Soal dan Solusi UAS Aljabar Linier Elementer 2022

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Periksa apakah terdapat skalar k dan m sehingga vektor-vektor berikut

$$\mathbf{f}_1 = 2 + kx + 6x^2, \quad \mathbf{f}_2 = m + 5x + 3x^2, \quad \mathbf{f}_3 = 1 + 2x + 3x^2$$

saling orthogonal di P_2 di mana hasil kali dalam di P_2 didefinisikan sebagai

$$\left\langle a + bx + cx^2, r + sx + tx^2 \right\rangle = ar + bs + ct.$$

Penyelesaian.

Klaim tidak ada skalar k dan m yang memenuhi. Andaikan ada, maka haruslah $\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \rangle = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3 \rangle = 0$. Kita punya

$$0 = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = 2m + 5k + 18 \iff 2m + 5k = -18. \tag{1}$$

$$0 = \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3 \rangle = m + 10 + 9 \iff m = -19. \tag{2}$$

$$0 = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3 \rangle = 2 + 2k + 18 \iff k = -10.. \tag{3}$$

Namun, dari (2) dan (3) kita punya $2m + 5k = -38 - 50 = -88$ yang kontraduksi dengan (1). Jadi, tidak ada skalar k dan m yang memenuhi. ▼

Question 2

Diberikan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tentukan:

(a). basis ruang baris,

(b). basis ruang kolom,

(c). basis ruang nol,

(d). rank(A) dan null(A).

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \overset{\substack{b_2 - 3b_1 \\ b_3 + b_1 \\ b_4 - 2b_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & -14 & -14 & -14 & -28 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \overset{\substack{b_2/-14 \\ b_3/4 \\ b_4/-5}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{b_3 - b_2 \\ b_4 - b_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a). Kita peroleh basis ruang baris dari matriks A adalah $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b). Kita peroleh basis ruang kolom dari matriks A adalah $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

(c). Akan kita tentukan $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ sedemikian sehingga $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Hal ini ekivalen dengan

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Misalkan $x_3 = a, x_4 = b$, dan $x_5 = c$. Maka

$$x_2 = -x_3 - x_4 - 2x_5 = -a - b - 2c$$
$$x_1 = -4x_2 - 5x_3 - 6x_4 - 9x_5 = 4a + 4b + 8c - 5a - 6b - 9c = -a - 2b - c.$$

Sehingga kita peroleh

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -a-2b-c \\ -a-b-2c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c$$

sehingga basis ruang null dari matriks A adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d). Dari (a) atau (b) kita punya $\text{rank}(A) = 2$ dan $\text{null}(A) = 3$.

▼

Question 3

Misalkan $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ adalah matriks transformasi linier $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ relatif terhadap basis $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ dan basis $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di mana

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a). Tentukan nilai $[T(\mathbf{u}_1)]_C$ dan $[T(\mathbf{u}_2)]_C$.

(b). Tentukan nilai $T(\mathbf{u}_1)$ dan $T(\mathbf{u}_2)$.

(c). Tentukan rumus dari $T\left(\binom{a}{b}\right)$.

Penyelesaian.

(a). Dari soal, kita tahu bahwa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = [T]_{C,B} = \begin{pmatrix} [T(\mathbf{u}_1)]_C & [T(\mathbf{u}_2)]_C \end{pmatrix}$$

Sehingga kita peroleh $[T(\mathbf{u}_1)]_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $[T(\mathbf{u}_2)]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b). Kita punya

$$T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{v}_1 + (-3)\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-6)+3 \\ 2+(-6)+0 \\ 2+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{u}_2) = (-1)\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2+12 \\ -1+2+0 \\ -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c). Ambil sebarang $\mathbf{x} = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$. Karena B basis untuk $\mathbb{R}^2$, maka terdapat skalar m dan n yang memenuhi

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{x} = m\mathbf{u}_1 + n\mathbf{u}_2 = m\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2n \\ 3m+4n \end{pmatrix}.$$

Kita punya $a = m - 2n$ dan $b = 3m + 4n$ sehingga kita punya $m = \frac{2a+b}{5}$ dan $n = \frac{b-3a}{10}$. Maka

$$T(\mathbf{x}) = T(m\mathbf{u}_1 + n\mathbf{u}_2) = T(m\mathbf{u}_1) + T(n\mathbf{u}_2) = mT(\mathbf{u}_1) + nT(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} -m \\ -4m \\ 2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13n \\ n \\ -n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m+13n \\ -4m+n \\ 2m-n \end{pmatrix}.$$

Dengan mensubstitusikan m dan n, maka

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-2a-b}{5} + \frac{13b-39a}{10} \\ \frac{-8a-4b}{5} + \frac{b-3a}{10} \\ \frac{4a+2b}{5} + \frac{3a-b}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4a-2b+13b-39a}{10} \\ \frac{-16a-8b+b-3a}{10} \\ \frac{8a+4b+3a-b}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-43a+11b}{10} \\ \frac{-19a-7b}{10} \\ \frac{11a+3b}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{43}{10} & \frac{11}{10} \\ -\frac{19}{10} & -\frac{7}{10} \\ \frac{11}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

▼

Question 4

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a). Tentukan semua nilai eigen dari matriks A.

(b). Tentukan basis vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut.

(c). Dengan proses Gram-Schmidt dan normalisasi, ubah basis vektor eigen menjadi basis orthonormal.

(d). Tentukan matriks orthogonal P yang mendiagonalkan A beserta matriks diagonal D.

Penyelesaian.

(a). Misalkan λ nilai eigen dari matriks A, maka

$$\begin{aligned}
0 &= |\lambda I - A| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} && \text{(ekspansi kofaktor baris 1)} \\
&= (\lambda-2)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\left((\lambda-2)^2 - 1^2\right) - (\lambda-2-1) + (1-(\lambda-2)) \\
&= (\lambda-2)(\lambda-2+1)(\lambda-2-1) - (\lambda-3) + (3-\lambda) \\
&= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3) - (\lambda-3) - (\lambda-3) \\
&= \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)(\lambda-3) - 2(\lambda-3) \\
&= (\lambda-3)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2\right) \\
&= \lambda(\lambda-3)^2.
\end{aligned}$$

Jadi, nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = 0$ dan $\lambda = 3$.

(b). Akan kita tentukan $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ sedemikian sehingga $\mathbf{0} = (\lambda I - A)\mathbf{x}$.

- Untuk $\lambda = 0$, maka $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Perhatikan matriks koefisien pada SPL di samping.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{b_1 + 2b_2 \\ b_3 - b_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{b_3 + b_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{b_1 / -3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Misalkan $x_3 = a$. Maka $x_2 = x_3 = a$ dan $x_1 = 2x_2 - x_3 = a$ sehingga kita peroleh $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} a$.

Jadi, basis vektor eigen untuk $\lambda = 0$ adalah $E_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Untuk $\lambda = 3$, maka $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Perhatikan matriks koefisien pada SPL di samping.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{b_2 - b_1 \\ b_3 - b_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Misalkan $x_2 = a$ dan $x_3 = b$. Maka

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -a - b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} b.$$

  Jadi, basis vektor eigen untuk $\lambda = 3$ adalah $E_{\lambda=3} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(c). Kita punya $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Misalkan $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Akan dilakukan proses Gram Schmidt.

Step 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Kita punya $||\mathbf{v}_1||^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ dan $\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$.

Step 2. Maka

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{||\mathbf{v}_1||^2} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kita punya $||\mathbf{v}_2||^2 = (-1)^2 + 1^2 + 0^2 = 2$. Selain itu, kita punya

$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$
$$\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0.$$

Step 3. Maka

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{||\mathbf{v}_2||^2} \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{||\mathbf{v}_1||^2} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kita punya $||\mathbf{v}_3||^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2} \implies ||\mathbf{v}_3|| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Kita rubah basis orthogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ke basis orthonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$, yaitu

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{||\mathbf{v}_3||} = \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(d). Konstruksikan

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

▼