Soal dan Solusi UAS Analisis Real I 2023

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Diberikan $\langle s_n \rangle$ barisan bilangan real dengan $s_n > 0$. Jika $\langle s_n \rangle$ konvergen ke s, buktikan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{s_n} = \sqrt{s}.$$

Penyelesaian.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan definisi, terdapat bilangan asli K yang memenuhi $|s_n - s| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq K$.

Jika $s = 0$ dan pilih $\varepsilon := \varepsilon^2$. Terdapat bilangan asli N yang memenuhi $|s_n - 0| < \varepsilon^2 \implies |s_n| < \varepsilon^2$ untuk setiap $n \geq N$. Ini berarti $\left|\sqrt{s_n}\right| = \sqrt{|s_n - 0|} < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$. Ini menunjukkan $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{s_n} = 0$.

Jika $s > 0$ dan pilih $\varepsilon := \left(\sqrt{s+1} + \sqrt{s}\right)\varepsilon$, terdapat bilangan asli M yang memenuhi $|s_n - s| < \left(\sqrt{s} + \sqrt{s+1}\right)\varepsilon$ untuk setiap $n \geq M$. Di sisi lain, terdapat bilangan asli M' yang memenuhi $|s_n - s| < 1$ untuk setiap bilangan asli $n \geq M'$. Menggunakan ketaksamaan segitiga $|a - b| \geq a - b$ dieproleh

$$1 > |s_n - s| = |s - s_n| \geq s - s_n \implies s_n > s + 1.$$

Pilih $T = \sup\{M, M'\}$. Untuk setiap $n \geq T$,

$$\left|\sqrt{s_n} - \sqrt{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{\sqrt{s_n} + \sqrt{s}}\right| = \frac{|s_n - s|}{\sqrt{s+1} + \sqrt{s}} < \frac{\left(\sqrt{s} + \sqrt{s+1}\right)\varepsilon}{\sqrt{s} + \sqrt{s+1}} = \varepsilon.$$

Ini membuktikan $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{s_n} = \sqrt{s}$. ▼

Question 2

Diberikan fungsi bernilai real $f(x) = c, g(x) = x$, dan $h(x) = x^3$ yang didefinisikan pada $\mathbb{R}$ dengan c suatu bilangan real yang ditentukan. Gunakan langsung definisi limit fungsi untuk membuktikan $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 2$, dan $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 8$.

Penyelesaian.

Akan dibuktikan $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = c$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = 1$, maka untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x-2| < \delta = 1$ berlaku $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, terbukti.

Akan dibuktikan bahwa $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = x$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon$, maka untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x-2| < \delta = \varepsilon$ berlaku $|f(x) - 2| = |x-2| < \varepsilon$, terbukti.

Akan dibuktikan $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 8$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa jika x memenuhi $0 < |x-2| < 1$ berlaku $0 < x - 2 < 1 \implies 2 < x < 3$. Pilih $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{19}\right\}$, maka untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x-2| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - 8| = \left|x^3 - 8\right| = |(x-2)\left(x^2+2x+4\right)| = |x-2|\left|x^2+2x+4\right| < \frac{\varepsilon}{19}\left(3^2 + 2\cdot 3 + 4\right) = \varepsilon.$$

Terbukti. ▼

Question 3

Jika f fungsi kontinu pada ruang metrik (X, d) kedalam $\mathbb{R}$, buktikan fungsi $|f|$ juga kontinu pada X.

Penyelesaian.

Diketahui f kontinu di X. Ambil sebarang $p \in X$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ yang memenuhi $d(x, p) < \delta$ berlaku $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Akan dibuktikan bahwa $|f|$ kontinu di p. Menggunakan ketaksamaan segitiga $||a| - |b|| \leq |a - b|$, untuk setiap $x \in X$ yang memenuhi $d(x, p) < \delta$ berlaku $||f(x)| - |f(p)|| \leq |f(x) - f(p)| < \varepsilon \implies ||f(x)| - |f(p)|| < \varepsilon$. Terbukti. ▼

Question 4

Buktikan fungsi $f(x) = x^2$ kontinu seragam pada himpunan terbatas $E \subset \mathbb{R}$.

Penyelesaian.

Karena E terbatas, terdapat bilangan real $M > 0$ yang memenuhi $|x| \leq M$ untuk setiap $x \in E$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2M} > 0$ dan tinjau $x, y \in E$ yang memenuhi $0 < |x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Menggunakan ketaksamaan segitiga $|a + b| \leq |a| + |b|$, berlaku

$$|f(x) - f(y)| = \left|x^2 - y^2\right| = |(x - y)(x + y)| = |x - y||x + y| \leq |x - y|(|x| + |y|) < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot (M + M) = \varepsilon,$$

terbukti. ▼