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4T+2} = 1+\frac{1}{2T+1}$$

sehingga $x > 1+\frac{1}{2T+2}$. Karena $1+\frac{1}{2T+2} < x < 1+\frac{1}{2T}$, akibatnya $[N_\varepsilon(c)\cap E]\setminus\{c\} = \varnothing$ sehingga $c \notin E'$.

- Jika $c > \frac{3}{2}$. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(c-\frac{3}{2}\right)$, maka $x > c-\varepsilon$ berakibat

$$x > c-\varepsilon = c-\frac{1}{2}\left(c-\frac{3}{2}\right) = \frac{c}{2}+\frac{3}{4} > \frac{3}{4} > \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \implies x > \frac{3}{2}.$$

Dari sini berakibat $[N_\varepsilon(c)\cap E]\setminus\{c\} = \varnothing$ sehingga $c \notin E'$.

- Jika $c < -1$, pilih $\varepsilon = \frac{-1-c}{2}$. Maka $x < c+\varepsilon$ berakibat

$$x < c+\varepsilon = c+\frac{-1-c}{2} = \frac{c-1}{2} < -1 \implies x < -1.$$

Dari sini berakibat $[N_\varepsilon(c)\cap E]\setminus\{c\} = \varnothing$ sehingga $c \notin E'$.

- Jika $c \leq 0$ dan $c \in E$, maka $c = -1 + \frac{1}{2K-1}$ untuk suatu bilangan asli K. Apabila $K = 1$, maka $c = 0$. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}$, maka $x > c - \varepsilon = -\frac{1}{2} > -1 + \frac{1}{2(2)-1}$ dan $x < c + \varepsilon = \frac{1}{2} < 1$. Ini berarti $[N_\varepsilon(c) \cap E] \setminus \{c\} = \varnothing$ sehingga $c = 0 \notin E'$.
  Jika $K \geq 2$. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2K-1} - \frac{1}{2K+1}\right) = \frac{1}{(2K-1)(2K+1)}$. Jika $x < c + \varepsilon$ berlaku

  $$x < c+\varepsilon = -1+\frac{1}{2K-1}+\frac{1}{(2K-1)(2K+1)} = -1+\frac{(2K+1)+1}{(2K-1)(2K+1)} = -1+\frac{2K+2}{(2K-1)(2K+1)}.$$

  Akan dibuktikan $\frac{2K+2}{(2K-1)(2K+1)} < \frac{1}{2K-3}$ yang ekuivalen dengan

  $$(2K-3)(2K+2) < (2K-1)(2K+1) \iff 4K^2 - 2K - 6 < 4K^2 - 1$$

  seperti yang ingin dibuktikan. Diperoleh

  $$x < c + \varepsilon = -1 + \frac{2K+2}{(2K-1)(2K+1)} < -1 + \frac{1}{2K-3} \implies x < -1 + \frac{1}{2K-3}.$$

  Jika $x > c - \varepsilon$ berlaku

  $$\begin{aligned} x > c - \varepsilon &= -1 + \frac{1}{2K-1} - \frac{1}{(2K-1)(2K+1)} = -1 + \frac{(2K+1)-1}{(2K-1)(2K+1)} \\ &= -1 + \frac{2K}{(2K-1)(2K+1)} > -1 + \frac{1}{2K-1} \end{aligned}$$

  karena $\frac{2K}{2K+1} < 1$. Jadi, $x > -1 + \frac{1}{2K-1}$ sehingga $-1 + \frac{1}{2K-1} < x < -1 + \frac{1}{2K-3}$. Akibatnya, $[N_\varepsilon(c) \cap E] \setminus \{c\} = \varnothing$ sehingga $c \notin E'$.

- Jika $-1 < c < 0$ dan $c \notin E'$ sehingga diperoleh $0 < c+1 < 1$. Karena $\frac{1}{c+1} > 1$, berdasarkan akibat Archimedes berlaku terdapat bilangan asli U yang memenuhi $U \leq \frac{1}{c+1} < U+1$. Jika U bilangan genap, misalkan $U = 2X$ di mana X bilangan asli. Maka $2X \leq \frac{1}{c+1} < 2X+1$ yang berarti $2X - 1 < 2X \leq \frac{1}{c+1} < 2X+1 \implies 2X-1 < \frac{1}{c+1} < 2X+1$. Jika U bilangan ganjil, misalkan $U = 2X' - 1$ di mana X' bilangan asli. Maka $2X' - 1 \leq \frac{1}{c+1} < 2X < 2X+1 \implies 2X' - 1 \leq \frac{1}{c+1} < 2X+1$. Jadi, terdapat bilangan asli X yang memenuhi $2X - 1 \leq \frac{1}{c+1} < 2X+1$. Diperoleh $\frac{1}{2X+1} < c+1 \leq \frac{1}{2X-1} \iff -1+\frac{1}{2X+1} < c \leq -1+\frac{1}{2X-1}$. Sekarang, pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{c+1-\frac{1}{2X+1}, -1+\frac{1}{2X-1}-c\right\}$. Jika $x < c+\varepsilon$ berakibat

  $$x < c + \varepsilon \leq c + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2X-1} - c\right) = \frac{c}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4X-2} < -\frac{1}{2} + \frac{1}{4X-2} < -1\frac{1}{2X-1}$$

  sehingga $x < c + \varepsilon < -1 + \frac{1}{2X-1}$. Lalu, jika $c - \varepsilon < x$ berakibat

  $$x > c - \varepsilon = c - \frac{1}{2}\left(c + 1 - \frac{1}{2X+1}\right) = \frac{c}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4X+2} > -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2X+1} = -1 + \frac{1}{2X+1}.$$

  sehingga $x > c - \varepsilon > -1 + \frac{1}{2X+1}$. Jadi, $-1 + \frac{1}{2X+1} < c - \varepsilon < x < c + \varepsilon < -1 + \frac{1}{2X-1}$ yang berarti $[N_\varepsilon(c) \cap E] \setminus \{c\} = \varnothing$. Diperoleh $c \notin E'$.

Terbukti bahwa $E' = \{-1, 1\}$.

Akan dibuktikan $int(E) = \varnothing$. Misalkan $x \in E$ dan ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Tinjau bahwa $N_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ dan di selang tersebut selalu mengandung suatu bilangan irasional, yang jelas bukan anggota E. Akibatnya, $N_\varepsilon(x) \not\subseteq E$.

▼

Question 4

Yang manakah di antara himpunan-himpunan di dalam $\mathbb{R}$ yang tidak terbuka sekaligus tidak tertutup dan berikan alasannya.

(a). $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(b). $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(c). $\{x : 2 < x \leq 4\}$.

Penyelesaian.

(a). Tidak terbuka maupun tidak tertutup.

Akan dibuktikan tidak tertutup. Klaim bahwa 0 titik limit dari $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dari Archimedes terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{1}{\varepsilon} < N \iff \frac{1}{N} < \varepsilon$. Ini berarti $\frac{1}{N} \in N_\varepsilon(0) \implies [N_\varepsilon(0) \cap A] \setminus \{0\}$ sehingga $[N_\varepsilon(0) \cap A] \setminus \{0\}$ tak kosong. Jadi, $0 \in A'$ namun $0 \notin A$ sehingga A tidak tertutup.

Akan dibuktikan A tidak terbuka. Misalkan $\frac{1}{n} \in A$ di mana $n \in \mathbb{N}$ dan ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa $N_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right)$. Sebagaimana sebelumnya, diantara $\left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right)$ terdapat bilangan irasional sehingga $N_\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \not\subseteq A$. Jadi, A tidak terbuka.

(b). Tidak terbuka dan tertutup.

Akan dibuktikan $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tidak terbuka. Misalkan $x \in B$ dan sebarang $\varepsilon > 0$. Tinjau pada selang $N_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ mengandung bilangan real yang tak bulat, maka $N_\varepsilon(x) \not\subseteq B$. Jadi, B tidak terbuka.

Akan dibuktikan B tertutup. Klaim bahwa B tidak memiliki titik limit. Akan dibuktikan $x \in B$ bukan titik limit. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}$, maka $N_\varepsilon(x) \cap B = \{x\} \implies [N_\varepsilon(x) \cap B] \setminus \{x\} = \varnothing$ yang berarti terbukti. Akan dibuktikan $x \in \mathbb{R}$ dengan $x \notin B$ juga bukan titik limit. Dari akibat Archimedes, terdapat bilangan bulat k yang memenuhi $k \leq x < k+1$. Dengan memilih $\varepsilon = \frac{1}{2}$ akan diperoleh $[N_\varepsilon(x) \cap B] \setminus \{x\} = \varnothing$ karena setiap anggota di $N_\varepsilon(x)$ bukan bilangan bulat.

(c). Tidak tertutup dan tidak terbuka.

Akan dibuktikan $C := \{x : 2 < x \leq 4\}$ tidak terbuka. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan tinjau $N_\varepsilon(x) = (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$. Tinjau bahwa $4 + \frac{\varepsilon}{2} \in N_\varepsilon(4)$ namun $4 + \frac{\varepsilon}{2} \notin C$. Ini artinya, $N_\varepsilon(4) \not\subseteq C$. Terbukti C tidak terbuka.

Akan dibuktikan C tidak tertutup dengan membuktikan $2 \in C'$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, tinjau bahwa $\min\left\{2 + \frac{\varepsilon}{2}, 3\right\} \in C$ dan $\min\left\{2 + \frac{\varepsilon}{2}, 3\right\} \in N_\varepsilon(2)$. Jadi, $\min\left\{2 + \frac{\varepsilon}{2}, 3\right\} \in [N_\varepsilon(2) \cap C] \setminus \{2\}$ sehingga $[N_\varepsilon(2) \cap C] \setminus \{2\}$ tak kosong. Jadi, $2 \in C'$ namun $2 \notin C$ sehingga C tidak tertutup.

▼