Soal dan Solusi UTS Analisis Real I 2017

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Buktikan $\mathbb{Z}$ terbilang dengan mengkonstruksi terlebih dahulu fungsi bijektif dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{N}$.

Penyelesaian.

Pandang $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dengan $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$ untuk setiap bilangan bulat x. Tinjau bahwa jika $x = y$, maka akan berakibat $x, y \geq 0$ atau $x, y < 0$ secara simultan. Ini berarti $f(x) = f(y)$ yang membuktikan f well-defined.

Akan dibuktikan f 1-1. Misalkan x dan y bilangan bulat yang memenuhi $f(x) = f(y)$. Andaikan $x \geq 0$ dan $y < 0$, maka $2x + 1 = -2y \iff 2(x+y) = 1$ yang mana tidak mungkin karena ruas kiri bernilai genap dan ruas kanan bernilai ganjil. Secara analog apabila $x < 0$ dan $y \geq 0$. Ini berarti haruslah $x, y \geq 0$ atau $x, y < 0$. Jika $x, y \geq 0$, maka $2x + 1 = 2y + 1 \iff x = y$. Jika $x, y < 0$, maka $-2x = -2y \iff x = y$. Jadi, $f(x) = f(y)$ selalu berakibat $x = y$ sehingga f 1-1.

Akan dibuktikan f surjektif. Ambil sebarang $a \in \mathbb{N}$. Jika a genap, misalkan $a = 2n$ untuk suatu bilangan asli n. Tinjau bahwa $-n < 0$ memenuhi $f(-n) = -2(-n) = 2n = a \implies f\left(-\frac{a}{2}\right) = a$. Jika a ganjil, misalkan $a = 2m-1$ untuk suatu bilangan asli m. Maka $f(m) = 2m+1 = a \implies f\left(\frac{a+1}{2}\right) = a$. Ini berarti untuk setiap $a \in \mathbb{N}$, terdapat $b \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(b) = a$. Jadi, f surjektif.

Karena $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ merupakan pemetaan bijektif (1-1 dan surjektif), maka $\mathbb{Z}$ terbilang. ▼

Question 2

Buktikan sifat Archimedes untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x < n$.

Komentar. Pernyataan soal asli: buktikan sifat Archimedes untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$, sehingga $x < n$. Pernyataan soal ini tidak bersesuaian dengan sifat Archimedes.

Penyelesaian.

Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Andaikan tidak terdapat bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $x < n$. Ini berarti untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $x \geq n$. Jadi, $\sup(\mathbb{N}) = x$. Ini menunjukkan bahwa $x - 1$ bukan batas atas untuk $\mathbb{N}$, maka terdapat bilangan asli k sedemikian sehingga $x - 1 < k$ yang berarti $x < k + 1$. Namun, $k + 1 \in \mathbb{N}$ yang mana ini bertentangan dengan $\sup(\mathbb{N}) = x$. Kontradiksi.

Jadi, terdapat bilangan asli n yang memenuhi $x < n$. ▼

Question 3

Misalkan S medan terurut yang mempunyai sifat batas atas terkecil. Jika $A, B \subseteq S$:

(a). Tuliskan definisi $\sup(A)$.

(b). Buktikan bahwa $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Penyelesaian.

(a). Karena $A \subseteq S$ dan S memiliki sifat batas atas terkecil, maka A memiliki batas atas terkecil di S. Didefinisikan $\sup(A) \in S$ dengan $\sup(A)$ merupakan batas untuk sebarang batas atas lain $x \in S$ dari A berlaku $\sup(A) \leq x$.

(b). Karena S medan terurut dengan sifat batas atas terkecil, maka $\sup(A)$ dan $\sup(B)$ ada di S. Misalkan $\sup(A) = a$ dan $\sup(B) = b$. Akan dibuktikan $\sup(A+B) = a+b$.
Ambil sebarang $(x+y) \in (A+B)$ di mana $x \in A$ dan $y \in B$. Karena $x \leq a$ dan $y \leq b$, maka $x+y \leq a+b$ sehingga $a+b$ merupakan batas atas dari $A+B$. Ini menunjukkan $\sup(A+B) \leq a+b$.
Untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a - \frac{\varepsilon}{2}$ dan $b - \frac{\varepsilon}{2}$ berturut-turut bukan batas atas untuk A dan B. Maka terdapat $x' \in A, y' \in B$ yang memenuhi $a - \frac{\varepsilon}{2} < x'$ dan $b - \frac{\varepsilon}{2} < y'$. Jumlahkan keduanya, maka $a + b - \varepsilon < x' + y'$. Karena $x' + y' \in (A+B)$, maka $x' + y' \leq \sup(A+B)$. Diperoleh $a + b - \varepsilon < x' + y' \leq \sup(A+B) \implies a + b - \varepsilon < \sup(A+B)$. Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $a + b \leq \sup(A+B)$.
Kondisi $\sup(A+B) \leq a+b$ dan $a+b \leq \sup(A+B)$ memberikan $\sup(A+B) = a+b$ seperti yang ingin dibuktikan.

▼

Question 4

Jika X himpunan tak berhingga anggota dan $d(x, y) = 1$ untuk $x \neq y$, $d(x, x) = 0$, dan K subset himpunan tak hingga dari X.

(a). Apakah K himpunan kompak?

(b). Jika $E \subset X$, apakah ciri himpunan E agar E kompak? Selidiki/periksa apakah K terbuka/terutup atau tidak keduanya.

Komentar. Soal asli terfoto dengan tidak jelas, sebagian kata hanya dari asumsi saya saja.

Penyelesaian.

(a). Klaim K tidak kompak. Andaikan K kompak, maka K tertutup. Ini artinya setiap $x \in K$ merupakan titik limit bagi K. Namun, dengan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tinjau $[N_\varepsilon(x) \cap K] \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \varnothing$ yang mana kontradiksi bahwa x titik limit bagi K. Jadi, K tidak kompak.

(b). Berdasarkan (a), telah dibuktikan bahwa E tak berhingga anggota berakibat E tidak kompak. Sedangkan, jika E berhingga pasti kompak. Jadi, ciri himpunan E agar E kompak adalah harus berhingga.
Telah dibuktikan K tidak tertutup pada bagian (a). Klaim bahwa K himpunan terbuka. Ambil sebarang $x \in K$. Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}$, maka $N_\varepsilon(x) = \{x\} \subseteq K$. Ini membuktikan bahwa K terbuka.

▼