Soal dan Solusi UTS Aljabar Linear Elementer

Wildan Bagus Wicaksono

Email : wildanbagus@student.ub.ac.id

LinkedIn : Wildan Bagus Wicaksono

Soal 1. Tentukan invers dari matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 9 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{b_2 + b_1 \\ b_3 + 3b_1 \\ b_4 - b_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 11 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{b_1 + b_2 \\ b_3 + 12b_2 \\ b_4 - 3b_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 9 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 71 & 15 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{b_1 + 2b_4 \\ b_3 + 4b_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -6 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{b_1 - 27b_3 \\ b_5 + 5b_3 \\ b_4 - 18b_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & -5 & -27 & -106 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 & -3 & -18 & -71 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\frac{b_2}{-1} \\ \frac{b_3}{-1}}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & -5 & -27 & -106 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 & -3 & -18 & -71 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{b_3 \leftrightarrow b_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & -5 & -27 & -106 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 14 & -3 & -18 & -71 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

Jadi,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 9 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 21 & -5 & -27 & -106 \\ 4 & -1 & -5 & -20 \\ 14 & -3 & -18 & -71 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}}.$$

Soal 2. Diketahui matriks $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ di mana $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ memenuhi kedua persamaan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} -6 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} 20 & -27 \end{bmatrix}.$$

(a). Tentukan matriks B tersebut.

(b). Tentukan nilai dari $\det\left(3B^{-1}\right)$.

Penyelesaian.

(a). *Solusi 1.* Tinjau bahwa $B^T = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix}$ sehingga kita punya

$$\begin{bmatrix} -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y & 2z + w \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 20 & -27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x + 4y & -3z + 4w \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} 2x + y = -6 \\ -3x + 4y = 20 \end{cases} \quad \text{dan} \quad \begin{cases} 2z + w = 7 \\ -3z + 4w = -27 \end{cases}$$

Dengan eliminasi dan substitusi dengan mudah diperoleh $(x, y, z, w) = (-4, 2, 5, -3)$ sehingga $\boxed{B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}}$.

....

Solusi 2. Dengan menggunakan sifat $(AB)^T = B^T A^T$ dan $\left(A^T\right)^T = A$, kita punya

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} B^T\right)^T = \begin{bmatrix} -6 & 7 \end{bmatrix}^T \iff B \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$B \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -27 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Persamaan (1) dan (2) dapat kita susun menjadi

$$B \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 20 \\ 7 & -27 \end{bmatrix} \iff B = \begin{bmatrix} -6 & 20 \\ 7 & -27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

sehingga didapatkan

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 20 \\ 7 & -27 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(2)(4) - (1)(-3)} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -6 & 20 \\ 7 & -27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

yang ekuivalen pula dengan

$$B = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -44 & 22 \\ 55 & -33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{44}{11} & \frac{22}{11} \\ \frac{55}{11} & -\frac{33}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

dan kita dapatkan $\boxed{B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}}$.

(b). Perhatikan bahwa $|B| = (-4)(-3) - (2)(5) = 2$. Maka

$$\left|3B^{-1}\right| = 3^2 \left|B^{-1}\right| = \frac{9}{|B|} = \boxed{\frac{9}{2}}.$$

Soal 3. Diberikan ruang vektor $\mathbb{R}^3$ dan misalkan

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, b = 2a + 3c \right\}.$$

Buktikan bahwa W merupakan subruang dari ruang vektor $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ karena memenuhi $0 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0$ sehingga kita peroleh W tak kosong. Karena $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di ruang vektor $\mathbb{R}^3$, maka $W \subseteq \mathbb{R}^3$.

Akan dibuktikan bahwa $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$, maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$. Ambil sebarang $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$, misalkan

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + 3a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_1 + 3b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

di mana $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Kita punya

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + 3a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_1 + 3b_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ (2a_1 + 3a_2) + (2b_1 + 3b_2) \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 2a_1 + 3a_2 + 3b_1 + 3b_2 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Karena $2a_1 + 3a_2 + 2b_1 + 3b_2 = 2(a_1 + b_1) + 3(a_2 + b_2)$ dan $a_1 + b_1, a_2 + b_2, 2a_1 + 3a_2 + 3b_1 + 3b_2 \in \mathbb{R}$, maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$.

Akan dibuktikan bahwa $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} \in W$, maka $k\mathbf{a} \in W$. Ambil sebarang $\mathbf{a} \in W$, misalkan

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + 3a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \implies k\mathbf{a} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + 3a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ k(2a_1 + 3a_2) \\ ka_2 \end{pmatrix}.$$

Karena $k(2a_1 + 3a_2) = 2(ka_1) + 3(ka_2)$ serta $ka_1, ka_2, k(2a_1 + 3a_2) \in \mathbb{R}$, maka $k\mathbf{a} \in W$.

Jadi, kita simpulkan bahwa W subruang dari ruang vektor $\mathbb{R}^3$. ■

Soal 4. Diberikan ruang vektor $\mathbb{R}^4$ dan misalkan $S = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{p}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ dengan

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \overline{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Buktikan bahwa S merupakan basis bagi $\mathbb{R}^4$.

Penyelesaian.

Jelas S tak kosong. Kita tahu bahwa $\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- S disebut bebas linier jika solusi dari

$$\overline{0} = k_1\overline{u} + k_2\overline{v} + k_3\overline{w} + k_4\overline{p} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - k_3 - k_4 \\ -2k_1 - 2k_2 + 5k_3 - 9k_4 \\ -5k_1 + 6k_3 + 9k_4 \\ -3k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 2k_4 \end{pmatrix}$$

  hanya tepat 1, yaitu $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ (solusi trivial).

- S disebut merentang $\mathbb{R}^4$ apabila untuk sebarang $\overline{p} \in \mathbb{R}^4$ di mana $\overline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ jika sistem persamaan

$$\overline{p} = k_1\overline{u} + k_2\overline{v} + k_3\overline{w} + k_4\overline{p} \iff \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - k_3 - k_4 \\ -2k_1 - 2k_2 + 5k_3 - 9k_4 \\ -5k_1 + 6k_3 + 9k_4 \\ -3k_1 + 2k_2 + 4k_3 + 2k_4 \end{pmatrix}$$

  memiliki setidaknya satu solusi (atau persamaan disebut konsisten).

Dari kedua persamaan dapat kita susun menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & 6 & 9 \\ -3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & 6 & 9 \\ -3 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \tag{$*$}$$

Tinjau bahwa determinan dari matriks koefisien adalah

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & 6 & 9 \\ -3 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{b_2 + 2b_1 \\ b_3 + 5b_1 \\ b_4 + 3b_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{b_4 - b_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \overset{b_2 \leftrightarrow b_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

sehingga kita peroleh

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 5 & -9 \\ -5 & 0 & 6 & 9 \\ -3 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -(1)(5)(3)(-5) = 75 \neq 0.$$

Akibatnya, kedua sistem persamaan pada $(*)$ memiliki tepat satu solusi. Sehingga kita peroleh S merentang $\mathbb{R}^4$ karena $\overline{p} = k_1\overline{u} + k_2\overline{v} + k_3\overline{w} + k_4\overline{p}$ memiliki setidaknya satu solusi sehingga S merentang $\mathbb{R}^4$. Sedangkan, kita tahu bahwa salah satu solusi $\overline{0} = k_1\overline{u} + k_2\overline{v} + k_3\overline{w} + k_4\overline{p}$ adalah $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Karena hanya memiliki tepat satu solusi, maka $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ merupakan satu-satunya solusi sehingga S bebas linier.
Jadi, S merupakan basis bagi $\mathbb{R}^4$. $\blacksquare$