Soal dan Solusi UAS Analisis Real I 2024

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

(a). Jika $s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, apakah barisan dengan suku-suku $t_n = \sqrt{n}s_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ konvergen?

(b). Buktikan bahwa barisan bilangan real (x_n) dengan $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ adalah barisan Cauchy sehingga (x_n) divergen.

Penyelesaian.

(a). Kita klaim (t_n) konvergen ke $\frac{1}{2}$. Perhatikan bahwa

$$s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \implies t_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Dari Archimedes, terdapat bilangan asli N yang memenuhi $N > \frac{1}{\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{1}{N}$. Maka untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$\begin{aligned}\left|t_n - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{n} - \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^2} \\ &< 1 \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Terbukti. Jadi, barisan (t_n) konvergen.

(b). Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Misalkan N sebarang bilangan asli. Untuk $n \geq N$ di mana n bilangan asli berlaku

$$|x_{2n} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Jadi, (x_n) bukan barisan Cauchy.

▼

Question 2

Jika fungsi f dan g kontinu seragam pada ruang metrik (X,d) ke dalam $\mathbb{R}$, maka fungsi $f = g+h$ kontinu seragam pada X. Buktikan dan perlihatkan dengan contoh bahwa konklusi tiadk benar untuk $f = gh$.

Penyelesaian.

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan pilih $g(x) = h(x) = x \implies f(x) = x^2$. Akan dibuktikan f tidak kontinu seragam pada $\mathbb{R}$. Pilih $\varepsilon = 1$ dan ambil sebarang $\delta > 0$. Pilih $x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ dan $y = \frac{1}{\delta}$ yang mana memenuhi $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, maka

$$\left|x^2 - y^2\right| = \left|\frac{\delta^2}{4} + 1\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geq 1 = \varepsilon.$$

Terbukti f tidak kontinu seragam. ▼

Question 3

(a). Buktikan bahwa jika fungsi f didefinisikan untuk $x \geq 0$ oleh $f(x) = \sqrt{x}$, maka f kontinu di setiap titik domainnya.

(b). Didefinisikan fungsi f pada selang terbuka $(-3, -1)$ oleh

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{untuk } -3 < x < -1 \\ -x-1, & \text{untuk } -1 \leq x < 0 \\ x+1, & \text{untuk } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Tentukan di mana f kontinu dan di mana f diskontinu.

Penyelesaian.

(a). Akan dibuktikan f kontinu di $x = 0$ dari arah kanan. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Untuk setiap x yang memenuhi $x < \delta = \varepsilon^2$, maka

$$|f(x) - f(0)| = \sqrt{x} < \varepsilon,$$

terbukti.

Akan dibuktikan f kontinu di $x = c$ di mana $c > 0$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\left\{1, \varepsilon\left(\sqrt{c} + \sqrt{c+1}\right)\right\}$. Untuk setiap x dengan $|x - c| < \delta \leq 1$, maka $1 > |x - c| = |c - x| \geq c - x \implies x > c + 1$. Maka

$$|f(x) - f(c)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \frac{|x-c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} < \frac{\varepsilon\left(\sqrt{c} + \sqrt{c+1}\right)}{\sqrt{c+1} + \sqrt{c}} = \varepsilon.$$

(b). Misalkan $c \in (-3, -1)$. Akan dibuktikan f kontinu di $x = c$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\{|c - 3|, |-1-c|, \frac{\varepsilon}{2}\} = \min\left\{3 - c, -c - 1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Perhatikan bahwa

$$-(3 - c) \leq -\delta < x - c < \delta \leq -c - 1 \implies -9 < 2c - 3 < x < -1 \implies -3 < x < -1.$$

Jadi, untuk setiap x dengan $|x - c| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(c)| = |x + 1 - (c + 1)| = |x - c| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

terbukti.

Misalkan $c \in (-1, 0)$, akan dibuktikan f kontinu di $x = c$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\left\{\frac{c+1}{3}, -c, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Perhatikan bahwa

$$-\frac{c+1}{3} \leq -\delta < x - c < \delta \leq -c \implies -1 < \frac{2c-1}{3} < x < 0 \implies -1 < x < 0.$$

Jadi, untuk setiap x dengan $|x - c| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(c)| = |-x - 1 - (-c - 1)| = |c - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

terbukti.

Misalkan $c \in (0, 1)$, akan dibuktikan f kontinu di $x = c$, akan dibuktikan f kontinu di $x = c$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\left\{\frac{c}{3}, 1 - c, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Perhatikan bahwa

$$-\frac{c}{3} \leq -\delta < x - c < \delta \leq 1 - c \implies 0 < \frac{2c}{3} < x < 1 \implies 0 < x < 1.$$

Jadi, untuk setiap x dengan $|x-c|<\delta$ berlaku

$$|f(x)-f(c)| = |x+1-(c+1)| = |x-c| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

terbukti.

Akan dibuktikan f kontinu di $x=-1$. Ambil sebarang $\varepsilon>0$ dan pilih $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Tinjau $|x+1|<\delta\leq\frac{1}{2} \implies |x+1|<\frac{1}{2}$ memberikan $-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$. Apabila $-\frac{3}{2}<x<-1$, maka

$$|f(x)-f(-1)| = |x+1-0| = |x+1| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Apabila $-1\leq x<-\frac{1}{2}$, maka

$$|f(x)-f(-1)| = |-x-1-0| = |-x-1| = |x+1| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Terbukti f kontinu di $x=-1$.

Akan dibuktikan f diskontinu di $x=0$. Pilih $\varepsilon=1$. Ambil sebarang $\delta>0$. Jika $\delta\leq 2$, pilih $x=-\frac{\delta}{2}$ yang mana memenuhi $|x|<\delta$. Tinjau bahwa $-1\leq x=-\frac{\delta}{2}<0$, maka

$$|f(x)-f(0)| = |-x-1-1| = |-x-2| = \left|\frac{\delta}{2}-2\right| = 2-\frac{\delta}{2} \geq 2-1 = 1 = \varepsilon.$$

Jika $\delta\geq 2$, pilih $x=-\frac{1}{2}$ yang mana memenuhi $|x|<\delta$, maka

$$|f(x)-f(0)| = \left|-\frac{1}{2}-1\right| = \frac{3}{2} > \varepsilon.$$

Terbukti f diskontinu di $x=0$.

Jadi, f diskontinu di $x=0$ dan kontinu di selainnya.

▼