Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Analisis Real I

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2025

Soal

$\boxed{\textbf{1}}$ Himpunan manakah yang termasuk himpunan kompak? Berikan alasannya.

(a) $[0,1] \cup [5,6] \subseteq \mathbb{R}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

$\boxed{\textbf{2}}$ Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah dua barisan real sedemikian sehingga

- $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,
- (x_n) monoton naik,
- (y_n) monoton turun.

Buktikan bahwa (x_n) dan (y_n) konvergen dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$\boxed{\textbf{3}}$ Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu seragam. Buktikan bahwa jika (x_n) barisan Cauchy di I, maka barisan $(f(x_n))$ adalah barisan Cauchy.

$\boxed{\textbf{4}}$ Diberikan fungsi real

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tidak ada untuk setiap $a \in \mathbb{R}$.

SOAL NOMOR

1

Himpunan manakah yang termasuk himpunan kompak? Berikan alasannya.

(a) $[0,1] \cup [5,6] \subseteq \mathbb{R}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Solusi:

Perhatikan bahwa $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompak jika dan hanya jika X tertutup dan terbatas.

(a) Di sini $A := [0,1] \cup [5,6]$ terbatas. Karena $[0,1], [5,6]$ tertutup, maka $[0,1] \cup [5,6]$ tertutup. Jadi, A kompak.

(b) Himpunan tersebut tidak kompak karena tidak terbatas.

Soal Nomor 2

Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah dua barisan real sedemikian sehingga

- $x_n \leq y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,
- (x_n) monoton naik,
- (y_n) monoton turun.

Buktikan bahwa (x_n) dan (y_n) konvergen dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Solusi:

Tinjau untuk setiap bilangan asli n berlaku $x_1 \leq x_n \leq y_n \leq y_1$ sehingga $x_1 \leq y_n$ dan $x_n \leq y_1$. Ini berarti (x_n) dan (y_n) berturut-turut terbatas ke atas dan ke bawah. Karena (x_n) monoton naik dan (y_n) monoton turun, maka $(x_n), (y_n)$ konvergen. Karena $x_n \leq y_n$ untuk setiap bilangan asli n, maka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Soal Nomor

3

Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ kontinu seragam. Buktikan bahwa jika (x_n) barisan Cauchy di I, maka barisan $(f(x_n))$ adalah barisan Cauchy.

Solusi:

Karena f kontinu seragam, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in I$ yang $|x - y| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Misalkan (x_n) barisan Cauchy, untuk setiap $\varepsilon := \delta > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $|x_n - x_m| < \delta$ untuk setiap $n, m \geq N$. Ini berarti untk setiap $n, m \geq N$ memenuhi $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ seperti yang ingin dibuktian.

Soal Nomor

4

Diberikan fungsi real

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada untuk setiap $a \in \mathbb{R}$.

Solusi:

Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Karena $\mathbb{Q}$ dense, terdapat barisan bilangan rasional (x_n) yang konvergen ke a. Ini berarti $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$. Karena $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense, terdapat barisan bilangan irasional (y_n) yang konvergen ke a. Ini berarti $\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$. Karena limit dari barisan $(f(x_n))$ dan $(f(y_n))$ berbeda, maka $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada.